

# Algoritmi di *best fit* applicati allo studio dell'architettura storica

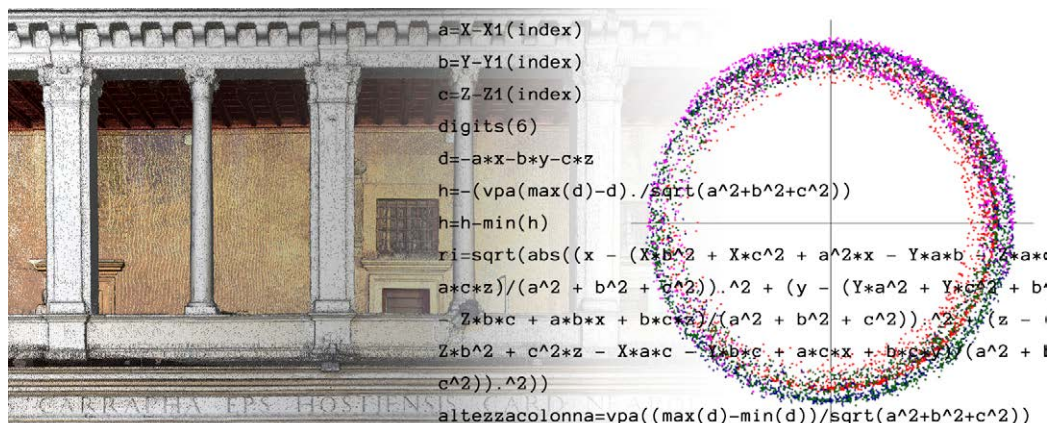
Carlo Bianchini  
Flavio Carnevale  
Marika Griffò

## Abstract

Il contributo presentato vuole indagare le possibilità offerte dagli algoritmi di *best fit* come supporto all'interpretazione e alla lettura dell'architettura storica. La sperimentazione condotta riguarda quattro fusti di colonna appartenenti al secondo ordine del Chiostro di Santa Maria della Pace a Roma di Bramante e si pone come obiettivo quello di condividere un promettente approccio per lo studio dei caratteri costruttivi e anche stilistici dell'architettura. L'algoritmo sviluppato tiene conto della geometria caratteristica dei fusti, descrivendone il tipico andamento pressoché rettilineo nel terzo inferiore e "curvo" nei due terzi superiori. Lo studio, che ha impiegato come base dati la nuvola di punti generata a valle di una campagna di rilievo integrato, ha consentito in particolare di mettere in luce la peculiare conformazione di un fusto rispetto agli altri tre, caratteristica questa molto difficile da individuare con altri metodi. Questa prima esperienza porta dunque a concludere come, a partire da uno stesso dataset, sia possibile condurre diversi tipi di approfondimenti capaci di abbracciare sia gli aspetti qualitativi che quelli quantitativi. Dalla convergenza degli uni con gli altri è possibile ricavare nuove informazioni e quindi nuove possibili chiavi di lettura del monumento.

## Parole chiave

Bramante, entasi, 3D fitting, fusto di colonna, ordine architettonico



Il chiostro di Santa Maria della pace: dall'architettura agli algoritmi di *best fit*. Elaborazione degli autori.

## Nuovi approcci digitali per lo studio dell'architettura storica

Lo studio dell'architettura contempla tradizionalmente un'analisi integrata degli aspetti tecnici e di quelli per così dire umanistici [Bianchini et al. 2020]. Non si sottrae a questa regola evidentemente l'architettura storica, categoria a cui certamente appartiene il caso studio qui presentato, ovvero il Chiostro di Santa Maria della Pace a Roma di Bramante.

Quando le ricerche in questo specifico segmento di manufatti riguardano edifici che più di altri manifestano caratteri rilevanti nello sviluppo del pensiero architettonico, gli studiosi tendono tuttavia a privilegiare l'approccio umanistico rispetto a quello più tecnico e costruttivo ovvero a concentrarsi maggiormente su analisi di tipo qualitativo fondate sulla raccolta delle fonti, sull'osservazione e sull'interpretazione della documentazione grafica e testuale disponibile. Tale approccio metodologico è di per sé preziosissimo tanto da costituire uno dei fondamenti stessi per l'avanzamento della conoscenza in termini di sapere architettonico, autorialità e linguaggio di un certo contesto cronologico e geografico. Con questa premessa, lo studio che qui presentiamo costituisce un primo, promettente risultato di una ricerca più ampia che ha l'obiettivo di prospettare nuove procedure di indagine capaci di mettere in luce aspetti inediti e talvolta addirittura dissimulati nella lettura dell'architettura [1]. In questo senso, essa intende ampliare il ventaglio di strumenti a disposizione della ricerca rivolgendo lo sguardo a metodi di calcolo automatizzato basati su algoritmi di *best fit*, per un'analisi di tipo quantitativo di specifici caratteri geometrici degli elementi costruttivi.

In questa prima fase la sperimentazione ha preso in esame quattro fusti di colonna con l'obiettivo di individuare convergenze e divergenze nel disegno della loro curva-profilo verticale e nel rapporto tra imoscapo e sommoscapo. A partire dalla nuvola 3D, l'approccio adottato tenta dunque di superare in qualche modo il tradizionale campionamento di un limitato numero di punti da cui estrarre i profili bidimensionali che guideranno la lettura dell'oggetto in favore di un'analisi generalizzata capace invece di coinvolgere tutti i punti acquisiti sull'elemento architettonico studiato. La volontà di concentrare lo studio sui fusti di colonna nasce dall'esigenza di individuare un manufatto che allo stesso tempo fosse altamente rappresentativo in termini di linguaggio, rispondesse a regole o comunque a saperi costruttivi noti e consolidati e, infine, fosse sufficientemente definito e definibile in relazione a modelli geometrico-matematici.

