

# Disegno, modelli, invarianti geometriche delle forme cristalline verso la sostenibilità nel design del gioiello

Alessandra Avella  
 Nicola Pisacane  
 Pasquale Argenziano

## Abstract

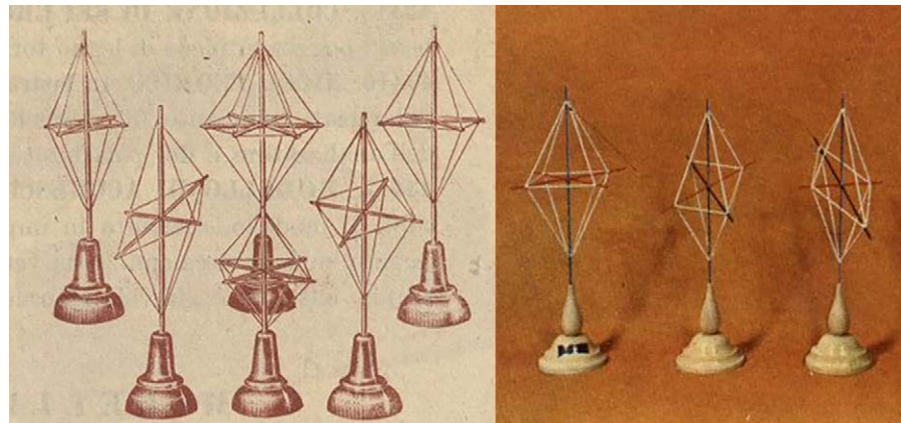
Da diversi anni il tema della sostenibilità interessa anche l'ambito gemmologico con sperimentazioni che stanno rivoluzionando il mercato del gioiello. Le gemme prodotte in laboratorio competono con le analoghe estratte in natura. Tale contesto ha orientato la presente ricerca ponendosi come avanzamento del tema del disegno delle gemme sfaccettate i cui primi esiti sono già stati oggetto di contributi scientifici degli autori nelle precedenti edizioni del Convegno UID.

Assunti gli enunciati della cristallografia geometrica sull'analogia delle configurazioni spaziali dei cristalli tanto naturali che artificiali, la ricerca approfondisce la geometria delle forme cristallografiche attraverso l'analisi di modelli analogici e digitali, tra collezioni museali, iconografia dei cataloghi ed esperienze di didattica laboratoriale.

L'analisi si è avvalsa di modelli in lastre di vetro esposti al Museo Michelangelo di Caserta messi a confronto con gli esemplari appartenenti alle collezioni illustrate e descritte nei cataloghi del materiale didattico della storica casa editrice Paravia di Torino e dei più recenti strumenti digitali per la modellazione in ambito cristallografico con applicazioni estese anche alla didattica.

## Parole chiave

Cristallografia geometrica, modelli cristallografici, gemme artificiali, Paravia, musei didattici.



Le sei forme fondamentali dei sistemi di cristallizzazione; disegno seppia e fotografia; dettaglio. [AA.VV. 1951, Anonimo 1980].

## Introduzione

Il contributo presenta degli avanzamenti della ricerca sul tema del disegno delle gemme sfaccettate con specifico riferimento al taglio delle gemme sintetiche e all'ottimizzazione di quelle esistenti in una chiave di sostenibilità. Produrre gemme in laboratorio o ri-faccettare quelle naturali significa ridurre l'estrazione mineraria che nel corso del Novecento ha registrato una rilevante impronta ecologica [Pisacane et al. 2023b, pp. 1874-1895]. In entrambi i casi i principi geometrici che presidono il controllo delle configurazioni atomiche rientrano in quella branca della cristallografia definita "cristallografia geometrica" che studia le diverse configurazioni spaziali dei cristalli di una stessa sostanza sia essa di natura organica o inorganica, indipendentemente dalla loro origine naturale o artificiale, diversamente dalla "cristallografia fisica" e dalla "cristallografia chimica" che approfondiscono altre caratteristiche e altre proprietà dei cristalli [Sansoni 1892, pp. XII-XIII].



Fig. 1. 1 Serie di 15 modelli cristallografici in lastre di vetro con assi cristallografici in filo di seta colorata e forme emiedriche in cartone. Collezione Museo Michelangelo, Caserta. Foto degli Autori, 2024.

Lo studio della geometria dei cristalli ha condotto la ricerca ad approfondimenti sugli assunti teorici delle forme poliedriche e della loro configurazione spaziale anche attraverso l'ausilio di modelli. I modelli fisici sono da sempre strumenti didattici utili ad avvicinare lo studente alla comprensione delle relazioni spaziali sottese alle forme, anche nel caso della cristallografia. Modelli cristallografici analogici hanno supportato fino ad oltre metà Novecento la didattica tanto nella Scuola quanto nell'Università per essere gradualmente sostituiti da quelli digitali. Tali modelli analogici sono parte di collezioni museali [1] e costituiscono un patrimonio significativo volto a conservare la memoria di metodi e materiali didattici della cultura dell'istruzione italiana.

La ricerca partendo dallo studio di alcuni dei modelli cristallografici custoditi presso il Museo Michelangelo di Caserta [2] ha come obiettivo: la sistematizzazione delle forme cristallografiche e delle sottese relazioni geometriche; l'analisi comparativa dei modelli descritti e illustrati nei cataloghi dei materiali e sussidi didattici della storica casa editrice Paravia di Torino; la condivisione didattica degli assunti teorici attraverso modelli digitali e analogici e le rispettive rappresentazioni cristallografiche.

### Dall'astrazione geometrica alla classificazione scientifica dei cristalli

Tra i modelli cristallografici esposti presso il museo Michelangelo di Caserta la ricerca prende in esame i 15 esemplari in vetro esemplificativi delle forme fondamentali (fig. 1), all'interno della più ampia collezione di oggetti naturali, strumenti scientifici, apparati tecnologici e modelli didattico-scientifici.

Le forme cristallografiche dei 15 modelli sono state ordinate e classificate nella tabella (fig. 2) attribuendo ciascuna di queste al gruppo, al sistema e alla classe cristallografica di appartenenza.

Inoltre, per ciascuna forma cristallografica sono indicati l'eventuale presenza degli assi in filo di seta, il loro numero e colore in funzione del gruppo cristallino o della rispettiva forma emiedrica in cartone. La tabella inoltre pone a confronto, anche attraverso l'ausilio di immagini fotografiche dei modelli e delle illustrazioni accluse ai cataloghi della casa editrice Paravia, i modelli in vetro esposti con quelli riportati nei cataloghi, con specifico riferimento all'edizione del 1932. Infine, un confronto tra denominazione scientifica della forma cristallina e relativa indicazione a catalogo mette in evidenza alcune differenze nella nomenclatura. In tali modelli in vetro sono identificabili forme appartenenti ai tre gruppi cristallografici [3] e a tutti i sistemi cristallografici. La classificazione dei sistemi fa riferimento alla forma poliedrica della cella primitiva unitaria rispetto alla quale sono aggregati gli atomi di ciascun cristallo. Rispetto a tale classificazione è da segnalare che i modelli cristallografici prodotti

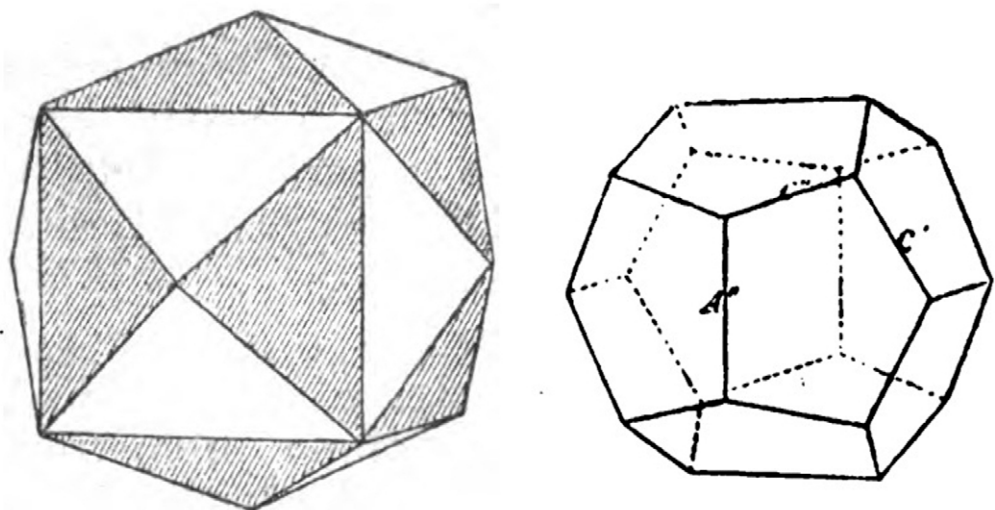


Fig. 2. Il tetracisaedro sottoposto a emiedria del pentagono-dodecaedro illustrati nelle figg. 68 e 69 del trattato di Francesco Sansoni, *Cristallografia geometrica, fisica e chimica applicata ai minerali*, 1892.

dalla Paravia sono sempre suddivisi in sei sistemi e non in sette [4]. L'articolazione in sei classi, che fonde il sistema trigonale a quello esagonale, probabilmente era proposta dalla Paravia per fini legati a una semplificazione didattica.

A tal proposito è interessante segnalare che tra i sussidi didattici prodotti dalla Paravia a partire da quelli proposti nel catalogo del 1932 sono disponibili anche “le sei forme fondamentali dei sistemi di cristallizzazione – Modelli in filo di ferro verniciati: in rosso gli angoli, in bianco gli assi”. L'analisi dell'immagine di tali modelli, acclusa al catalogo, mette in evidenza che tra i sistemi cristallografici è escluso quello trigonale.

Dei 15 modelli oggetto della presente ricerca 12 di questi presentano al loro interno fili in seta di uno, due o tre colori per la materializzazione della direzione degli assi cristallografici, mentre 3 presentano la forma emiedrica complementare in cartone inscritta nel poliedro in vetro. Le forme appartenenti al gruppo monometrico presentano fili monocromatici rossi mutuamente ortogonali le cui intersezioni individuano il centro del cristallo, coerentemente con il gruppo di appartenenza. Le forme appartenenti al gruppo dimetrico presentano fili di doppio colore (rosso/giallo o rosso/verde). Nello specifico, le forme appartenenti al sistema tetragonale presentano un filo rosso e due di colore verde, mentre le forme appartenenti al sistema esagonale presentano un filo rosso e tre di colore giallo, tra loro incidenti, complanari e di eguale lunghezza. Le forme appartenenti al gruppo trimetrico presentano fili di

GRUPPO	SISTEMA	CLASSE	FORMA CRISTALLOGRAFICA (vetro)	FORMA CRISTALLOGRAFICA EMIEDRICA (cartone)	FORMA CRISTALLOGRAFICA (denominazione dal Catalogo Paravia, 1956)	ASSI CRISTALLOGRAFICI	IMMAGINI DELLE FORME CRISTALLOGRAFICHE (Collezione del Museo Michelangelo di Caserta)	IMMAGINI DELLE FORME CRISTALLOGRAFICHE (Catalogo Paravia, 1932)
Monometrico	Cubico o tessulare	Esacosottaedrica	Ottaedro		Ottaedro con assi interni	● ● ●		
		Diacisdodecaedrica	Pentagono-dodecaedro		Pentagonododecaedro con assi interni	● ● ●		
		Diacisdodecaedrica	Pentagono-dodecaedro	Tetracisesaedro	Pentagonododecaedro con tetracisesaedro incluso			
		Esacosottaedrica	Triacosottaedro		Triacosottaedro con assi interni	● ● ●		
		Esacosottaedrica	Icositetraedro		Icositetraedro con assi interni	● ● ●		
Dimetrico	Esagonale	Scalenoedrica ditrigonale	Romboedro		Romboedro con assi interni	● ● ● ●		
		Scalenoedrica ditrigonale	Romboedro	Bipiramide esagonale	Romboedro con piramide esagonale inclusa			
		Bipiramidale diesagonale	Bipiramide esagonale		Bipiramide esagonale	● ● ● ●		
		Bipiramidale diesagonale	Prisma esagonale		Prisma esagonale	● ● ● ●		
		Scalenoedrica ditrigonale	Scalenoedro	Bipiramide dodecagonale	Scalenoedro con bipiramide inclusa			
	Tetragonale	Bipiramidale ditetragonale	Quadratottaedro		Bipiramide tetragonale con assi interni	● ● ●		
Trimetrico	Rombico	Bipiramidale rombica	Rombottaedro		Bipiramide rombica con assi interni	● ● ●		
		Bipiramidale rombica	Prisma rombico		Prisma rombico con assi interni	● ● ●		
	Monoclino	Prismatica	Prisma monoclino		Prisma monoclino con assi interni	● ● ●		
	Triclinico	Pediale	Ottaedro triclinico		Ottaedro triclinico	● ● ●		

Fig. 3. Forme cristallografiche in lastre di vetro custodite presso il Museo Michelangelo di Caserta. Classificazione dei 15 modelli con indicazione del gruppo, sistema e classe cristallografici di appartenenza, denominazione scientifica della forma e denominazione indicata nel catalogo Paravia del 1956, specifica degli assi cristallografici, immagine fotografica dei modelli e immagine dell'omologa forma dal catalogo Paravia del 1932. Elaborazione degli Autori, 2024.

tre colori (blu/giallo/rosso o verde/giallo/rosso), incidenti nel centro del cristallo, formando sempre angoli diversi da quello retto. I tre modelli che includono le forme complementari in cartone sono esemplificativi di alcune delle forme emiedriche, che permettono di derivare alcune forme fondamentali da altre dimezzandone il numero di facce. In particolare, per il pentagono-dodicaedro che include il tetracisaedro e il romboedro che include una doppia piramide a base esagonale, il confronto con gli omologhi modelli con assi in filo di seta, anch'essi disponibili nella collezione del Museo, sicuramente forniva un utile ausilio alla didattica e permetteva ulteriori considerazioni di natura geometrica su tali forme cristallografiche (fig. 3).