### Il chiostro di S. Maria della Pace a Roma

I quattro fusti di colonna presi in esame appartengono ad uno dei quattro lati del secondo ordine del Chiostro di Santa Maria della Pace a Roma progettato da Bramante intorno al 1500 e ultimato intorno al 1504. L'impianto del chiostro è su maglia quadrata di 26 braccia romane di lato e l'intero organismo architettonico si basa sulla progettazione di precisi schemi proporzionali per il disegno sia della pianta che degli alzati. Riguardo la realizzazione dell'apparato decorativo e scultoreo, sappiamo che il 17 agosto 1500 lo scalpellino Bartolomeo Lante di Francesco da Fiesole è incaricato per produrre otto "colone quadre" con capitelli ionici seguendo i disegni di Bramante [Bruschi 2010]. Al contrario, non abbiamo informazioni sulla realizzazione dei fusti di ordine corinzio utilizzati per il secondo ordine. Dal punto di vista della documentazione digitale, a partire dal 2019 è stata realizzata una estesa campagna di rilievo che ha integrato scansioni laser 3D e acquisizioni fotografiche utilizzate per elaborazioni fotogrammetriche (fig. 1). La nuvola di punti prodotta [2] è stata poi segmentata manualmente per estrarre i dati relativi ai quattro fusti analizzati e ha costituito la base dati per la definizione dell'algoritmo sviluppato [Griffo 2020]. In relazione alle strategie di presa, la distribuzione dei punti non risulta omogenea lungo il perimetro dei fusti ma, come vedremo, questa disomogeneità non ha condizionato sensibilmente il processo di elaborazione.



Fig. 1. Visualizzazione della nuvola di punti 3D del chiostro. Elaborazione degli autori.

## Metodologia

A causa della mancanza di materiale e letteratura specifica utili alla nostra indagine, si è fatto uso di nozioni teoriche e pratiche appartenenti a diverse discipline, cercando di creare un percorso metodologico su misura per i nostri scopi. Innanzi tutto ricostruendo in qualche modo l'evoluzione del metodo *best fit*: a partire dagli anni '70 del XIX secolo, infatti, un certo numero di studiosi hanno affrontato il tema dei *fit* di linee rette partendo da dati puntuali osservati e tenendo conto degli errori associati. Questi studi, portati avanti nell'ambito delle discipline più disparate, costituiscono la base dello sviluppo dei successivi algoritmi di *fit* circolari che tuttavia solo a partire dagli anni '50 del XX secolo troveranno una qualche applicazione in ambito architettonico [3] [Thom 1973]. La vera esplosione dell'interesse per il *best fit* si ha però solo con l'avvento dell'informatica e quindi di sistemi *hw/sw* in grado di applicare in modo efficiente algoritmi anche molto complessi a dataset via via più grandi. A questo sviluppo si è associata a cavallo del millennio la diffusione di sistemi di misura in grado di campionare migliaia e poi milioni di punti sugli oggetti.

Tuttavia l'interazione tra questi due sistemi è stata finora erratica [Bianchini 2017]. Infatti, se da un lato hanno in breve tempo visto la luce molte applicazioni in grado di gestire e manipolare nuvole di punti e di generare a partire da esse elementi geometrici sia bidimensionali che tridimensionali [Bianchini 2020], dall'altro abbastanza poco si è fatto sul versante dell'implementazione di strumenti che controllassero appieno il passaggio dalle nuvole alle entità geometrico-matematiche mediante algoritmi di *best fit*. Software per il processamento di nuvole di punti come *Cloud Compare* [4], ad esempio, permettono l'identificazione di forme semplici (piani, poligoni, sfere, quadriche in 2.5D) ma non permettono una gestione approfondita dei parametri delle geometrie e degli elementi matematici alla loro base. Malgrado diversi studiosi si siano interessati alla messa punto di algoritmi per l'identificazione di solidi, come cilindri e paraboloidi [Pistellato et al. 2019; Spath 2001], essi tuttavia non sembrano aver posto particolare attenzione al calcolo dei vari parametri associati ad una quadrica o al superamento delle limitazioni connesse con specifici orientamenti delle forme (i.e. con l'asse di rotazione non parallelo a uno dei 3 assi cartesiani). Ciò nondimeno, i *best fit* si dimostrano invece potenzialmente capaci di estendere il corredo di strumenti a disposizione degli studiosi poiché le tecniche di regressione adottate permettono di ottenere da un lato la funzione matematica che meglio approssima la popolazione di dati disponibili, dall'altro la costruzione dell'elemento geometrico che tale funzione rappresenta e, infine, il disegno

della linea che lo sintetizza graficamente. In particolare, la funzione dovrà essere quella che minimizza la somma dei quadrati delle distanze (o di altri parametri) intercorrenti tra i dati osservati e quelli della curva che li interpola.

Le tipologie di *best fit* possono essere così suddivise in due categorie: i cosiddetti *fit* geometrici, che minimizzano la distanza geometrica dai punti dati rispetto alla curva del modello che vogliamo restituire; i *fit* algebrici, utilizzati in questa sperimentazione, che minimizzano altre funzioni logiche descritte da espressioni algebriche, quindi senza radicali.

I *fit* geometrici permettono di raggiungere un'accuratezza maggiore rispetto a quelli algebrici ma, in ambito applicativo, è tuttavia necessario tener conto di parametri di accuratezza, leggerezza computazionale e complessità di calcolo che spesso tra le due soluzioni fanno propendere per la seconda. Difatti, il *fit* algebrico è solitamente semplice, veloce e affidabile e, nel caso in cui i punti giacciono vicino alla curva del modello di riferimento, permette di ottenere un risultato sensibilmente vicino a quello ottenibile con il *fit* geometrico. Lo attesta, ad esempio, il lavoro sulle figure circolari di Chernov [Chernov 2010] in cui dimostra come il *fit* algebrico restituisca risultati affidabili anche quando i punti non sono distribuiti lungo l'intero arco di circonferenza.

La funzione del nostro modello di quadrica da minimizzare (ellissoide prolato) può essere espressa nel seguente modo:

$$\text{Eq 1: } \varphi(A, B, C, D, E, F, G, H, I) = \sum_{i=1}^n (Ax_i^2 + By_i^2 + Cz_i^2 + Dy_i z_i + Ex_i z_i + Fx_i y_i + Gz_i + Hy_i + Ix_i + 1)^2$$

dove (A, B, C, D, E, F, G, H, I) sono parametri geometrici semplici, in grado di descrivere le caratteristiche di ogni possibile quadrica nello spazio.

Le fasi operative della metodologia da noi impiegata sono schematizzate nella tabella (fig. 2) e descritte punto per punto di seguito.

Le nuvole di punti che rappresentano le colonne devono essere filtrate per eliminare punti spuri e non rappresentativi in modo tale da lasciare solamente quelli che appartengono realmente al fusto (fig. 3);

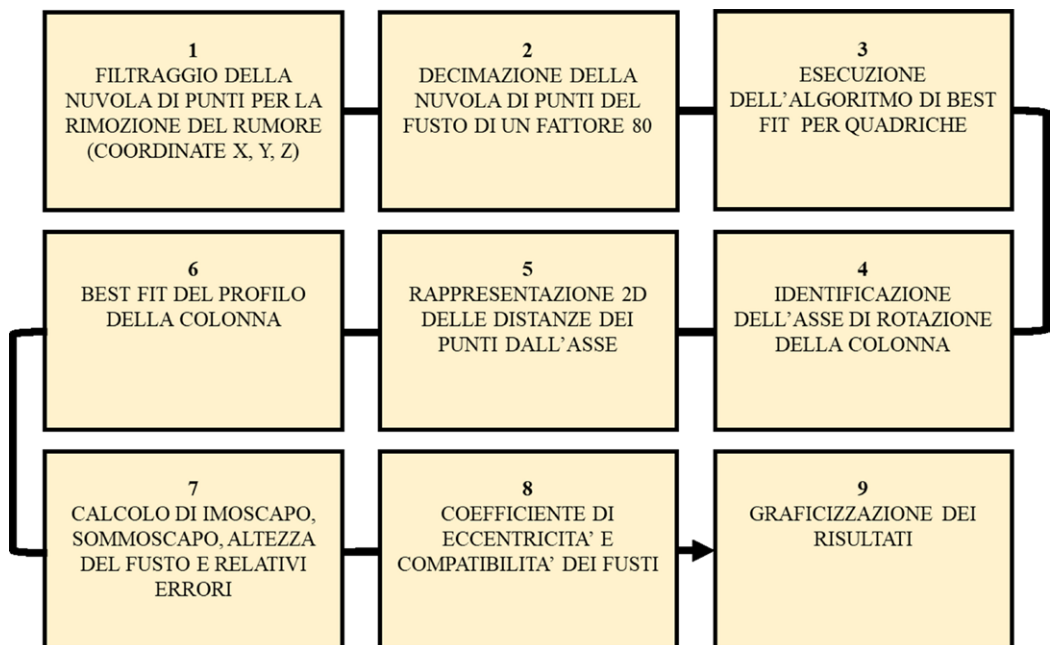


Fig. 2. Diagramma a blocchi della metodologia utilizzata in questo lavoro. Per ogni punto del processo è presente una descrizione nel corpo del testo. Elaborazione degli autori.