### Analisi delle forme cristallografiche tra collezioni museali e iconografia dei cataloghi

I modelli esposti sono stati attribuiti alla storica casa editrice torinese Paravia [Di Lorenzo 2020, pp. 232-233] che tra gli inizi del Novecento e gli anni Ottanta produce materiale e sussidi didattici per la scuola, di manifattura completamente italiana [5], inerenti a varie discipline, tra le quali le scienze naturali. Materiale e sussidi didattici per l'insegnamento delle scienze naturali sono presentati nei *Cataloghi* storici del fondo Paravia pubblicati tra il 1917 e il 1987, dei quali per la ricerca qui discussa si è approfondita la categoria relativa a mineralogia, geologia e cristallografia (fig. 4). Nella specifica sezione di cristallografia sono

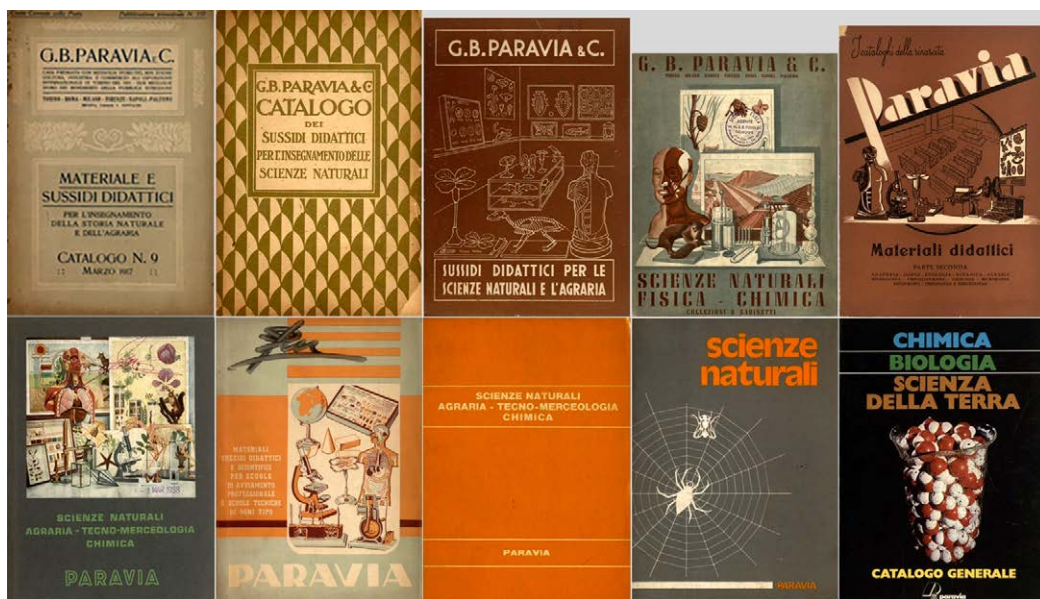
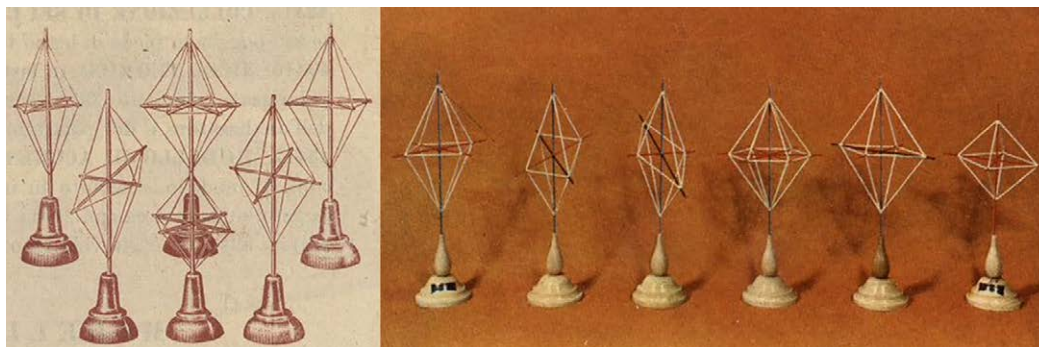


Fig. 4. Cataloghi dei sussidi didattici per l'insegnamento delle Scienze naturali, G.B. Paravia & C. Copertine, edizioni del 1917, 1932, 1941, 1942, 1951 (in alto da sinistra a destra), 1956, 1959, 1968, 1980, 1987 (in basso da sinistra a destra).

proposte in vendita diverse collezioni di modelli cristallografici e le sei forme fondamentali dei sistemi di cristallizzazione (fig. 5). Solo nell'edizione del 1917 sono presenti tra i sussidi didattici le tavole murali delle forme semplici e derivate dei sistemi cristallografici e i cartoni per gli sviluppi geometrici dei modelli. La vendita dei cartoni per la costruzione delle configurazioni poliedriche delle principali forme cristallografiche a partire dal loro sviluppo piano conferma il ruolo centrale che la geometria ha anche per l'insegnamento di questa disciplina. L'ordinamento scolastico a cui è rivolta la produzione della Paravia si adegua alle disposizioni del potere governativo in vigore ed al relativo sistema scolastico. I prodotti Paravia, pertanto, si conformano ai programmi ministeriali che si sono susseguiti nel tempo, come dichiarato esplicitamente nelle pagine introduttive di alcuni *Cataloghi*.

Dal confronto tra i modelli in vetro pubblicati nei *Cataloghi* e quelli del Museo Michelangelo, per i quali non è fornita una dichiarata attribuzione di ciascun esemplare alla rispettiva de-

Fig. 5. Le sei forme fondamentali dei sistemi di cristallizzazione. Disegno seppia (a sinistra), *Catalogo Materiali didattici. Parte seconda*, G.B. Paravia & C. 1951, p. 65; Fotografia a colori (a destra), *Catalogo Scienze naturali. Anatomia umana, zoologia, botanica, geografia, agraria, tecno-merceologia*, G.B. Paravia & C. 1980, p. 146.



nominazione della forma cristallina, è stato possibile comparare le singole forme, verificarle geometricamente, e ipotizzare la datazione degli esemplari esposti.

Operazione preliminare all'analisi comparativa è stata l'individuazione delle forme dei 15 modelli esposti sulla base delle rispettive caratteristiche configurative, desunte dalle evidenze geometriche di ciascuna forma relativamente a numero di facce del poliedro, forma dei singoli poligoni costituenti le facce e loro reciproca giacitura nello spazio, angoli diedri tra le stesse facce, piani e assi di simmetria.

Nella collezione in oggetto sono stati identificati un ottaedro, un pentagono-dodecaedro, un pentagono-dodecaedro con tetracisesaedro incluso (in cartone), un triacisottaedro e un icositetraedro che per la presenza di tre assi cristallografici mutuamente ortogonali tra loro rientrano nel sistema cubico; un romboedro, un romboedro con la piramide esagonale inclusa (in cartone), una bipiramide esagonale, un prisma esagonale e uno scalenoedro che per la presenza di una forma esagonale nello stesso poliedro o nella sua forma emiedrica rientrano nel sistema esagonale; un quadratottaedro che per la configurazione delle facce triangolari delle due piramidi con una comune base quadrata rientrano nel sistema tetragonale o dimetrico; un rombottaedro e un prisma rombico che per forma rombica del poligono di base rientrano nell'omonimo sistema; un prisma monoclino o prisma obliquo a base romboidale che per la direzione non ortogonale degli spigoli rientra nel sistema monoclino e infine un ottaedro triclinico o doppia piramide obliqua a base romboidale che non rispettando nessun principio geometrico riscontrato nelle precedenti forme rientra nel sistema triclinico [Haüy 1784].

Al fine di procedere all'analisi comparativa i dati relativi ai modelli cristallografici della Paravia sono stati inseriti in una tabella strutturata *ad hoc* in cui a ciascun *Catalogo*, in ordine cronologico di pubblicazione, sono associati dati analitici significativi per la caratterizzazione dei modelli (fig. 6). Per quanto riguarda il titolo e la data di pubblicazione dei *Cataloghi* è possibile fare una distinzione tra quelli editi prima e dopo i *Cataloghi* pubblicati nel decennio 1943-1953, denominati dalla stessa casa editrice *I Cataloghi della Rinascita*. Categoria e sezione di riferimento sono generalmente *Mineralogia*, *Geologia*, *Paleontologia* e *Cristallografia* e *Modelli di forme cristallografiche*. Delle *Collezioni* o *Serie* di modelli presenti in ciascun *Catalogo* sono riportati, dove indicato: il materiale con il quale sono realizzati i pezzi, tra vetro, legno, filo di ferro, cristallo duro e cartone; il numero di pezzi; le dimensioni del singolo pezzo espresse in millimetri o centimetri o proporzionalmente derivabili a partire dalla misura del lato della forma cubica; la descrizione delle forme con indicazione del gruppo e del sistema cristallografico di appartenenza; la presenza o meno di una cassetta nella quale sono raccolti; l'immagine fotografica o il disegno della collezione; il prezzo di listino; la pagina di *Catalogo*. L'apparato iconografico che illustra le *Collezioni* o i singoli modelli segue il progetto tipografico della serie a cui appartiene il *Catalogo* nel quale sono presentati. Nei *Cataloghi* editi dal 1917 al 1942 le immagini, prevalentemente disegni e fotografie in bianco e nero (fig. 7), sono inserite come il testo nella griglia di impaginazione; nel *Catalogo* del 1951, che appartiene alla serie dei *Cataloghi della Rinascita*, il progetto tipografico non cambia, ma i disegni e le fotografie sono color seppia. Nei *Cataloghi* successivi le immagini sono composte su tavole fronte/retro a colori o in bianco e nero, in pagine fuori testo. Le ultime due edi-

TITOLO	DATA CATEGORIA	RELEZIONE/ARTICOLO	COLLEZIONE/SERIE	MATERIALE PEZZI	NUMERO DI PEZZI	DIMENSIONE PEZZI	DESCRIZIONE IN/IN FORNIRE	CONTENITORE/CASSETTA	IMMAGINE	PREZZO	PAGINA	
Materiale e sussidi didattici per l'insegnamento della storia naturale e dell'agraria	1917	Mineralogia, Geologia e Paleontologia	Modelli di forme cristallografiche	legno	52		assente	NO	NO	L.80	66	
			<b>Collezione di 52 pezzi secondo ROTHE</b>	cartone	50		presente	NO	SI	L.4	67	
			<b>Cartoni per sviluppi geometrici dei modelli in legno</b>	cartone	50		presente	NO	SI	L.140	66	
			<b>Serie massima 50 pezzi</b>	cartone	15	mm. 70x100	assente	NO	SI	L.110	67	
			<b>Collezione di 15 pezzi:</b> forme principali di tutti i sistemi costruiti con lastre di vetro; con inclusi gli assi e la forma fondamentale in cartone.		29			assente	NO	L.210	67	
			<b>Collezione di 29 modelli</b>									
Catalogo dei sussidi didattici per l'insegnamento delle scienze naturali	1932	Mineralogia, Geologia e Paleontologia	Modelli cristallografici e cristalli naturali	legno	52		assente	SI	SI	L.140	95	
			<b>Collezione di modelli di cristalli in legno.</b> Serie di 52 modelli in cassetta rappresentanti le forme principali semplici e composte. Serie di 52 modelli in cassetta.	cartone	53 [32 (forme della collezione in legno) +1 (bipiramide dodecaedrica)]	Staglio del cubo circa 3 volte quello dei modelli in legno	presente	NO	NO	L.400	95	
			<b>Collezione di 53 modelli in cartone formato grande.</b> Sistemimetrico, tetragonale, esagonale e romboidale, rombico e trimetrico, monoclinico, triclino.									
			<b>Collezione di 15 modelli di cristalli, in lastre di vetro,</b> con gli assi in filo di seta colorato.	vetro	15		presente	NO	SI	L.340	95, 96	
			<b>Collezione di modelli di cristalli, in lastre di vetro</b> cogli assi in filo di seta colorato, costituita da 19 forme	vetro	19 [15 forme della collezione in vetro + 4 (Tetrakisesaedro, icosaedro, esacisottaedro, pentagono dodecaedro col tetrakisesaedro incluso (in cartone)]		presente	NO	SI	L.430	96	
			<b>Collezione di 25 cristalli in vetro,</b> con assi interni rappresentati da fili tesi e di colorazione diversa per i diversi assi, oppure colle forme schematiche in cartone nell'interno (la Collezione non è suddivisibile)	vetro	25		assente	NO	NO	L.1150	97	
Sussidi didattici per le scienze naturali e l'agraria	1941	Mineralogia, metalografia, cristallografia, geologia e paleontologia	Modelli cristallografici	legno	52		assente	SI	SI	L.175	155	
			<b>Cristalli in legno,</b> modelli rappresentanti le forme principali semplici e composte. Serie di 52 modelli in cassetta.	legno	22		assente	NO	NO	L.130	155	
			<b>Cristalli in legno,</b> modelli in formato un po' maggiore dei precedenti. Serie di 29 modelli									
			<b>Collezione di 53 modelli in cartone, formato grande.</b>	cartone	53 (forme della collezione da 52 modelli in legno + bipiramide dodecaedrica)	Lo staglio del cubo è circa 3 volte quello dei modelli in legno	presente	NO	NO	L.500	156	
			<b>Collezione di 53 modelli in cartone, formato grande</b> con spigoli in rosso per maggior risalto del cristallo.	cartone	53 (forme della collezione da 52 modelli in legno + bipiramide dodecaedrica)	Lo staglio del cubo è circa 3 volte quello dei modelli in legno	presente	NO	NO	L.500	156	
			<b>Collezione ridotta di 21 modelli in cartone, formato grande,</b> rappresentante le forme principali dei 6 sistemi cristallini con gli spigoli in rosso per dare maggior risalto al cristallo.	cartone	21		presente	NO	NO	L.205	156	
			<b>Collezione ridotta di 21 modelli in cartone, formato grande,</b> rappresentante le forme principali dei 6 sistemi cristallini con gli spigoli in rosso per dare maggior risalto al cristallo.	cartone	21		presente	NO	NO	L.305	156	
			<b>Collezione di 15 modelli di cristalli, in lastre di vetro</b> con gli assi in filo di seta colorato.	vetro	15		presente	NO	SI	L.420	157	
			<b>Collezione di modelli di cristalli, 19 forme, in lastre di vetro</b> cogli assi in filo di seta colorato	vetro	19 [15 (forme della collezione in vetro + 4 (Tetrakisesaedro, icosaedro, esacisottaedro, pentagono dodecaedro col tetrakisesaedro incluso (in cartone)]		presente	NO	SI	L.630	157	
Scienze naturali, fisica, chimica. Collezioni e Gabinetti. Listino prezzi	1942	Scienze Naturali	Cristallografia, Mineralogia, Geologia	legno	52		assente	SI	SI		10	
			<b>Serie di 52 forme cristallografiche in legno,</b> comprendenti cristalli dei sistemi principali, con forme semplici e composte. La serie è racchiusa in cassetta di legno doppia.	vetro	19		assente	NO	SI		17, 29	
			<b>Serie di 19 forme cristallografiche in lastre di vetro</b> con assi interni in filo di seta colorato.								64	
Materie didattiche. Parte seconda. i Cataloghi della rinascita	1951	Mineralogia, metalografia, cristallografia, geologia e paleontologia	Modelli cristallografici	legno	52		assente	SI	SI		64	
			<b>Collezione di 52 modelli di cristalli in legno,</b> rappresentanti le forme principali semplici e composte. In cassetta di legno a due ripiani, con divisioni all'interno.	legno	22		assente	NO	NO		64	
			<b>Collezione di 22 modelli di cristalli in legno,</b> rappresentanti le forme principali semplici e composte.	legno	19		Dimensioni del cubo circa cm. 10 di lato; le altre forme in proporzione.	presente	NO	SI		64
			<b>Collezione di 19 modelli di cristalli, in lastre di vetro,</b> con gli assi in filo di seta colorato	vetro	19							
Scienze naturali, agraria, tecno-mercologia, chimica	1956	Mineralogia e Cristallografia	Modelli cristallografici	legno	52		assente	SI	NO	35.200	79	
			<b>Collezione di 52 modelli di cristallo in legno,</b> rappresentanti le forme principali semplici e composte. In cassetta di legno a due ripiani, con divisioni all'interno.	legno	22		assente	SI	NO	15.150	79	
			<b>Collezione di 22 modelli di cristallo in legno,</b> in cassetta a coperchio scorrevole e divisioni interne.	vetro	27		cubo di circa cm. 12 di lato; le altre forme in proporzione	presente	NO	SI		79
			<b>Collezione di 27 modelli di cristalli, in lastre di vetro,</b> con gli assi in filo di seta colorato o forme emedriche incluse.									
Materie sussidi didattici e scientifici	1959	Geologia, cristallografia, mineralogia	Modelli cristallografici	legno	52		assente	SI	SI		97	
			<b>Cristalli in legno: serie di 52 modelli in cassetta,</b> rappresentanti le forme principali, semplici e composte.	legno	22		assente	SI	NO		97	
			<b>Cristalli in legno: serie di 22 modelli in cassetta.</b>	legno	52		assente	SI	SI		79	
			<b>Collezione di 52 modelli di cristalli in legno</b> rappresentanti le forme principali semplici e composte. In cassetta di legno a due ripiani, con divisioni all'interno.	legno	22		assente	SI	NO		79	
			<b>Collezione di 22 modelli di cristalli in legno,</b> in cassetta a coperchio scorrevole e divisioni interne.	legno	27		Dimensioni del cubo circa cm. 12 di lato; le altre forme in proporzione	presente	NO	NO		79
			<b>Collezione di 27 modelli di cristalli, in lastre di vetro,</b> con gli assi in filo di seta colorato o forme emedriche incluse.	vetro	27							
Scienze naturali. Azione umana, zoologia, botanica, geografia, agraria, tecno-mercologia	1980	Scienza della Terra e dell'Universo	Mineralogia e cristallografia	legno	52		assente	SI	NO		148	
			<b>Collezione di 52 modelli di cristalli in legno,</b> rappresentanti le forme principali semplici e composte. In cassetta di legno a due ripiani, con divisioni all'interno.	legno	22		assente	SI	NO		148	
			<b>Collezione di 22 modelli di cristalli in legno,</b> in cassetta a coperchio scorrevole e divisioni interne.	legno	22							
Chimica, biologia, scienza della terra	1987	Scienza della Terra e dell'Universo	Mineralogia e cristallografia									

Fig. 6. Modelli cristallografici nei Cataloghi del materiale e dei sussidi didattici per l'insegnamento delle Scienze naturali della casa editrice G.B. Paravia & C., edizioni dal 1917 al 1987. Elaborazione degli Autori, 2024.

zioni del 1980 e del 1987 presentano una nuova veste tipografica progettata per facilitare la consultazione dei prodotti in vendita, con le illustrazioni quasi sempre a colori impaginate in diretta corrispondenza con i testi di riferimento. Il dettaglio delle immagini dei modelli presentati è trattato con particolare attenzione anche per evitare le eventuali campionature, ovvero la spedizione su richiesta degli articoli a titolo di campione per la scelta.