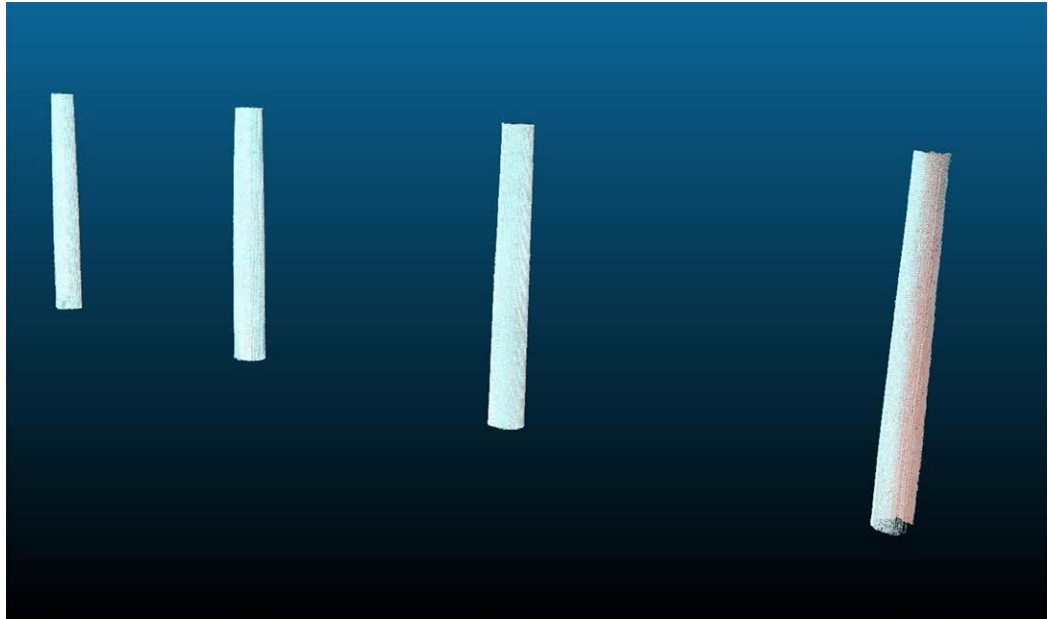


Fig. 3. Nuvole di punti dei fusti delle 4 colonne. Elaborazione degli autori.

Il numero dei punti nella nuvola presi in considerazione viene ridotto di 80 volte in maniera casuale. In questo modo l'algoritmo riesce ad elaborare più velocemente i dati senza un cambiamento percettibile dei risultati. Nello specifico i punti sono stati decimati da 154406 a 1931 per la colonna 1, da 182857 a 2286 per la colonna 2, da 156482 a 1957 per la colonna 3 e da 97051 a 1214 per la colonna 4;

Si applica l'algoritmo di *best fit* alla nuvola di punti decimata utilizzando come modello di riferimento l'equazione di una quadrica (eq 1). Tenuto conto della forma del fusto della colonna, il tipo di quadrica da utilizzare come modello è un ellissoide prolato;

Ottenuti i parametri della quadrica è possibile ricavare l'equazione della retta che descrive il suo asse di rotazione e, di conseguenza, anche quello del fusto;

Si rappresenta graficamente la distribuzione delle distanze dei punti dall'asse di rotazione del fusto rispetto alla sua altezza. In questa fase si passa da una rappresentazione spaziale a una planare dove l'asse di rotazione viene fatto coincidere con l'asse y del grafico (fig. 4);

Si effettua un secondo *fit*, questa volta impiegando come modello l'equazione di un'ellisse (nel nostro studio il profilo del fusto di colonna viene approssimato ad un arco di ellisse);

In questo modo è possibile calcolare il raggio di imoscapo e sommoscapo e l'altezza dei fusti (si considerano come limiti superiore e inferiore i punti posizionati ad altezza maggiore e minore rispetto all'asse di rotazione);

Tramite il coefficiente di eccentricità delle curve ottenute dal *best fit* si verifica l'eventuale compatibilità della rastremazione dei fusti;

Graficizzando i risultati ottenuti è possibile rilevare in maniera qualitativa la presenza di similitudini e differenze nei fusti analizzati.

### Risultati e analisi

L'algoritmo di *best fit* ha restituito i dati presentati nella tabella (fig. 5) Si fa notare come, in termini dimensionali, il fusto 1 abbia altezza compatibile rispetto a quella dei restanti fusti, ma valori dei raggi di imoscapo e sommoscapo più piccoli (fig. 6). Tuttavia, osservando i valori del rapporto tra sommoscapo e imoscapo e dei coefficienti di eccentricità, è evidente che la rastremazione del fusto 4 sia differente rispetto a tutti gli altri (fig. 7). Per precisione, il coefficiente di eccentricità è calcolato come segue:

$$\text{eq. 2: } e = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$$

dove a e b sono rispettivamente il semiasse maggiore e minore dell'ellissi ottenuta dal *best fit* del profilo del fusto.

Fig. 4. Dimensioni con margine di incertezza di imoscapo, sommoscapo e altezza dei fusti delle 4 colonne, rapporto con margine di incertezza tra sommoscapo e imoscapo, coefficiente di eccentricità delle curve di *best fit* dei quattro fusti. Elaborazione degli autori.

N° Colonna	Raggio imoscapo (m)	Raggio sommoscapo (m)	Altezza (m)	Ratio Sommoscapo/Imoscapo	Coefficiente di eccentricità e
1	0.145±0.002	0.120±0.002	2.644±0.003	1.208±0.018	0.99952
2	0.156±0.002	0.132±0.002	2.644±0.003	1.182±0.017	0.99950
3	0.154±0.003	0.126±0.003	2.646±0.003	1.222±0.025	0.99945
4	0.158±0.003	0.124±0.003	2.627±0.003	1.274±0.024	0.99932

Per quanto riguarda l'inclinazione dei fusti rispetto agli assi cartesiani, tutti e quattro tendono ad avere scarti simili che si mantengono entro i 3° dall'ortogonalità (fig. 8).

Fig. 5. Scarto angolare in gradi tra gli assi delle colonne ottenuti tramite il *best fit* e gli assi cartesiani (x, y, z). Elaborazione degli autori.

N° Colonna	Scarto asse x (°)	Scarto asse y (°)	Scarto asse z (°)
1	0.96	2.12	-2.33
2	0.75	2.11	-2.23
3	0.94	2.3	-2.49
4	0.81	2.51	-2.64

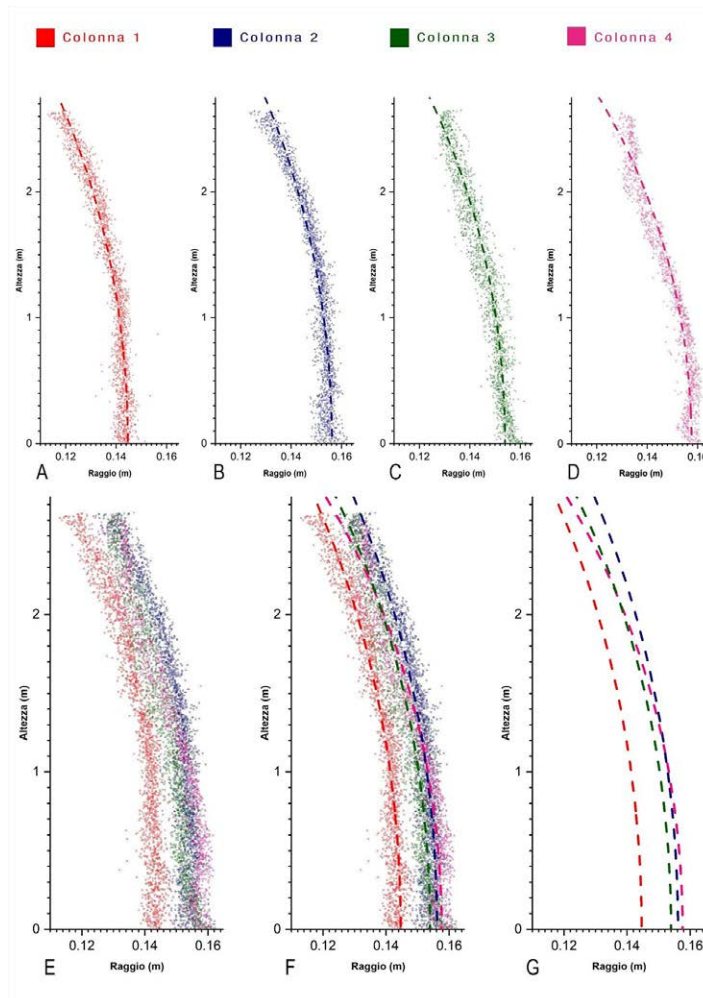


Fig. 6. Distanze in metri dei punti rispetto all'asse di rotazione della colonna (raggio) e curva di *best fit* che approssima il profilo del fusto (linea tratteggiata). Il rapporto tra gli assi x e y nei grafici è di 1:20 per motivi di rappresentazione. Elaborazione degli autori.