Dal confronto tra i modelli in vetro presentati nei *Cataloghi* e i 15 esemplari del Museo Michelangelo emerge che questi ultimi non appartengono alla serie completa di 15 modelli di forme cristallografiche dei cataloghi del 1917 e del 1932, mancando da questa serie il cubo, il rombododecaedro, il triacisottaedro, il tetraedro con l'ottaedro incluso (in cartone), il prisma a base quadrata e l'ottaedro monoclinico. Potrebbero far parte della collezione di 29 modelli proposta nel catalogo del 1917 dei quali non è fornita specifica descrizione. I modelli esposti non possono appartenere nemmeno alla serie completa dei 19 modelli in catalogo dal 1932 che integra la serie dei 15 modelli con le forme del tetrakisesaedro, dell'esacisottaedro, dell'icositetraedro e del pentagono-dodecaedro con il tetrakisesaedro incluso (in cartone) perché di queste quattro solo le ultime due sono presenti tra i modelli del museo. Le forme del pentagono-dodecaedro con assi, del romboedro con assi e del prisma monoclinico presenti tra i modelli esposti sono elencate e descritte per la prima volta nella collezione di 27 modelli di cristalli in lastre di vetro proposta nel catalogo del 1956,

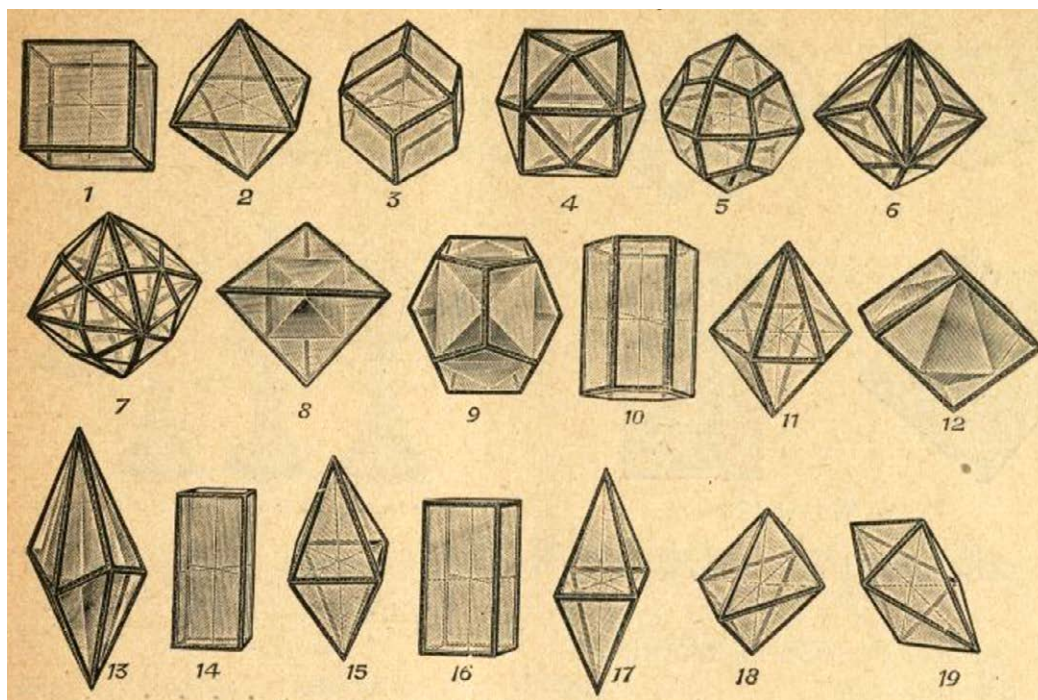


Fig. 7. Catalogo Sussidi didattici per le scienze naturali e l'agricola, G.B. Paravia & C., 1941. Collezione di 19 modelli di cristalli in lastre di vetro, p. 157.

ed illustrata con disegno in bianco e nero nella tavola n. 73 acclusa al catalogo del 1968 (fig. 8). Si deduce, pertanto, che nonostante i modelli esposti sono parte di una più ampia serie costituita da 25 o più modelli, costituiscono per il numero di esemplari disponibili una collezione di assoluta rarità.

### Modelli digitali e tangibili attraverso i metodi di rappresentazione cristallografici.

Durante le esperienze laboratoriali [6], gli autori hanno condiviso gli assunti teorici innanzi esposti con gli studenti attraverso modelli digitali e analogici al fine di approfondire le caratteristiche geometriche fondamentali dei solidi, tra la regolarità concreta dei cristalli e l'astrazione delle forme. I modelli digitali sono stati elaborati a confronto in specifici software di cristallografia geometrica; quelli analogici sono stati realizzati materialmente in aula ricomponendo i solidi sviluppati per dare consistenza plastica ai modelli digitali più complessi.

I software [7], gratuiti o open-source, hanno permesso agli studenti di approfondire in modo interattivo le specificità delle forme cristalline in base alla catalogazione per gruppo, sistema e classe oppure all'indicizzazione di William H. Miller (1801-1880) (figg. 9-11). In riferimento alla triplice catalogazione, inoltre, è stato possibile modellare "nuovi" cristalli modificando gli indici milleriani ovvero variando la direzione ortogonale ad uno specifico piano del reticolo cristallino, determinato nello spazio vettoriale.

Le interfacce grafiche dei vari software utilizzati presentano i cristalli in assonometria dinamica e talvolta nella rappresentazione 'a blocchi' di Haüy (1743-1822) e in anaglifi; quest'ultimi sono capaci – come è facile intuire – di esaltare l'apprendimento dello studente grazie alla percezione stereoscopica. Attraverso le tre rappresentazioni, in particolare, è possibile visualizzare in modo efficace gli assi, nei vari ordini, e i piani di simmetria dei solidi, ovvero alcune tra le caratteristiche geometriche fondamentali dei solidi, obiettivo didattico delle esperienze laboratoriali perché utili alla conoscenza critica delle forme plastiche con riflessi concreti nella progettazione.

In relazione al tema generale del convegno, è da sottolineare che René Just Haüy (1743-1822) nel suo *Traité de minéralogie* (1801) utilizzò per primo "la méthode des projections, en supposant le point de vue éloigné à l'infini" [Haüy 1801, pp. lv-lvi] [8] ovvero l'assonome-



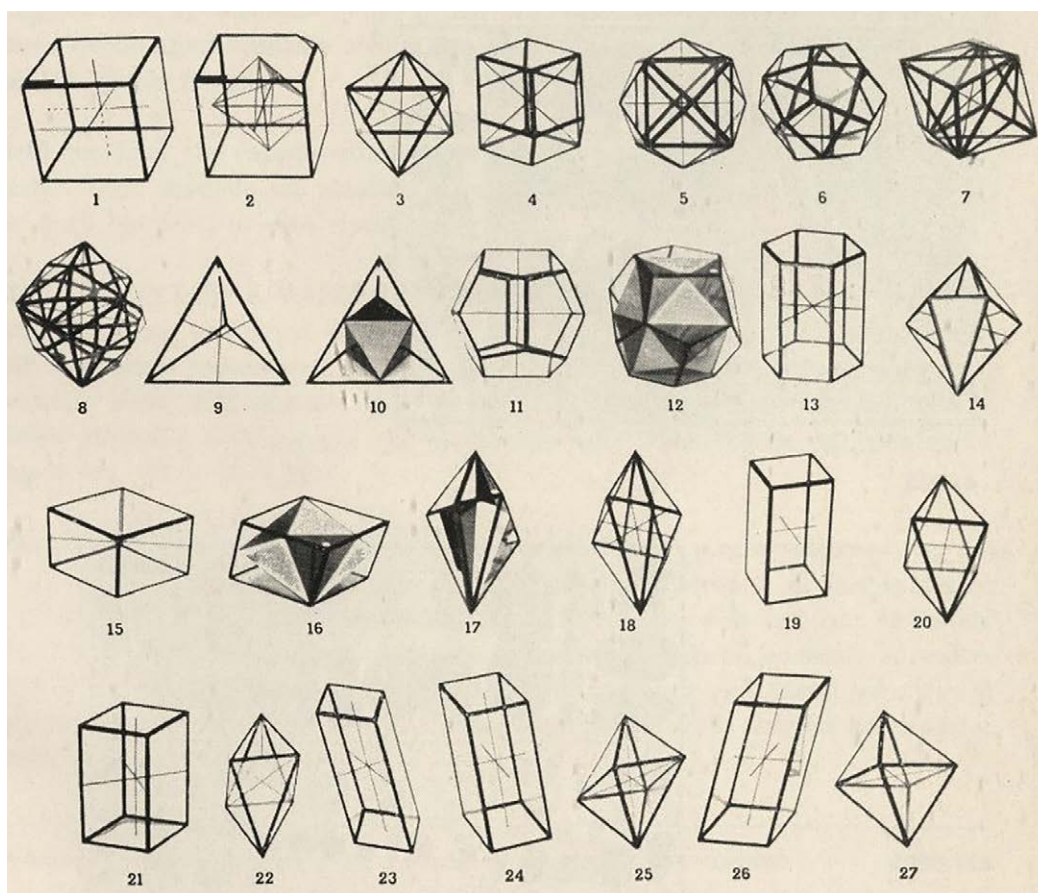


Fig. 8. *Catalogo Scienze naturali, agraria, tecno-merceologia, chimica*, G.B. Paravia & C., 1968. La collezione completa dei 27 modelli di cristalli in lastre di vetro, TAV. 73 (segue p. 82).

tria per la rappresentazione sistematica e rigorosa dei cristalli, variando il tipo di linea (continua o a tratti) per delineare gli spigoli rivolti o meno dall'*observateu* oppure per evidenziarne gli elementi geometrici fondamentali. La rappresentazione a blocchi, invece, fu ideata dallo stesso Haüy per illustrare in modo chiaro la sua teoria delle *molécules intégrantes* che determinano la forma del cristallo per giustapposizione geometrica di piccole "molecole" corrispondenti alla sua composizione chimica. Se da un verso questa teoria fu ben presto superata, aprì al concetto di "reticolo cristallino" di Auguste Bravais (1811-1863) e diede impulso alla realizzazione dei modelli lignei dei cristalli quale sussidio plastico dei trattati [9], esperienza già fatta da J. B. Rome de l'Isle per la *Cristallographie* (Parigi 1783).

Negli stessi software, le rappresentazioni pseudo-tridimensionali sono affiancate dallo stereogramma del cristallo, la rappresentazione piana più completa del solido e dei suoi elementi di simmetria attraverso una codifica simbolica, valida indipendentemente dalla sua conformazione regolare o meno. Come è noto, la composizione atomica di un cristallo è legata ai suoi elementi chimici, mentre la conformazione macroscopica, regolare o meno, dello stesso cristallo varia al variare delle caratteristiche ambientali; pertanto, queste ultime possono influenzare la dimensione del cristallo e non l'angolo diedro tra le sue facce. La proiezione stereografica è stata applicata ai cristalli proprio per rappresentarne gli spigoli e i vertici delle facce e le loro relazioni di simmetria; tra i primi a proporre questa rappresentazione fu Bravais. Il reticolo cristallino è posizionato nel punto centrale della sfera e le direzioni cristallografiche (spigoli e vertici) sono proiettate sulla superficie della sfera, dai poli opposti dell'asse principale verticale; lo stereogramma è dato dall'intersezione delle direzioni cristallografiche sul piano equatoriale [10].

I software di cristallografia geometrica hanno supportato ancora l'esperienza laboratoriale nella sua fase esperienziale: i principali modelli digitali sono stati sviluppati attraverso i software per poi essere ricomposti macroscopicamente in cartone, analogamente a quelli com-

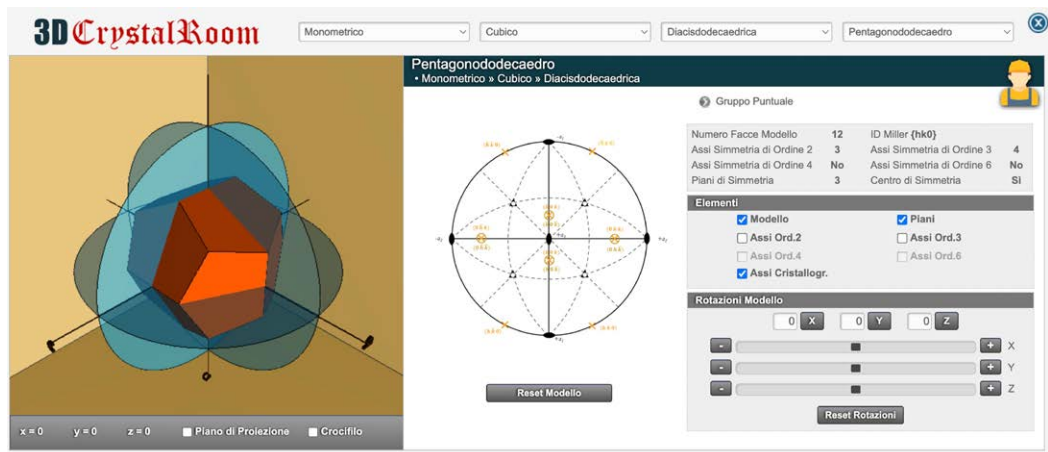


Fig. 9. La forma cristallina del pentagono-dodecaedro: modello digitale e stereogramma elaborati nel software 3DCrystalRoom (Università degli Studi di Bari). Elaborazione degli Autori, 2024.