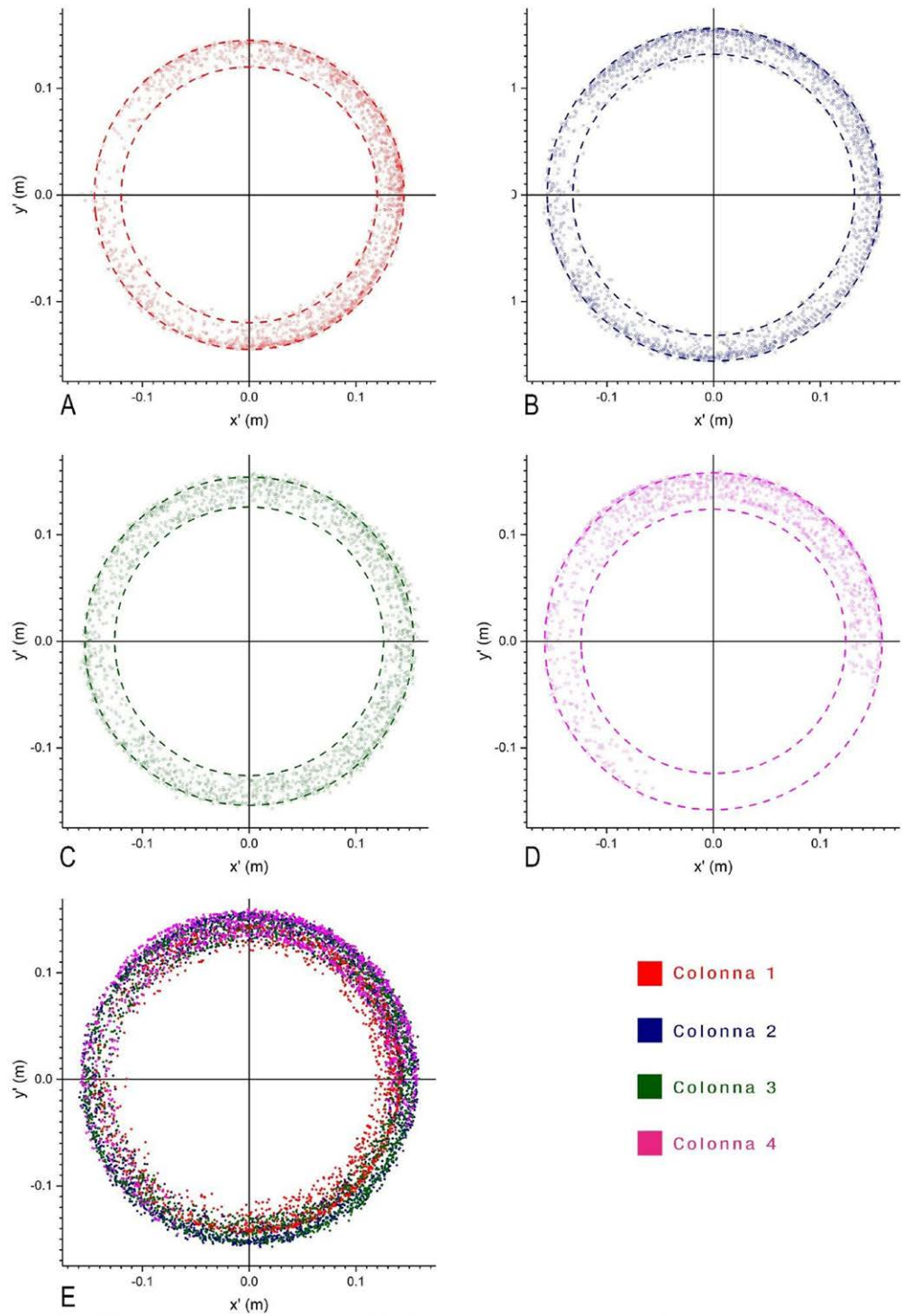


Fig. 7. Vista della sezione  $X'Y'$  delle due colonne. Le linee tratteggiate indicano le circonferenze dell'imoscapo e del sommoscapo. La distribuzione circolare dei punti attorno al centro (0,0) dimostra la bontà del *fit* nel determinare l'asse di rotazione). Elaborazione degli autori.

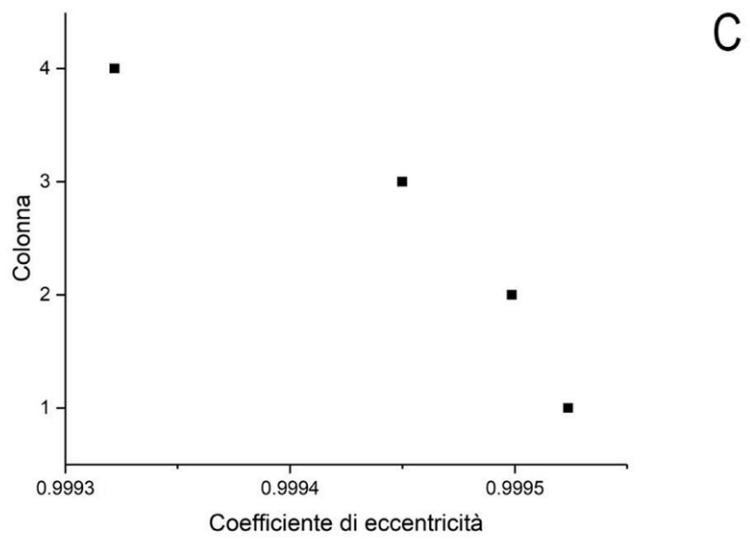
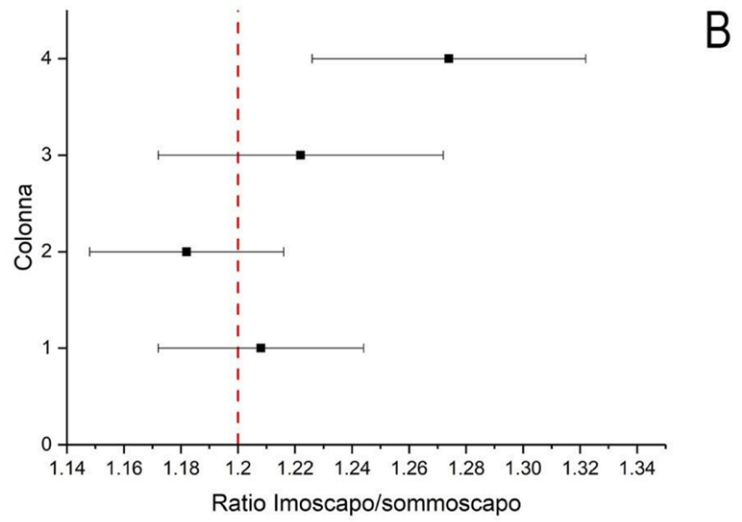
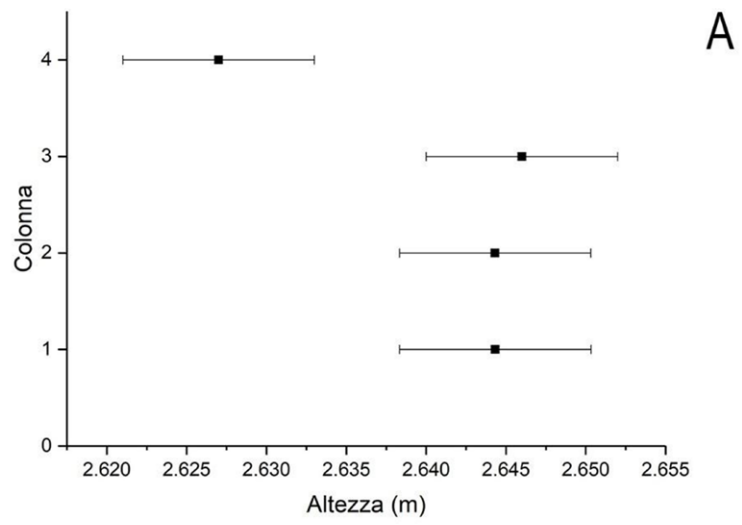


Fig. 8. A, i valori dell'altezza (errore  $2\sigma$ ) delle 4 colonne; B, i valori del rapporto tra imoscapo e sommoscapo (errore  $2\sigma$ ). La linea rossa indica il valore atteso per il rapporto 6/5 tra i diametri basali e sommitali; C, i coefficienti di eccentricità delle curve di *best fit* dei profili dei fusti. Elaborazione degli autori.



## Conclusioni

La sperimentazione condotta mette in evidenza l'anomalia nella descrizione numerica del fusto 4 in cui la differenza di diametro tra imoscapo e sommoscavo sembra essere più accentuata. L'imoscavo ha infatti un diametro nettamente maggiore rispetto a quello degli altri fusti mentre l'imoscavo è più piccolo sia di quello del fusto 1 che di quello del fusto 3. Questo primissimo risultato suscita immediatamente alcuni interrogativi circa il processo di costruzione dell'edificio, le maestranze e l'organizzazione del cantiere, la provenienza dei fusti per non parlare di possibili restauri o sostituzioni successive non documentate. Infatti questa anomalia, non percepibile ad occhio e difficilmente ravvisabile utilizzando le normali procedure di analisi delle nuvole e modellazione 2D/3D, porta alla luce il fatto che il profilo di uno dei 4 fusti analizzati è sensibilmente diverso dagli altri e questo induce a formulare alcune ipotesi suscettibili di ulteriori approfondimenti: si tratta della contemporanea presenza di più artigiani in cantiere che adottano ciascuno la propria "curva" all'interno dello schema progettuale generale? Il fusto ha origini diverse rispetto agli altri, per esempio è di spoglio ed ha subito un riadattamento? È stato sostituito successivamente per ragioni di deterioramento o altro? Si potrebbe controbattere che si tratta di domande tutto sommato marginali e che poco saranno in grado di aggiungere agli studi precedenti. Ciò nondimeno il procedimento illustrato svela di sicuro un particolare ignoto fino a questo momento concorrendo ad aumentare dunque il livello di conoscenza del manufatto ma soprattutto applica proficuamente un procedimento innovativo nell'analisi dell'architettura storica. Si tratta come detto della presentazione delle fasi preliminari di una ricerca più estesa che, partendo da questi presupposti, si sta già orientando verso l'estensione dell'indagine a tutte le 16 colonne corinzie del chiostro per verificare se l'anomalia rintracciata su uno dei lati sia presente anche altrove. Un ulteriore sviluppo possibile riguarda invece l'applicazione del *best fit* a colonnati costituiti da materiali di rimpiogo per ricercare eventuali analogie tra fusti o mettere in luce divergenze significative. In definitiva, immaginando di applicare l'algoritmo ad una casistica molto ampia, sarebbe possibile in maniera pressoché automatizzata desumere addirittura la regola d'arte impiegata da certe maestranze in certi contesti locali. In questa chiave, lo studio storico potrebbe arricchirsi di nuovi dati a servizio dell'interpretazione architettonica.

## Note

[1] La ricerca qui presentata è parte delle attività condotte da Flavio Carnevale nell'ambito del corso di Dottorato Nazionale Heritage Science sotto la supervisione di Carlo Bianchini e Marika Griffo.

[2] Le attività di rilievo sono state coordinate dai proff. Carlo Bianchini e Alfonso Ippolito nel contesto principalmente di due programmi regionali finanziati da LazioInnova nel quadro del PON-FESR 2017-2023: i progetti HBIM4LazioHERITAGE (Sistema informativo integrato HBIM per la conservazione e la gestione di siti culturali nel Lazio) coordinato dal CNR e AMEN (Augmented Museum Environment Network) presentato dal Centro Culturale Internazionale Dart S.r.l. Entrambi hanno coinvolto il DSDRA di Sapienza, Università di Roma.

[3] Tra queste si annovera l'analisi dei cerchi di pietre di siti megalitici inglesi allo scopo di verificare se gli antichi popoli che li avevano edificati avessero utilizzato un'unità di misura comune.

[4] CloudCompare. 3D point cloud and mesh processing software [<https://www.danielgm.net/cc/>].

## Riferimenti bibliografici

3D point cloud and mesh processing software. Open Source Project. <<https://www.danielgm.net/cc/>> (consultato il 31 Luglio 2024).

Bianchini C. (2017). Quale regola per il Tempietto?. In F. Cantatore (a cura di), *Il Tempietto di Bramante nel monastero di San Pietro in Montorio*, pp. 267-274. Roma: Edizioni Quasar.

Bianchini C. (2020). A methodological approach for the study of domes. In *Nexus Network Journal*, vol. 22, n. 4, pp. 983-1013. <<http://dx.doi.org/10.1007/s00004-020-00526-9>>

Bianchini C. et al. (2020). La costruzione scientifica della memoria: il caso della nuova antica città di Ninfa| The Scientific Construction of Memory: the Case of the New Ancient City of Ninfa. In A. Arena et al. (a cura di), *CONNETTERE-Un disegno*

per annodare e tessere · *CONNECTING-Drawing for weaving relationships*. Atti del 42° Convegno internazionale dei docenti della Rappresentazione. Reggio Calabria, 16-18 settembre 2020, pp. 1760-1777. Milano: FrancoAngeli.

Bruschi A. (2010). *Bramante*. Bari: Laterza.