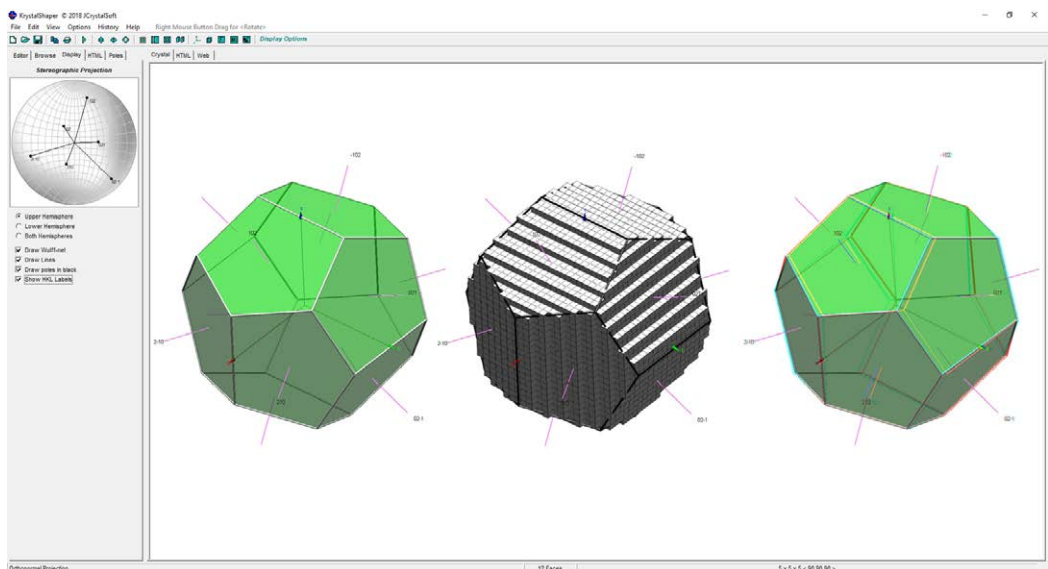


Fig. 10. La forma cristallina del pentagono-dodecaedro: stereogramma, modello digitale, modello a blocchi e anaglifi nel software KrystalShaper (CrystalSoft, 2018). Elaborazione degli Autori, 2024.

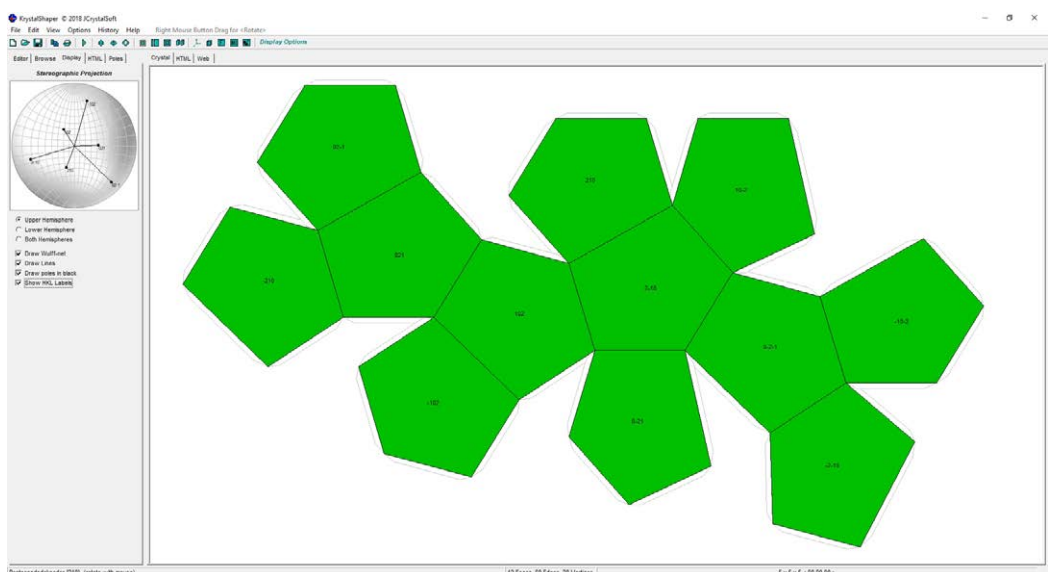


Fig. 11. La forma cristallina del pentagono-dodecaedro: stereogramma e sviluppo piano nel software KrystalShaper (CrystalSoft, 2018). Elaborazione degli Autori, 2024.

mercializzati ai primi del Novecento da Paravia. Questa esperienza ha evidentemente consolidato la conoscenza critica dei solidi complessi e delle precipue caratteristiche geometriche, come fu nelle intenzioni didattiche del prof. K.Vrba dell'Università di Praga nell'ultimo quarto dell'Ottocento, riprese e ampliate da F. Krantz attraverso la produzione dei sussidi didattici per le Scuole e le Università tedesche a partire dal 1895 [Krantz 1895].

## Conclusioni

Lo studio condotto sui modelli cristallografici fisici e digitali attraverso la letteratura scientifica di settore, gli esemplari didattici e i più recenti software di modellazione cristallografica conferma il ruolo centrale della geometria nel design del gioiello con specifico riferimento alle gemme tanto naturali quanto artificiali. La ricerca ha focalizzato l'attenzione sui principi geometrici invarianti che sottendono la struttura atomica delle gemme indipendente dalla loro origine sia essa naturale o artificiale.

Il mercato delle gemme naturali ri-sfaccettate e artificiali è in costante crescita per l'attenzione ai temi della sostenibilità. In notevole crescita sul mercato è la presenza di prodotti artificiali che presentano caratteristiche geometriche, fisiche e chimiche sempre più prossime a quelle degli analoghi naturali, fino ai prodotti *lab-grown* con caratteristiche del tutto analoghe a quelli estratti in miniera.

All'evoluzione in termini di sperimentazioni dei prodotti creati in laboratorio corrisponde un analogo avanzamento delle tecniche e degli strumenti di caratterizzazione e di valutazione della provenienza e qualità delle gemme analizzate. In questo scenario è proprio il consolidamento delle competenze geometriche che garantisce il controllo dei processi che guidano e stimolano le sperimentazioni formali per il progetto. Estendere tale approccio anche nella didattica accresce la consapevolezza critica dello studente verso i più ampi ambiti multiscalarari dall'architettura all'oggetto minimo.

## Note

[1] La presenza di modelli cristallografici è stata rintracciata nella collezione del Museo Michelangelo di Caserta, del Real Museo Mineralogico dell'Università degli Studi di Napoli "Federico II" e del Museo di Scienze della Terra del Dipartimento di Scienze della Terra e Geoambientali dell'Università di Bari. I 20 esemplari di modelli cristallografici presenti in quest'ultima collezione sono schedati e archiviati nel Catalogo Generale dei Beni Culturali. Fonte: <<https://catalogo.beniculturali.it>>.

[2] Il Museo, istituito nel 2004 con Delibera dell'allora Istituto Tecnico Statale per Geometri "Buonarroti", che ne è l'ente sovraordinato, è membro dal 2009 del Sistema Museale di Terra di Lavoro. L'esposizione dei pezzi della collezione, in continuo e costante incremento anche grazie alle donazioni di privati, è organizzata nelle sezioni mineralogia, topografia, storia della misura, calcolo, scrittura, meccanica, ripresa audio-video, storia del disegno, scienze pure e giardino delle macchine matematiche. La collezione di 15 modelli in vetro, esposta nella sezione mineralogia, è parte del patrimonio ricevuto nel 1963 dal "Buonarroti".

[3] Le forme cristallografiche sono articolate nei gruppi monometrico, dimetrico e trimetrico relativi agli angoli che gli assi cristallografici mutuamente formano tra loro.

[4] La letteratura in materia correntemente individua per i sette sistemi cristallini - cubico o tessulare, esagonale, tetragonale, rombico, monoclino, triclino e trigonale - in funzione delle classi di simmetria.

[5] La produzione messa in commercio dagli inizi del '900 dalla Ditta Paravia raggiunge un livello di precisione tecnica e scientifica tale da rispondere ai requisiti fissati dal Governo Nazionale con Regio Decreto n. 527 del 1927 per la preferenza ai prodotti nazionali. Per tale motivo nel 1936 la produzione Paravia ottiene da parte del Ministero delle Corporazioni il "riconoscimento di materiale completamente italiano" (prot. N. 5598/36), concorrendo per accuratezza e prezzo con la produzione delle ditte straniere che da decenni ha monopolizzato il mercato dei sussidi didattici in Italia e negli Stati Europei, ispirando probabilmente anche la produzione della Paravia durante i primi anni.

[6] Le esperienze didattiche sono state condotte nel Laboratorio di Disegno parametrico del design svolto da Argenziano P, Avella A. e Pisacane N. nel Dipartimento di Architettura e Disegno Industriale dell'ateneo vanvitelliano.

[7] Tra i vari software sperimentati si segnalano: JCrystal, KrystalShaper, WinWULFF e 3DCrystalRoom dell'Università degli Studi di Bari Aldo Moro.

[8] Nel *Traité de minéralogie*, l'autore condivide le scelte grafiche con l'ingegnere minerario Tremery, mentre gli autori dei disegni sono: "Cordier, Lefroy, Gallois, Houry, Depuch, Cressac, Ducros et Héricart" [Haüy 1801, pp. I-II]. Precedenti usi isolati dell'assonometria per la rappresentazione dei cristalli sono in [Haüy 1784, Planche I] e nell'*Encyclopedie sub voce Crystallisations* (planche VI, n.8, *Crystal d'Islande*).

[9] Tutti i cristalli disegnati nelle tavole del trattato di Haüy furono concretizzati in modelli lignei in scala ad opera di Pleuvin e Journy [Haüy 1801, p. Ivi].

[10] I simboli X e O identificano rispettivamente le direzioni cristallografiche proiettato dallo zenit e dal nadir: Gli assi e i piani di simmetria hanno altri specifici simboli.

## Crediti

Gli autori hanno progettato la ricerca e condiviso la sua metodologia e i suoi contenuti. In particolare, il paragrafo *Dall'astrazione geometrica alla classificazione scientifica dei cristalli* è curato da Nicola Pisacane, il paragrafo *Analisi delle forme cristallografiche tra collezioni museali e iconografia dei cataloghi* è curato da Alessandra Avella e il paragrafo *Modelli digitali e tangibili attraverso i metodi di rappresentazione cristallografici* è curato da Pasquale Argenziano. L'*Introduzione* e le *Conclusioni* sono curate da tutti gli autori.

## Riferimenti bibliografici

<<https://catalogo.beniculturali.it>> (consultato il 20 maggio 2024)

<<http://www.geo.uniba.it/utility/crystalroom/>> (consultato il 20 maggio 2024).

<<http://www.jcrystal.com/products/krystalshaper/index.htm>> (consultato il 20 maggio 2024).

Anonimo (1980). *Scienze Naturali*. Torino: G. B. Paravia & C.

Argenziano P, Avella A., Pisacane N. (2022). Il disegno delle gemme sfaccettate. Fonti iconografiche e trattatistica, analisi geometrica, rilevamento, modellazione parametrica/Faceted gemstones drawing. Iconographic and treatise sources, geometric analysis, survey, parametric modelling. In Battini C., Bistagnino E. (a cura di). *Dialoghi. Visioni e visualità. Atti del 43° Convegno Internazionale dei Docenti delle Discipline della Rappresentazione/Dialogues. Visions and visuality. Proceedings of the 43rd International Conference of Representation Disciplines Teachers*. Genova, 15-16-17 settembre 2022, pp. 2036-2057. Milano: FrancoAngeli.

AA.VV. (1932). *Catalogo dei sussidi didattici per l'insegnamento delle scienze naturali, pubblicazione semestrale n. 274*. Torino: G. B. Paravia & C.

AA.VV. (1951). *I cataloghi della rinascita. Materiali didattici. Parte seconda. Anatomia – Igiene zoologia – Botanica – Agraria – Mineralogia – Cristallografia – Geologia – Microscopia – Etnografia – Tecnologia e Merceologia*. Torino: G. B. Paravia & C.

AA.VV. (1987). *Chimica, Biologia, Scienza della Terra. Catalogo generale*. Torino: G. B. Paravia & C.

AA.VV. (1959). *Materiali, Sussidi didattici e scientifici per le Scuole di avviamento professionale e Scuole tecniche di ogni tipo*. Torino: G. B. Paravia & C.

AA.VV. (1917). *Materiali e sussidi didattici per l'insegnamento della storia naturale e dell'agricoltura*, n. 151. Torino: G. B. Paravia & C.

AA.VV. (1956). *Scienze Naturali – Agraria -Tecnomerceologia – Chimica*. Torino: G. B. Paravia & C.

AA.VV. (1968). *Scienze Naturali – Agraria -Tecnomerceologia – Chimica*. Torino: G. B. Paravia & C.

AA.VV. (1942). *Scienze Naturali - Fisica – Chimica. Collezioni e gabinetti*, n. 391. Torino: G. B. Paravia & C.

AA.VV. (1941). *Sussidi didattici per le scienze naturali e l'agricoltura*, n. 369. Torino: G. B. Paravia & C.

Di Lorenzo P. (2018). Strumenti scientifici e costruttori del Museo "Nevio": didattica e ricerca a Santa Maria Capua Vetere dal 1863. In *Rivista di Terra di Lavoro*. Anno XIII, n. 2, pp. 230-297 <<https://ascaserta.cultura.gov.it/fileadmin/risorse/Rivista/20-07.pdf>> (consultato il 20 maggio 2024).

Di Lorenzo P. (2020). La sezione di scienze pure del Museo Michelangelo: strumenti, costruttori e dubbi catalografici. In *Rivista di Terra di Lavoro*. Anno XV, n. 2, pp. 202-257 <[https://ascaserta.cultura.gov.it/fileadmin/risorse/Rivista/DiLorenzo\\_Nuovi\\_elementi\\_MuseoMichelangelo.pdf](https://ascaserta.cultura.gov.it/fileadmin/risorse/Rivista/DiLorenzo_Nuovi_elementi_MuseoMichelangelo.pdf)> (consultato il 20 maggio 2024).

Haüy R. J. (1784). *Essai d'une théorie sur la structure des cristaux, appliquée à plusieurs genres de substances cristallisées*. Paris: de la Rochelle.

Haüy R. J. (1801). *Traité de minéralogie*. Paris.

Krantz F. (1895). *Katalog einer Sammlung von 280 Krystall-Modellen aus Pappe zum Gebrauche bei Vorlesungen über Mineralogie und Krystallographie an Hochschulen*. Bonn: Gymnasien und Realschulen.

Máthé K., Szirmai J. (2020). Optimal Cells in Crystallography and Arts. In *Journal for Geometry and Graphics*. Volume 24, No. 1, pp. 103–124.

Monno A. (2019). Il Museo di Scienze della Terra dell'Università degli Studi di Bari: attività di ricerca e diffusione della cultura scientifica. In Monno A. (a cura di). *Musei in Puglia. Tradizione e Futuro*. pp. 185-192. Galatina: Mario Congedo.

Mottana A., Crespi R., Liborio G. (1977). *Minerali e rocce*. Milano: Mondadori.

Pisacane N., Argenziano P., Avella A. (2021). Dalla stereotomia, spunti per il disegno delle gemme. Insights into the gems' drawing from stereotomy. In Jacuzzi D., Morelli M. D. (a cura di). *Gemme e Gioielli: Storia e Design*, n. 0, pp. 68-69. Aversa: DADI Press.

Pisacane N., Argenziano P., Avella A. (2023). Gems Geometry: From Raw Structure to Precious Stone. In Cheng L.-Y. (a cura di). *ICGG 2022. Proceedings of the 20th International Conference on Geometry and Graphics*. San Paulo, 15-19 agosto 2022, pp. 497-508. Cham: Springer.

Pisacane N., Argenziano P., Avella A. (2023)b. Modellazione parametrica delle gemme dall'Encyclopedie. Analisi geometrica e criticità morfologiche./Parametric Modeling of Gemstone from the Encyclopedie. Geometric Analysis and Morphological Problems. In Cannella M., Garozzo A., Morena S. (a cura di). *Transizioni. Atti del 44° Convegno Internazionale dei Docenti delle Discipline della Rappresentazione/Transitions. Proceedings of the 44th International Conference of Representation Disciplines Teachers*. Palermo, 14-15-16 settembre 2023. Milano: FrancoAngeli.

Portoghesi P. (1999). *Natura e architettura*. Milano: Skira.

Rome de l'Isle J. B. (1783). *Cristallographie*. Paris: de l'Imprimerie de Monsieur.

Sansoni F. (1892). *Cristallografia geometrica, fisica e chimica applicata ai minerali*. Milano: Hoepli.

Wade D. (2015). *Geometria Fantastica. I poliedri e l'immaginario artistico nel Rinascimento*. Milano: Sironi.

#### **Autori**

*Alessandra Avella*, Università della Campania Luigi Vanvitelli, [alessandra.avella@unicampania.it](mailto:alessandra.avella@unicampania.it)

*Nicola Pisacane*, Università della Campania Luigi Vanvitelli, [nicola.pisacane@unicampania.it](mailto:nicola.pisacane@unicampania.it)

*Pasquale Argenziano*, Università della Campania Luigi Vanvitelli, [pasquale.argenziano@unicampania.it](mailto:pasquale.argenziano@unicampania.it)

*Per citare questo capitolo: Alessandra Avella, Nicola Pisacane, Pasquale Argenziano (2024). Disegno, modelli, invarianti geometriche delle forme cristalline verso la sostenibilità nel design del gioiello/Drawing, models, geometric invariants of crystalline shapes towards sustainability in jewellery design. In Bergamo F., Calandriello A., Ciammaichella M., Friso I., Gay F., Liva G., Monteleone C. (a cura di). Misura / Dismisura. Atti del 45° Convegno Internazionale dei Docenti delle Discipline della Rappresentazione/Measure / Out of Measure. Transitions. Proceedings of the 45th International Conference of Representation Disciplines Teachers. Milano: FrancoAngeli, pp. 765-790.*

# Drawing, models, geometric invariants of crystalline shapes towards sustainability in jewellery design

Alessandra Avella  
Nicola Pisacane  
Pasquale Argenziano

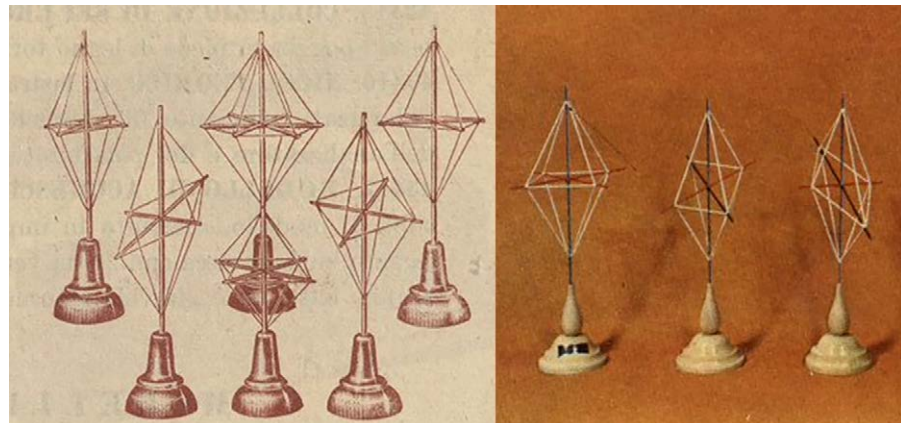
## Abstract

For several years, the theme of sustainability has also affected the gemmological field with experiments that are revolutionizing the jewellery market. Lab-grown gemstones compete with similar gemstones extracted from nature. This context has guided the present research by advancing the theme of the design of faceted gems, the first results of which have already been the subject of scientific contributions by the authors in the previous editions of the UID Conference.

Having assumed the statements of geometric crystallography on the analogy of the spatial configurations of both natural and artificial crystals, the research deepens the geometry of crystallographic forms through the analysis of tangible and digital models, including museum collections, iconography of catalogues and laboratory teaching experiences. The analysis made use of models in glass plates exhibited at the Michelangelo Museum in Caserta compared with the specimens belonging to the illustrated collections and described in the catalogues of the educational material of the historic Paravia publishing house in Turin and the most recent digital tools for modelling in the crystallographic field with applications also extended to teaching.

## Keywords

Geometric crystallography, crystallographic models, artificial gems, Paravia, educational museums.



The six basic shapes  
of crystallization systems;  
sepia drawing and photo-  
graph; detail [A.A.V.V.  
1951, Anonymous 1980].

## Introduction

This paper presents the research advancement on the modelling of faceted gems with specific focus on the cutting of synthetic gems and the optimization of existing ones, in terms of sustainability. Producing gems in the laboratory or re-faceting natural ones means reducing mining, which during the Twentieth century recorded a significant ecological footprint [Pisacane et al. 2023b, pp. 1874-1895]. In both cases, the geometric principles that govern the control of atomic structure fall within the branch of crystallography called 'geometric' because it studies the different spatial configurations of crystals of the same substance, whether organic or inorganic, regardless of their natural or artificial origin; this branch is distinct from 'physical crystallography' and 'chemical crystallography' which delve into other characteristics and properties of crystals [Sansoni 1892, pp. XII-XIII].

The study of the geometry of crystals has led this research to in-depth studies on the

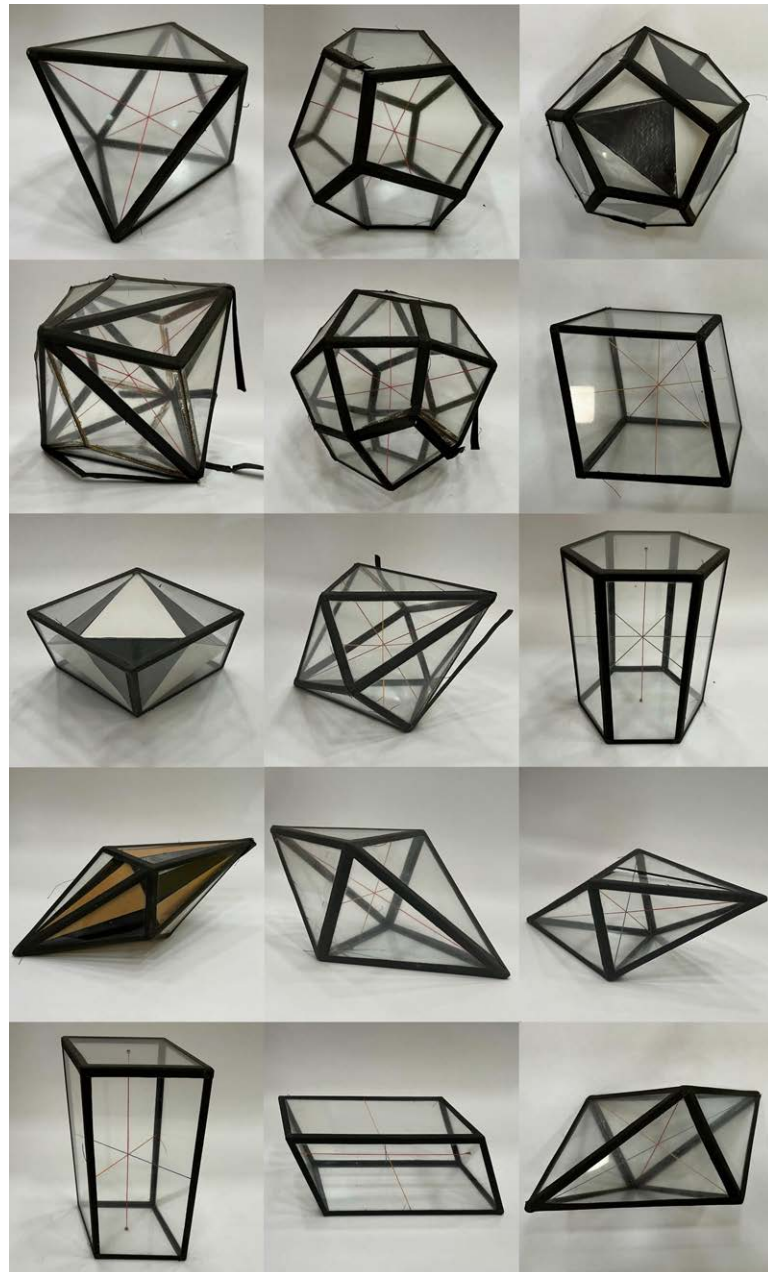


Fig. 1. Set of 15 crystallographic models in glass plates with crystallographic axes in colored silk thread and hemihedral shapes in cardboard. Michelangelo Museum Collection, Caserta. Photos by the Authors, 2024.

theoretical assumptions of polyhedral forms and their spatial configuration, also through the aid of models. Tangible models have always been useful teaching tools to bring the student closer to the understanding of the spatial relationships underlying shapes, even in the case of crystallography. Until the mid-Twentieth century, tangible crystallographic models supported teaching in both schools and universities and were gradually replaced by digital ones. These tangible models are part of museum collections [1] and constitute a significant heritage aimed at preserving the memory of teaching methods and materials of the culture of Italian education. This research, starting from the study of the crystallographic models kept at the Michelangelo Museum in Caserta [2], has as its targets: the systematization of crystallographic forms and underlying geometric relationships; the comparative analysis of the models described and illustrated in the catalogues of teaching materials and aids of the historic Paravia publishing house in Turin; the didactic sharing of theoretical assumptions through digital and tangible models and their crystallographic representations.

### From geometric abstraction to the scientific classification of crystals

Among the crystallographic models on display at the Michelangelo Museum in Caserta, the research examines the 15 glass specimens exemplifying the fundamental forms (fig. 1), within the larger collection of natural objects, scientific instruments, technological apparatuses, and didactic-scientific models.

The 15 crystallographic models were sorted and classified in (fig. 2): each of them was assigned to the group, the system and the crystallographic class. The presence of silk thread axes, their number and colour according to the crystalline group or the respective hemihedral cardboard form are indicated for each crystallographic model. The table also compares the glass models on display in Caserta with those shown in the Paravia catalogues (with specific reference to the 1932 edition) also through the photographic images of the models and illustrations included in the catalogue. Finally, a comparison between the scientific name of the crystalline form and its indication in the catalogue highlights some differences in the nomenclature.

In the glass models, shapes belonging to the three crystallographic groups [3] and to all crystallographic systems are identifiable. The classification of systems refers to the polyhedral shape of the primitive unit cell, with respect to which the atoms of each crystal are aggregated. With respect to this classification, it should be emphasized that the crystallographic models produced by Paravia are divided into six systems and not into seven [4]. The six classes branching, which merges the trigonal and hexagonal systems, was probably proposed by Paravia for didactic simplification. In this regard, it is interesting to point out

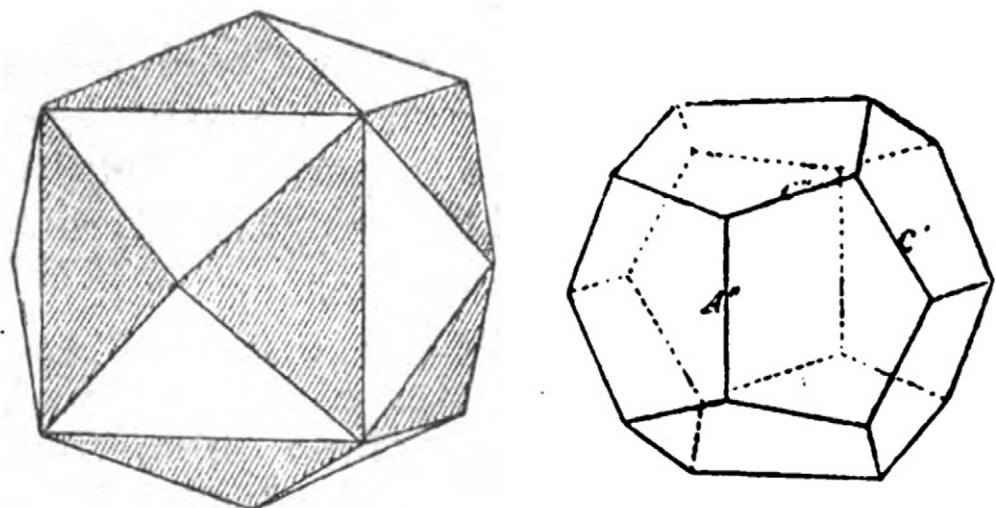


Fig. 2. The tetrakisahedron subjected to hemihedral of the pentagonal-dodecahedron illustrated in figs. 68 and 69 of Francesco Sansoni's treatise, *Cristallografia geometrica, fisica e chimica applicata ai minerali*, 1892.



that among the teaching aids produced by Paravia, starting from the 1932 catalogue, there are also available 'the six fundamental forms of crystallization systems – Painted iron wire models: in red the corners, in white the axes'. The analysis of the image of these models, included in the catalogue, shows that the trigonal system is excluded among the crystallographic systems.

Twelve models, among the fifteen ones focus of this research, have silk threads of one, two or three colours for the materialization of the direction of the crystallographic axes; while only three models have the complementary hemihedral shape in cardboard inscribed in the glass polyhedron. The shapes belonging to the monometric group have red monochromatic threads, mutually orthogonal, whose intersections identify the centre of the crystal, consistent with the group to which they belong.

The models belonging to the dimetric group have double-coloured threads (red/yellow or red/green). Specifically, the models belonging to the tetragonal system have one red wire and two green wires, while the models belonging to the hexagonal system have one red wire and three yellow ones, incidental to each other, coplanar and of equal length. The models belonging to the trimetric group have threads of three colours (blue/yellow/red or green/yellow/red), incident in the centre of the crystal, always forming angles other than the right one.

GROUP	SYSTEM	CLASS	CRYSTAL FORM (glass)	HEMIHEDRAL CRYSTAL FORM (paper)	CRYSTAL FORMS (from Paravia catalogue, 1956)	CRYSTAL AXIS	CRYSTAL FORM PHOTOS (Museo Michelangelo collection)	CRYSTAL FORM IMAGES (from Paravia catalogue, 1932)
Monometric	Cubic	Esacisottaedrica	Ottaedro		Ottaedro con assi interni	•••		
		Diacisdodecaedrica	Pentagono-dodecaedro		Pentagonododecaedro con assi interni	•••		
		Diacisdodecaedrica	Pentagono-dodecaedro	Tetracisesaedro	Pentagonododecaedro con tetracisesaedro incluso			
		Esacisottaedrica	Triacisottaedro		Triacisottaedro con assi interni	•••		
		Esacisottaedrica	Icositetraedro		Icositetraedro con assi interni	•••		
Dimetric	Hexagonal	Scalenoedrica ditrigonale	Romboedro		Romboedro con assi interni	•••••		
		Scalenoedrica ditrigonale	Romboedro	Bipiramide esagonale	Romboedro con piramide esagonale inclusa			
		Bipiramidale diesagonale	Bipiramide esagonale		Bipiramide esagonale	•••••		
		Bipiramidale diesagonale	Prisma esagonale		Prisma esagonale	•••••		
	Scalenoedrica ditrigonale	Scalenoedro	Bipiramide dodecagonale	Scalenoedro con bipiramide inclusa				
Trimetric	Orthorhombic	Bipiramidale rombica	Rombottaedro		Bipiramide rombica con assi interni	•••••		
		Bipiramidale rombica	Prisma rombico		Prisma rombico con assi interni	•••••		
	Monoclinic	Prismatica	Prisma monoclinico		Prisma monoclinico con assi interni	•••••		
	Triclinic	Pediale	Ottaedro triclinico		Ottaedro triclinico	•••••		

Fig. 3. Crystallographic forms in glass plates kept at the Michelangelo Museum in Caserta. Classification of the 15 models with indication of the group, crystallographic system and class to which they belong, scientific name of the shape and designation indicated in the Paravia catalogue of 1956, specification of the crystallographic axes, photographic image of the models and image of the homologous shape from the Paravia catalogue of 1932. Elaboration by the Authors, 2024.

The three models that include the complementary shapes in cardboard are examples of some of the hemihedral forms, which allow some basic shapes to be derived from others, halving the number of faces. About the pentagon-dodecahedron, which includes the tetra-crysaedron, and the rhombohedron, which includes a double pyramid with a hexagonal base, the comparison with the homologous models with silk thread axes, also available in the museum's collection, certainly provided a useful teaching aid and allowed further geometric considerations on these crystallographic forms (fig. 3).

### Analysis of crystallographic models between museum collections and iconography of catalogues

The models on display have been attributed to Paravia, the historic Turin publishing house, [Di Lorenzo 2020, pp. 232-233] which between the early 1900s and the 1980s produced teaching materials and aids for schools, completely made in Italy [5], relating to various disciplines, including natural sciences. Teaching materials and aids for the teaching of natural sciences are presented in the Historical Catalogues of the Paravia collection published between 1917 and 1987, of which the category relating to mineralogy, geology and crystallography has been deepened for the research discussed here (fig. 4). In the specific crystal-

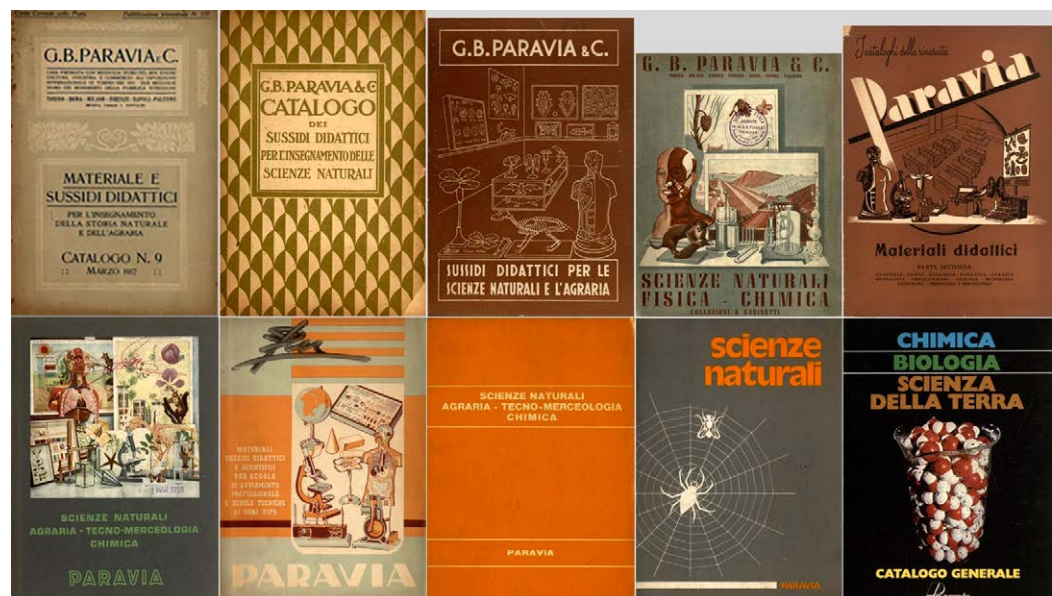
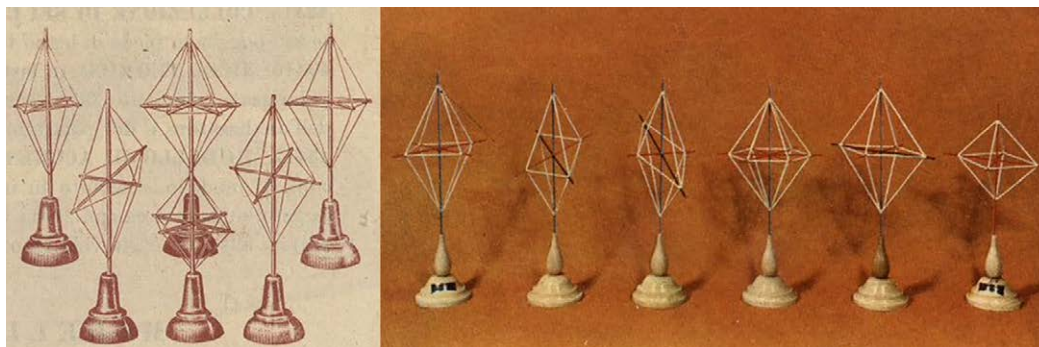


Fig. 4. Catalogues of teaching aids for the teaching of Natural Sciences, G.B. Paravia & C., Covers, editions of 1917, 1932, 1941, 1942, 1951 (top from left to right), 1956, 1959, 1968, 1980, 1987 (bottom from left to right).

lography section, various collections of crystallographic models and the six basic forms of crystallization systems are offered for sale (fig. 5). Only in the 1917 edition are the wall tables of simple and derived forms of crystallographic systems and cardboards for the geometric development of models included among the teaching aids. The sale of cardboards for the construction of polyhedral configurations of the main crystallographic forms starting from their flat development confirms the central role that geometry also has for the teaching of this discipline. The school system to which the production of Paravia is addressed adapts to the provisions of the government power in force and to the related school system. Paravia products, therefore, conform to the ministerial programs that have followed one another over time, as explicitly stated in the introductory pages of some Catalogues.

From the comparison among the glass models published in the Catalogues and those of the Michelangelo Museum, for which there is no declared attribution of each specimen to the

Fig. 5. The six basic shapes of crystallization systems. Sepia drawing (left), Didactic Materials Catalogue. Part Two, G.B. Paravia & C. 1951, p. 65; Colour photograph (right), Natural Sciences Catalogue. Human Anatomy, Zoology, Botany, Geography, Agriculture, Techno-Commodities, G.B. Paravia & C. 1980, p. 146.



respective denomination of the crystalline shape, it was possible to compare the individual shapes, verify them geometrically, and hypothesize the dating of the specimens on display. A preliminary operation to the comparative analysis was the identification of the shapes of the 15 models exhibited because of their respective configuration characteristics, deduced from the geometric evidence of each shape in relation to the number of faces of the polyhedron, the shape of the individual polygons constituting the faces and their reciprocal position in space, dihedral angles between the same faces, planes and axes of symmetry. In the present collection, an octahedron, a pentagon-dodecahedron, a pentagon-dodecahedron with tetra-cisahedron included (cardboard), a triacysoctahedron and an icositetrahedron have been identified, which are part of the cubic system due to the presence of three crystallographic axes mutually orthogonal to each other; a rhombohedron, a rhombohedron with the hexagonal pyramid included (cardboard), a hexagonal bipyramid, a hexagonal prism and a scalenohedron which, due to the presence of a hexagonal shape in the same polyhedron or in its hemihedral form, fall within the hexagonal system; a squaretophedron that fall within the tetragonal or dimetric system given the configuration of the triangular faces of the two pyramids with a common square base; a rhombottahedron and a rhombic prism that fall under the homonymous system given the rhombic shape of the base polygon; a monoclinic prism or oblique prism with a rhomboidal base that falls within the monoclinic system given the non-orthogonal direction of the edges; and, finally, a triclinic octahedron or oblique double pyramid with a rhomboidal base that is part of the triclinic system since it does not respect any geometric principle found in the previous forms [Haüy 1784].

To proceed with the comparative analysis, the data relating to the crystallographic models of the Paravia have been included in an *ad hoc* structured table in which each Catalogue, in chronological order of publication, is associated with significant analytical data for the characterization of the models (fig. 6). As far as the title and date of publication of the Catalogues are concerned, it is possible to make a distinction between those published before and after the Catalogues published in the decade 1943-1953, called by the same publishing house *The Catalogues of the Rebirth*. The Category and Section of reference are generally *Mineralogy, Geology, Paleontology and Crystallography* and *Models of crystallographic forms*. Of the Collections or Series of models in each Catalogue, the following are reported, where indicated: the material with which the pieces are made (glass, wood, wire, hard glass and cardboard); the number of pieces; the dimensions of the single piece expressed in millimeters or centimeters or proportionally derivable from the measurement of the side of the cubic shape; the description of the forms with an indication of the group and the crystallographic system to which they belong; the presence or absence of a box in which they are collected; the photographic image or drawing of the collection; the list price; the Catalog page. The iconographic apparatus, which illustrates the Collections or the individual models, follows the typographic layout of the series to which the Catalogue in which they are presented belongs. In the Catalogues, published from 1917 to 1942, the images, mainly drawings and photographs in black and white (fig. 7), are inserted like the text in the layout grid; in the 1951 Catalogue, which belongs to the series of *Catalogues of the Rebirth*, the typographic layout does not change, but the drawings and photographs are sepia-toned. In

TITOLO	DATA CATEGORIA	DESCRIZIONE CATEGORIA	DESCRIZIONE CATEGORIA	COLLEZIONARE	MATERIALE PREZZI	NUMERO DI PEZZI	DESCRIZIONE PREZZI	DESCRIZIONE IN FORME	CONTENITORE CASSETTA	IMMAGINE	PREZZO	PAGINA
Materiale e sussidi didattici per l'insegnamento della storia naturale e dell'agricoltura	1917	Mineralogia, Geologia e Paleontologia	Modelli di forme cristallografiche	Collezione di 52 pezzi secondo ROTHÉ  Cartoni per sviluppi geometrici dei modelli in legno Serie massima 50 pezzi Collezione di 15 pezzi: forme principali di tutti i sistemi costruiti con lastre di vetro; con inclusi gli assi e la forma fondamentale in cartone. Collezione di 29 modelli	legno cartone vetro	52 50 15	mm. 70x100	assente presente assente	NO NO NO	NO SI SI	L.80 L.4 L.140 L.110	66 67 66 67
Catalogo dei sussidi didattici per l'insegnamento delle scienze naturali	1932	Mineralogia, Geologia e Paleontologia	Modelli cristallografici e cristalli naturali	Collezione di modelli di cristalli in legno. Serie di 52 modelli in cassetta rappresentanti le forme principali semplici e composte. Serie di 52 modelli in cassetta. Collezione di 53 modelli in cartone formato grande. Sistemimonometrico, tetragonale, esagonale e romboidale, rombico e trimetrico, monoclinico, triclino.  Collezione di 15 modelli di cristalli, in lastre di vetro, con gli assi in filo di seta colorato. Collezione di modelli di cristalli, in lastre di vetro cogli assi in filo di seta colorato, costituita da 19 forme  Collezione di 25 cristalli in vetro, con assi interni rappresentati da fili tesi e di colorazione diversa per i diversi assi, oppure colle forme identiche in cartone nell'interno (la Collezione non è suddivisibile)	legno cartone vetro vetro vetro	52 53 [32 (forme della collezione in legno) +1 (bipiramide dodecaedrica)] 15 19 [15 forme della collezione in vetro + 4 (Tetracisaedro, icosaedro, esicosaedro, pentagono dodecaedro col tetracisaedro incluso (in cartone)] 25	Spigolo del cubo circa 3 volte quello dei modelli in legno  presente	presente NO NO	NO NO NO	SI NO SI	L.400 L.400 L.340 L.430	95 96 96 96
Sussidi didattici per le scienze naturali e l'agricoltura	1941	Mineralogia, metalografia, cristallografia, geologia e paleontologia	Modelli cristallografici	Cristalli in legno, modelli rappresentanti le forme principali semplici e composte. Serie di 52 modelli in cassetta. Cristalli in legno, modelli in formato un po' maggiore del precedente. Serie di 29 modelli. Collezione di 53 modelli in cartone, formato grande.  Collezione di 53 modelli in cartone, formato grande con spigoli in rosso per maggior risalto del cristallo.  Collezione ridotta di 21 modelli in cartone, formato grande, rappresentante le forme principali dei 6 sistemi cristallini con gli spigoli in rosso per dare maggior risalto al cristallo. Collezione di 15 modelli di cristalli, in lastre di vetro con gli assi in filo di seta colorato. Collezione di modelli di cristalli, 19 forme, in lastre di vetro cogli assi in filo di seta colorato	legno legno cartone cartone cartone vetro vetro	52 22 53 (forme della collezione da 52 modelli in legno + bipiramide dodecaedrica) 53 (forme della collezione da 52 modelli in legno + bipiramide dodecaedrica) 21 21 15 19 [15 (forme della collezione in vetro + 4 (Tetracisaedro, icosaedro, esicosaedro, pentagono dodecaedro col tetracisaedro incluso (in cartone)]	Lo spigolo del cubo è circa 3 volte quello dei modelli in legno.  presente	assente presente	SI NO	SI SI	L.175 L.130 L.500 L.500 L.205 L.305 L.420 L.830	155 155 156 156 156 156 157 157
Scienze naturali, fisica, chimica. Collezioni e Gabinetti. Listino prezzi	1942	Scienze Naturali	Cristallografia, Mineralogia, Geologia	Serie di 52 forme cristallografiche in legno, comprendenti cristalli dei sistemi principali, con forme semplici e composte. La serie è racchiusa in cassetta di legno doppia. Serie di 19 forme cristallografiche in lastre di vetro con assi interni in filo di seta colorato.	legno vetro	52 19		assente	SI	SI		10
Materiale didattico. Parte seconda. I Cataloghi della rinascita	1951	Mineralogia, metalografia, cristallografia, geologia e paleontologia	Modelli cristallografici	Collezione di 52 modelli di cristalli in legno, rappresentanti le forme principali semplici e composte. In cassetta di legno. Collezione di 22 modelli di cristalli in legno, rappresentanti le forme principali semplici e composte. Collezione di 19 modelli di cristalli, in lastre di vetro, con gli assi in filo di seta colorato	legno legno vetro	52 22 19	Dimensioni del cubo cm. 10 di lato; le altre forme in proporzione.	assente assente presente	SI NO SI	SI NO SI		64 64 64
Scienze naturali, agraria, tecno-merceologia, chimica	1956	Mineralogia e Cristallografia	Modelli cristallografici	Collezione di 52 modelli di cristallo in legno, rappresentanti le forme principali semplici e composte. In cassetta di legno a due ripiani, con divisioni all'interno. Collezione di 22 modelli di cristallo in legno, in cassetta a coperchio scorrevole e divisioni interne. Collezione di 27 modelli di cristalli, in lastre di vetro, con gli assi in filo di seta colorato o forme emedriche incluse.	legno vetro vetro	52 22 27	cubo di circa cm. 12 di lato; le altre forme in proporzione	assente presente	SI NO	SI SI	35.200 15.150	79 79 79
Materiale sussidi didattici e scientifici	1959	Geologia, cristallografia, mineralogia	Modelli cristallografici	Cristalli in legno: serie di 52 modelli in cassetta, rappresentanti le forme principali, semplici e composte. Cristalli, in legno: serie di 22 modelli in cassetta. Collezione di 52 modelli di cristalli in legno rappresentanti le forme principali semplici e composte. In cassetta di legno a due ripiani, con divisioni all'interno. Collezione di 27 modelli di cristalli, in lastre di vetro, con gli assi in filo di seta colorato o forme emedriche incluse.	legno legno legno vetro	52 22 52 27	Dimensioni del cubo circa cm. 12 di lato; le altre forme in proporzione	assente assente assente presente	SI NO	SI NO		97 97 79 79
Scienze naturali, agraria, tecno-merceologia, chimica	1969	Mineralogia e cristallografia	Modelli cristallografici	Collezione di 52 modelli di cristalli in legno, rappresentanti le forme principali semplici e composte. In cassetta di legno a due ripiani, con divisioni all'interno. Collezione di 22 modelli di cristalli in legno, in cassetta a coperchio scorrevole e divisioni interne.	legno legno	52 22		assente	SI	NO		148
Scienze naturali, agraria, tecno-merceologia, chimica	1980	Scienza della Terra e dell'Universo	Mineralogia e cristallografia	Collezione di 52 modelli di cristalli in legno, rappresentanti le forme principali semplici e composte. In cassetta di legno a due ripiani, con divisioni all'interno. Collezione di 22 modelli di cristalli in legno, in cassetta a coperchio scorrevole e divisioni interne.	legno legno	52 22		assente	SI	NO		148
Chimica, biologia, scienza della terra	1987	Scienza della Terra e dell'Universo	Mineralogia e cristallografia	Collezione di 52 modelli di cristalli in legno, rappresentanti le forme principali semplici e composte. In cassetta di legno a due ripiani, con divisioni all'interno. Collezione di 22 modelli di cristalli in legno, in cassetta a coperchio scorrevole e divisioni interne.	legno legno	52 22		assente	SI	NO		148

Fig. 6. Crystallographic models in the Catalogues of material and teaching aids for the teaching of Natural Sciences of the publishing house G.B. Paravia & C., editions from 1917 to 1987. Elaboration by the Authors, 2024.

the following catalogues, the images are composed on double-sided colour or black and white plates, on pages outside the text. The last two editions of 1980 and 1987 had a new typographic layout designed to facilitate the consultation of the products on sale, with the illustrations almost always in colour laid out in direct correspondence with the reference texts. The detail of the images of the models presented is treated with particular attention also to avoid any sampling, i.e. the shipment on request of the items as a sample for choice. A comparison among the glass models presented in the Catalogues and the 15 specimens in the Michelangelo Museum shows that the latter do not belong to the complete series of 15 models of crystallographic forms in the 1917 and 1932 catalogues, missing from this series the cube, the rhombododecahedron, the triakisoctahedron, the tetrahedron with the octahedron included (cardboard), the square-based prism and the monoclinic octahedron. They could be part of the collection of 29 models proposed in the 1917 catalogue of which no specific description is given. The models on display cannot even belong to the complete series of 19 models in the catalog since 1932 which integrates the series of 15 models with the shapes of the tetracisaedron, the hexacisoctahedron, the icosaedron and the pentagon-dodecahedron with the tetracisaedron included (cardboard) because of these four only the last two are present among the models in the museum. The shapes of the pentagon-dodecahedron with axes, the rhombohedron with axes and the monoclinic

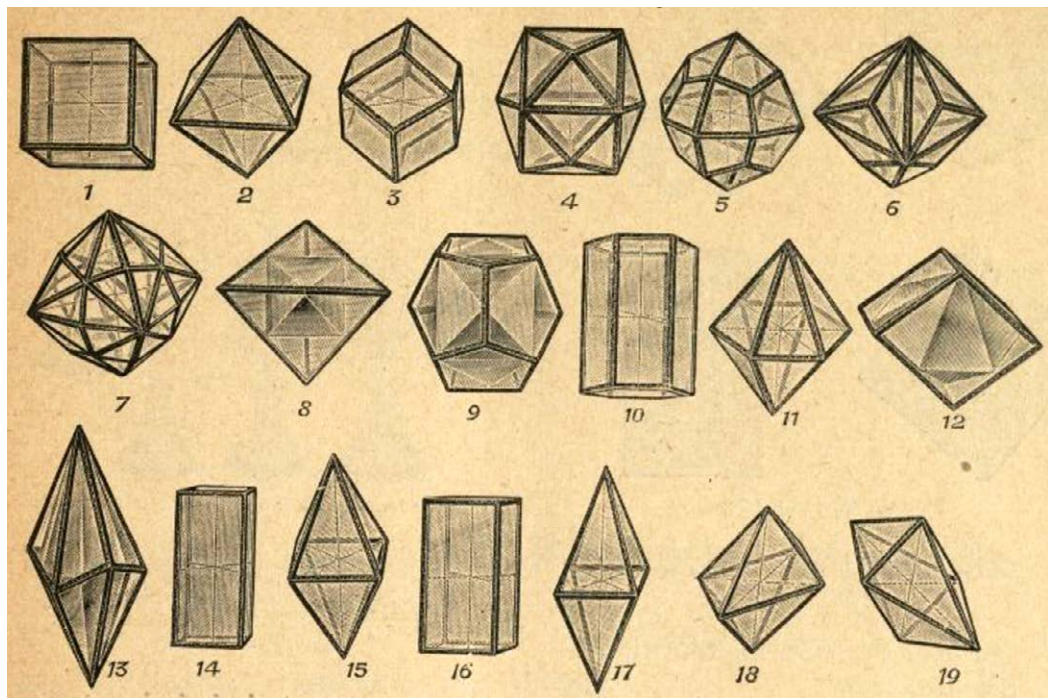


Fig. 7. Catalogue of Teaching Aids for Natural Sciences and Agriculture, G.B. Paravia & C., 1941. Collection of 19 Crystal Patterns in Glass Plates, p. 157.

prism present among the models on display are listed and described for the first time in the collection of 27 models of crystals in glass plates proposed in the 1956 catalogue and illustrated with a black and white drawing in Plate no. 73 attached to the 1968 catalogue (fig. 8). It can therefore be deduced that although the models on display are part of a larger series consisting of 25 or more models, they constitute a collection of absolute rarity due to the number of specimens available.

### Digital and tangible models through crystallographic representation methods

During some workshop experiences [6], the authors shared the theoretical assumptions presented above with their students through digital and tangible models in order to deepen the fundamental geometric characteristics of solids, between the regularity of crystal models and their shape abstraction. The digital models were processed in comparison in specific geometric crystallography software; the tangible ones were made in the classroom by re-composing the related cardboard.

The software [7], whether free or open-source, allowed students to interactively deepen the specificities of crystalline shapes based on cataloguing by group, system and class or indexing by William H. Miller (1801-1880) (figs. 9-11). With reference to the triple cataloguing, moreover, it was possible to model 'new' crystals by modifying the Miller indices, by varying the orthogonal direction to a specific plane of the crystal lattice, determined in the vector space.

The graphic interfaces of the various software used present the crystals in dynamic axonometry and sometimes in the 'block' representation by Haüy (1743-1822) and in anaglyphs; the latter are capable – as it is easy to guess – of enhancing the student's learning thanks to stereoscopic perception. Through the three representations, it is possible to visualize the axes, in the various orders, and the planes of symmetry, that are the fundamental geometric characteristics of solids, because they are useful for the student critical knowledge of 3D shapes with practical consequence in design fields.

In relation to the conference topics, it should be noted that René Just Haüy (1743-1822) in his *Traité de minéralogie* (1801) was the first to use 'la méthode des projections, en sup-

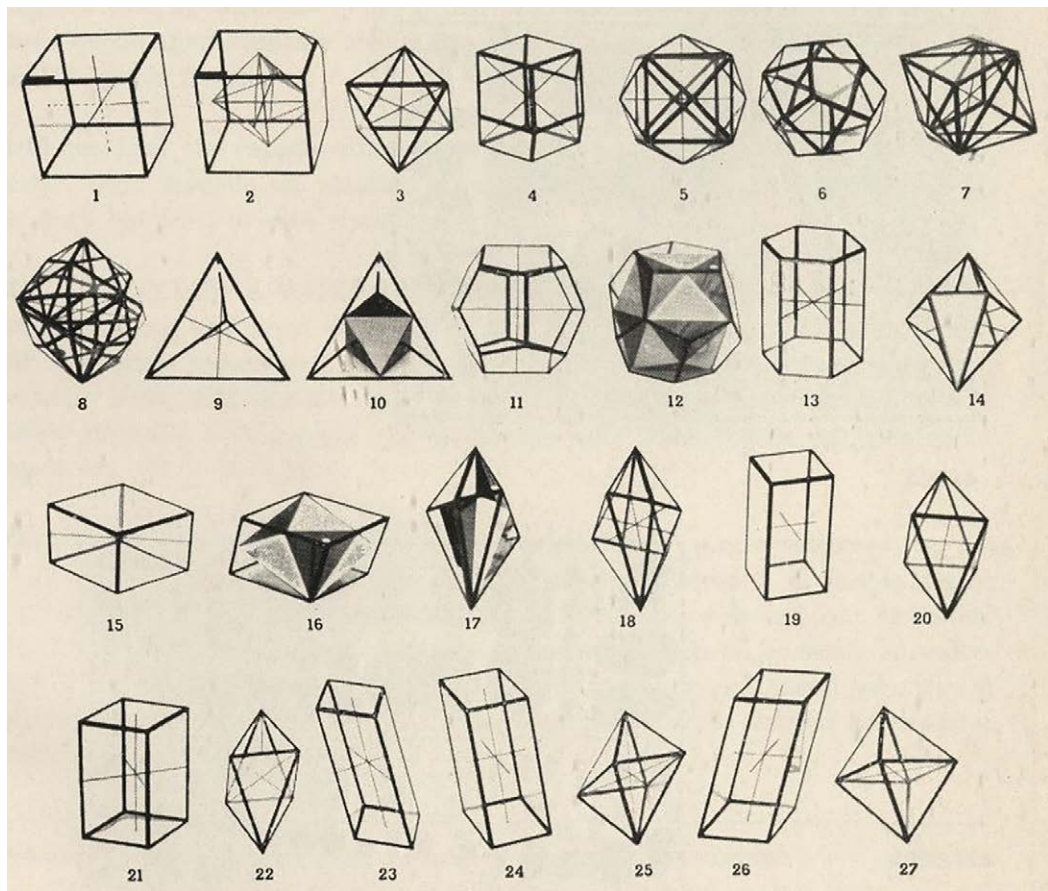


Fig. 8. Catalogue of Natural Sciences, Agriculture, Techno-Commodities and Chemistry, G.B. Paravia & C., 1968. The complete collection of the 27 models of glass sheet crystals, Tav. 73 (p. 82 continued).

posant le point de vue éloigné à l'infini' [Haüy 1801, pp. lv-lvi] [8] or axonometry for the systematic and rigorous representation of crystals, varying the type of line (continuous or piecemeal) to delineate the edges facing or not facing the observateur or to highlight its fundamental geometric elements. The 'block' representation, on the other hand, was devised by Haüy himself to clearly illustrate his theory of *molécules intégrantes* that determine the shape of the crystal by geometric juxtaposition of small 'molecules' corresponding to its chemical composition. If, on the one hand, this theory was soon outdated, it opened to the concept of the 'crystal lattice' by Auguste Bravais (1811-1863) and gave impetus to the creation of wooden models of crystals as a plastic aid to treatises [9], an experiment already made by J. B. Rome de l'Isle for the *Cristallographie* (Paris 1783).

In the same software, the pseudo-three-dimensional representations are flanked by the crystal stereogram, which is the most complete plane representation of the solid and its elements of symmetry through a symbolic encoding, valid regardless of its regular conformation or not. As is well known, the atomic composition of a crystal is linked to its chemical elements, while the macroscopic conformation, regular or not, of the same crystal varies with the variation of environmental characteristics. Therefore, the latter can affect the size of the crystal and not the dihedral angle between its faces. Stereographic projection has been applied to the crystals precisely to represent the edges and vertices of the faces and their symmetry relationships; one of the first to propose this representation was Bravais. The crystal lattice is positioned at the central point of the sphere and the crystallographic directions (edges and vertices) are projected onto the surface of the sphere, from the opposite poles of the vertical main axis. The stereogram is given by the intersection of the crystallographic directions on the equatorial plane [10]. Geometric crystallography software still supported the laboratory experience in its practical phase: the main digital models were developed through software and then reassembled macroscopic in cardboard, similarly to

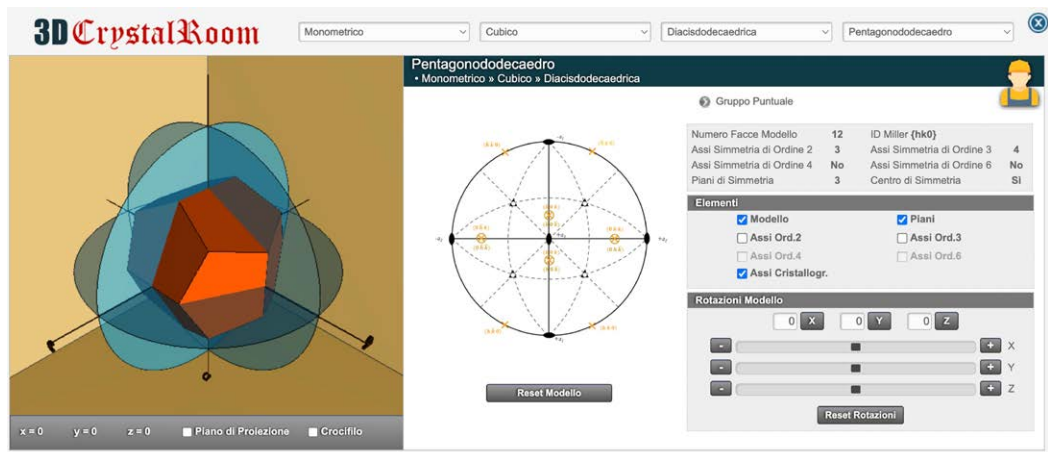


Fig. 9. The crystalline shape of the pentagon-dodecahedron: digital model and stereogram processed in the 3DCrystalRoom software (University of Bari). Elaboration by the Authors, 2024.

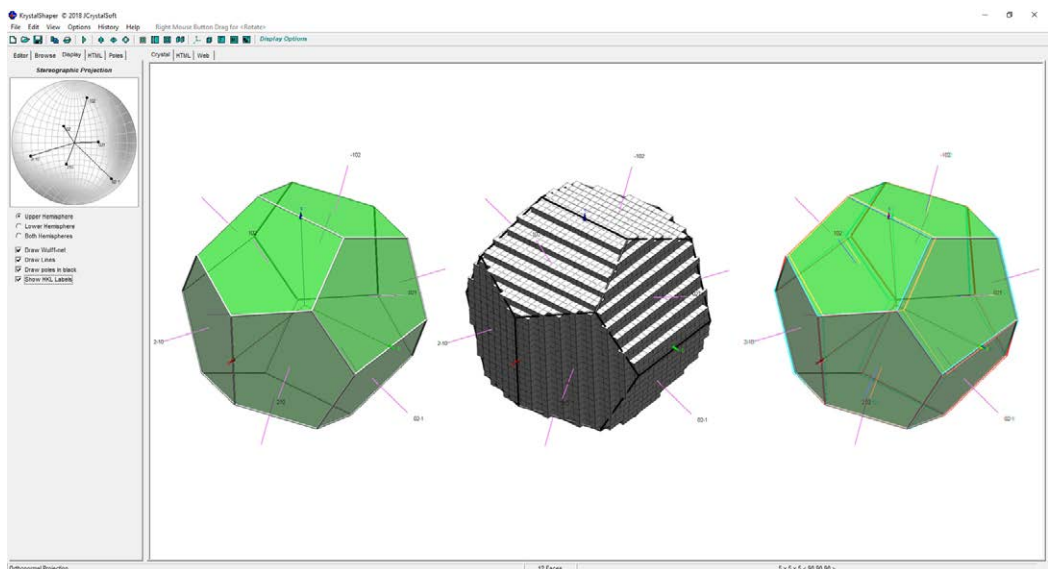


Fig. 10. The crystalline shape of the pentagon-dodecahedron: stereogram, digital model, block model and anaglyphs in the KrystalShaper software (CrystalSoft, 2018). Elaboration by the Authors, 2024.

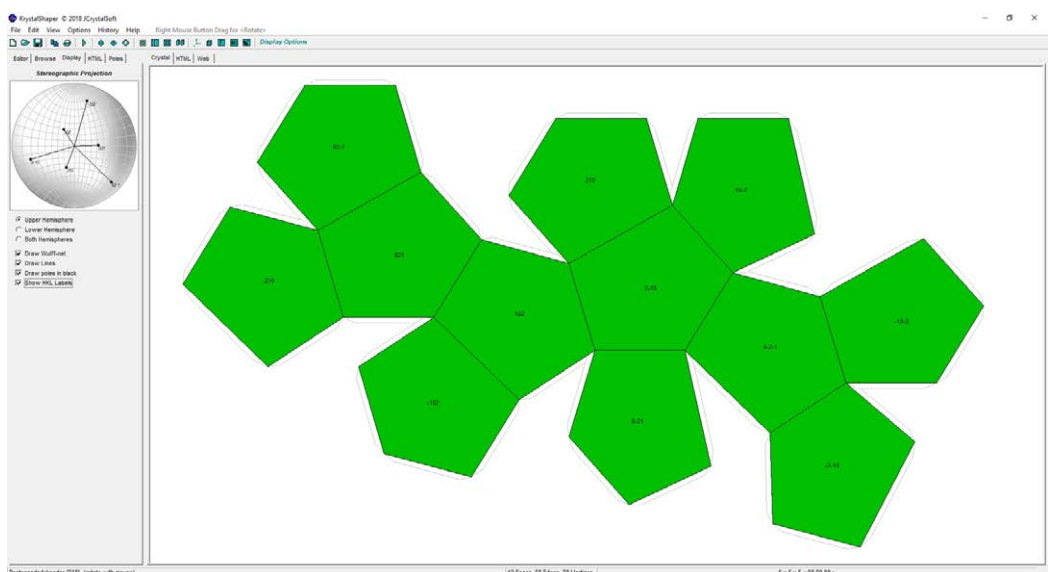


Fig. 11. The crystalline shape of the pentagon-dodecahedron: stereogram and plane development in the KrystalShaper software (CrystalSoft, 2018). Elaboration by the Authors, 2024.

those marketed in the early Twentieth century by Paravia. This experience has evidently consolidated the critical knowledge of complex solids and of the main geometric characteristics, as was the teaching intention of Prof. K. Vrba of the University of Prague in the last quarter of the Nineteenth century, taken up and expanded by F. Krantz through the production of teaching aids for German schools and universities starting in 1895 [Krantz 1895].

## Conclusions

The study conducted on tangible and digital crystallographic models through the scientific literature of the sector; the didactic specimens and the most recent crystallographic modelling software confirms the central role of geometry in jewellery design with specific reference to both natural and artificial gems. The research focused on the invariant geometric principles that underlie the atomic structure of gems regardless of their origin, whether natural or artificial.

The market for artificial gems and new faceted natural gems is constantly growing due to its attention to sustainability issues. There is considerable growth on the market in the presence of artificial products that have geometric, physical and chemical characteristics that are increasingly close to those of natural analogues, up to 'lab-grown' products with characteristics completely similar to those extracted in mines. The evolution in terms of experimentation of the products created in the laboratory corresponds to a similar advancement in the techniques and tools for characterization and evaluation of the origin and quality of the analyzed gems. In this scenario, it is precisely the consolidation of geometric skills that guarantees the control of the processes that guide and stimulate formal experimentation for the project. Extending this approach also in teaching increases the student's critical awareness towards the broader multiscalar areas, from architecture to the minimal object.

## Notes

[1] Crystallographic models are in the collections of at least three Italian museums: the Michelangelo Museum in Caserta, the Royal Mineralogical Museum of the University of Naples Federico II, and the Museum of Earth Sciences of the Department of Earth and Geoenvironmental Sciences of the University of Bari. The 20 specimens of crystallographic models in the latter collection are catalogued and archived in the General Catalogue of Cultural Heritage. <<https://catalogo.beniculturali.it>>.

[2] The Museum was established in 2004 by resolution of the then Istituto Tecnico Statale per Geometri 'Buonarroti', which is its superordinate body; since 2009, the museum has been a member of the Terra di Lavoro Museum System. The collection and its exhibition to the public are constantly increasing, also thanks to private donations; The exhibition is organized in the sections: Mineralogy, Topography, History of Measurement, Calculus, Writing, Mechanics, Audio-Video Recording, History of Drawing, Pure Sciences and Garden of Mathematical Machines. The collection of 15 glass models, exhibited in the mineralogy section, was acquired by the 'Buonarroti' institute in 1963.

[3] Crystallographic forms are divided into monometric, dimetric and trimetric groups, so called in relation to the angles that the crystallographic axes mutually form with each other.

[4] The literature currently identifies the seven crystal systems – cubic, hexagonal, tetragonal, rhombic, monoclinic, triclinic and trigonal – according to the symmetry classes.

[5] The models, put on the market since the beginning of the Twentieth century by Paravia, reach a level of technical and scientific precision such as to meet the requirements set by the National Government with Royal Decree no. 527 of 1927 regarding national production. For this reason, in 1936, Paravia's products obtained the 'recognition of completely Italian material' (prot. N. 5598/36) by the Ministry of Corporations, competing for accuracy and price with the production of foreign companies, which for decades had monopolized the market of teaching aids in Italy and in European countries, probably also inspiring the production of Paravia during the early years.

[6] The didactic experiences were conducted in the Laboratory of Parametric Design Drawing carried out by Argenziano P., Avella A. and Pisacane N. in the Department of Architecture and Industrial Design of the University of Vanvitelli.

[7] Among the experimented software are: JCrystal, KrystalShaper, WinWULFF and 3DCrystalRoom of the University of Bari Aldo Moro.

[8] In the *Traité de minéralogie*, the author shared the graphic choices with the mining engineer Tremery, while the authors of the drawings are: 'Cordier, Lefroy, Gallois, Houry, Depuch, Cressac, Ducros et Héricart' [Haüy 1801, pp. I-II]. Earlier isolated uses of axonometry for the representation of crystals are in [Haüy 1784, plate I] and in the *Encyclopedie* sub entry *Crystallisations* (plate VI, no. 8, *Crystal d'Islande*).

[9] All the crystals drawn in the plates of Haüy's treatise were concretized into wooden scale models by Pleuvin and Journy [Haüy 1801, p. lvi]



[10] The X and O symbols identify the crystallographic directions projected from the zenith and nadir, respectively. Axes and planes of symmetry have other specific symbols.

## Credits

The authors designed the research and shared its methodology and contents. In particular, the paragraph entitled *From geometric abstraction to the scientific classification of crystals* is edited by Nicola Pisacane, the paragraph entitled *Analysis of crystallographic models between museum collections and iconography of catalogues* is edited by Alessandra Avella and the paragraph entitled *Digital and tangible models through crystallographic representation methods* is edited by Pasquale Argenziano. *Introduction* and *Conclusions* are edited by all the authors.

## References

<<https://catalogo.beniculturali.it/>>. (accessed 20 May 2024)

<<http://www.geo.uniba.it/utility/crystalroom/>>. (accessed 20 May 2024).

<<http://www.jcrystal.com/products/krystalshaper/index.htm>>. (accessed 20 May 2024).

Anonimo (1980). *Scienze Naturali*. Torino: G. B. Paravia & C.

Argenziano P, Avella A., Pisacane N. (2022). Il disegno delle gemme sfaccettate. Fonti iconografiche e trattatistica, analisi geometrica, rilevamento, modellazione parametrica/Faceted gemstones drawing. Iconographic and treatise sources, geometric analysis, survey, parametric modelling. In Battini C., Bistagnino E. (Eds.). *Dialoghi. Visioni e visualità. Atti del 43° Convegno Internazionale dei Docenti delle Discipline della Rappresentazione/Dialogues. Visions and visuality. Proceedings of the 43rd International Conference of Representation Disciplines Teachers*. Genova, 15-16-17 settembre 2022, pp. 2036-2057. Milano: FrancoAngeli.

AA.VV. (1932). *Catalogo dei sussidi didattici per l'insegnamento delle scienze naturali, pubblicazione semestrale n. 274*. Torino: G. B. Paravia & C.

AA.VV. (1951). *I cataloghi della rinascita. Materiali didattici. Parte seconda. Anatomia – Igiene zoologia – Botanica – Agraria – Mineralogia – Cristallografia – Geologia – Microscopia – Etnografia – Tecnologia e Merceologia*. Torino: G. B. Paravia & C.

AA.VV. (1987). *Chimica, Biologia, Scienza della Terra. Catalogo generale*. Torino: G. B. Paravia & C.

AA.VV. (1959). *Materiali, Sussidi didattici e scientifici per le Scuole di avviamento professionale e Scuole tecniche di ogni tipo*. Torino: G. B. Paravia & C.

AA.VV. (1917). *Materiali e sussidi didattici per l'insegnamento della storia naturale e dell'agricoltura*, n. 151. Torino: G. B. Paravia & C.

AA.VV. (1956). *Scienze Naturali – Agraria -Tecnomerceologia – Chimica*. Torino: G. B. Paravia & C.

AA.VV. (1968). *Scienze Naturali – Agraria -Tecnomerceologia – Chimica*. Torino: G. B. Paravia & C.

AA.VV. (1942). *Scienze Naturali – Fisica – Chimica. Collezioni e gabinetti*, n. 391. Torino: G. B. Paravia & C.

AA.VV. (1941). *Sussidi didattici per le scienze naturali e l'agricoltura*, n. 369. Torino: G. B. Paravia & C.

Di Lorenzo P. (2018). Strumenti scientifici e costruttori del Museo "Nevio": didattica e ricerca a Santa Maria Capua Vetere dal 1863. In *Rivista di Terra di Lavoro*. Anno XIII, n. 2, pp. 230-297 <<https://ascaserta.cultura.gov.it/fileadmin/risorse/Rivista/20-07.pdf>> (accessed 20 May 2024).

Di Lorenzo P. (2020). La sezione di scienze pure del Museo Michelangelo: strumenti, costruttori e dubbi catalografici. In *Rivista di Terra di Lavoro*. Anno XV, n. 2, pp. 202-257 <[https://ascaserta.cultura.gov.it/fileadmin/risorse/Rivista/DiLorenzo\\_Nuovi\\_elementi\\_MuseoMichelangelo.pdf](https://ascaserta.cultura.gov.it/fileadmin/risorse/Rivista/DiLorenzo_Nuovi_elementi_MuseoMichelangelo.pdf)> (accessed 20 May 2024).

Haüy R. J. (1784). *Essai d'une théorie sur la structure des cristaux, appliquée à plusieurs genres de substances cristallisées*. Paris: de la Rochelle.

Haüy R. J. (1801). *Traité de minéralogie*. Paris.

Krantz F. (1895). *Katalog einer Sammlung von 280 Krystall-Modellen aus Pappe zum Gebrauche bei Vorlesungen über Mineralogie und Krystallographie an Hochschulen*. Bonn: Gymnasien und Realschulen.

Máthé K., Szirmai J. (2020). Optimal Cells in Crystallography and Arts. In *Journal for Geometry and Graphics*. Volume 24, No. 1, pp. 103–124.

Monno A. (2019). Il Museo di Scienze della Terra dell'Università degli Studi di Bari: attività di ricerca e diffusione della cultura scientifica. In Monno A. (Ed.). *Musei in Puglia. Tradizione e Futuro*. pp. 185-192. Galatina: Mario Congedo.

Mottana A., Crespi R., Liborio G. (1977). *Minerali e rocce*. Milano: Mondadori.

Pisacane N., Argenziano P., Avella A. (2021). Dalla stereotomia, spunti per il disegno delle gemme. Insights into the gems' drawing from stereotomy. In Jacazzi D., Morelli M. D. (Eds.). *Gemme e Gioielli: Storia e Design*, n. 0, pp. 68-69. Aversa: DADI Press.

Pisacane N., Argenziano P., Avella A. (2023a). Gems Geometry: From Raw Structure to Precious Stone. In Cheng L.-Y. (Ed.). *ICGG 2022. Proceedings of the 20th International Conference on Geometry and Graphics*. San Paulo, 15-19 agosto 2022, pp. 497-508. Cham: Springer.

Pisacane N., Argenziano P., Avella A. (2023)b. Modellazione parametrica delle gemme dall'Encyclopedie. Analisi geometrica e criticità morfologiche./Parametric Modeling of Gemstone from the Encyclopedie. Geometric Analysis and Morphological Problems. In Cannella M., Garozzo A., Morena S. (Eds.). *Transizioni. Atti del 44° Convegno Internazionale dei Docenti delle Discipline della Rappresentazione/Transitions. Proceedings of the 44th International Conference of Representation Disciplines Teachers*. Palermo, 14-15-16 settembre 2023. Milano: FrancoAngeli.

Portoghesi P. (1999). *Natura e architettura*. Milano: Skira.

Rome de l'Isle J. B. (1783). *Cristallographie*. Paris: de l'Imprimerie de Monsieur

Sansoni F. (1892). *Cristallografia geometrica, fisica e chimica applicata ai minerali*. Milano: Hoepli.

Wade D. (2015). *Geometria Fantastica. I poliedri e l'immaginario artistico nel Rinascimento*. Milano: Sironi.

#### Authors

Alessandra Avella, Università della Campania Luigi Vanvitelli, [alessandra.avella@unicampania.it](mailto:alessandra.avella@unicampania.it)

Nicola Pisacane, Università della Campania Luigi Vanvitelli, [nicola.pisacane@unicampania.it](mailto:nicola.pisacane@unicampania.it)

Pasquale Argenziano, Università della Campania Luigi Vanvitelli, [pasquale.argenziano@unicampania.it](mailto:pasquale.argenziano@unicampania.it)

To cite this chapter: Alessandra Avella, Nicola Pisacane, Pasquale Argenziano (2024). Disegno, modelli, invarianti geometriche delle forme cristalline verso la sostenibilità nel design del gioiello/Drawing, models, geometric invariants of crystalline shapes towards sustainability in jewellery design. In Bergamo F., Calandriello A., Ciamaichella M., Friso I., Gay F., Liva G., Monteleone C. (Eds.), *Misura / Dismisura. Atti del 45° Convegno Internazionale dei Docenti delle Discipline della Rappresentazione/Measure / Out of Measure. Transitions. Proceedings of the 45th International Conference of Representation Disciplines Teachers*. Milano: FrancoAngeli, pp. 765-790.