Chernov N. (2010). *Circular and Linear Regression: Fitting Circles and Lines by Least Squares*. Boca Raton: CRC Press.

Griffo M. (2022). Semantics through models. Ex ante and ex post classification processes. In L. Inzerillo, F. Acuto (a cura di). *Digital & Documentation*, vol. 4 pp. 61-71. Pavia: Pavia University Press.

Pistellato M. et al. (2019). Robust Cylinder Estimation in Point Clouds from Pairwise Axes Similarities. In M. Castrillon-Santana, M. De Marsico, A. Fred (a cura di), *Proceedings of the 8th International Conference on Pattern Recognition Applications and Methods /ICPRAM*. Roma, 24-26 febbraio 2024, vol. 1, pp. 640-647. Praga. <<http://dx.doi.org/10.5220/0007401706400647>>

Späth H. (2001). Least squares fitting with rotated paraboloids. In *Mathematical Communications*, vol. 6, n. 2.

Thom A. (1973). A megalithic lunar observatory in Orkney: the ring of Brogar and its cairns. In *Journal for the History of Astronomy*, vol. 4, pp. 111-123.

#### **Autori**

Carlo Bianchini, Sapienza Università di Roma, [carlo.bianchini@uniroma1.it](mailto:carlo.bianchini@uniroma1.it)  
Flavio Carnevale, Sapienza Università di Roma, [flavio.carnevale@uniroma1.it](mailto:flavio.carnevale@uniroma1.it)  
Marika Griffo, Sapienza Università di Roma, [marika.griffo@uniroma1.it](mailto:marika.griffo@uniroma1.it)

Per citare questo capitolo: Carlo Bianchini, Flavio Carnevale, Marika Griffo (2024). Algoritmi di best fit applicati allo studio dell'architettura storica/Best fit algorithms applied to the study of historical architecture. In Bergamo F., Calandriello A., Ciammaicella M., Friso I., Gay F., Liva G., Monteleone C. (a cura di). *Misura / Dismisura. Atti del 45° Convegno Internazionale dei Docenti delle Discipline della Rappresentazione/Measure / Out of Measure. Transitions. Proceedings of the 45th International Conference of Representation Disciplines Teachers*. Milano: FrancoAngeli, pp. 879-898.

# Best fit algorithms applied to the study of historical architecture

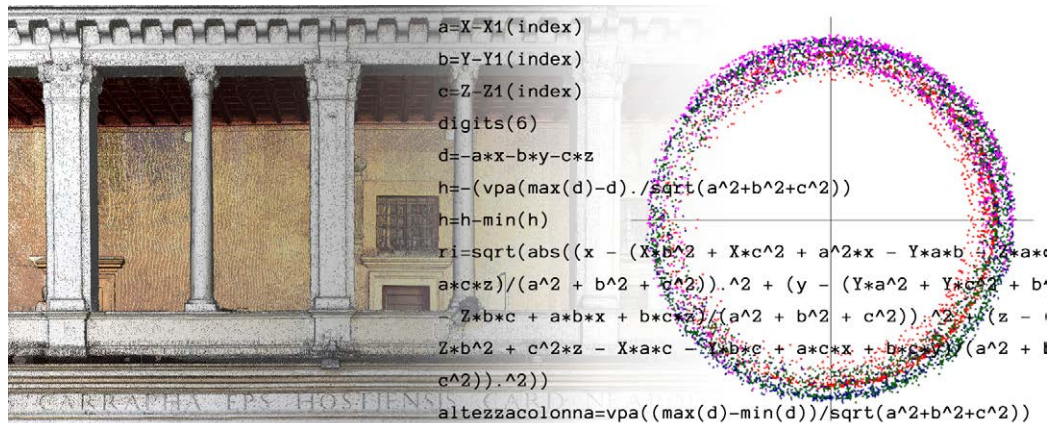
Carlo Bianchini  
Flavio Carnevale  
Marika Griffo

## Abstract

The paper aims to explore the possibilities offered by best fit algorithms as a support for the interpretation and reading of historical architecture. The conducted experimentation involves four column shafts from the second order of the Cloister of Santa Maria della Pace in Rome by Bramante, with the objective of sharing a promising approach for the study of the constructive and stylistic characteristics of architecture. The developed algorithm takes into account the characteristic geometry of the shafts, describing their typical nearly straight course in the lower third and “curved” shape in the upper two-thirds. The study, which used a point cloud generated from an integrated survey campaign as its data base, has particularly highlighted the peculiar conformation of one shaft compared to the other three, a feature that is very difficult to identify with other methods. This initial experience leads to the conclusion that, starting from the same dataset, it is possible to conduct different types of investigations capable of encompassing both qualitative and quantitative aspects. From the convergence of these aspects, it is possible to derive new information and thus new possible interpretations of the monument.

## Keywords

Bramante, entasis, 3D fitting, columns' shaft, architectural order



The Cloister of Santa Maria della Pace: From Architecture to Best Fit Algorithms. Elaboration by the authors.

## New Digital Approaches for the Study of Historical Architecture

The study of architecture traditionally involves an integrated analysis of technical and, so to speak, humanistic aspects [Bianchini et al. 2020]. Historical architecture, to which the case study presented here - namely, the Cloister of Santa Maria della Pace in Rome by Bramante - certainly belongs, does not escape this rule. However, when research in this specific segment of artifacts involves buildings that prominently exhibit significant characteristics in the development of architectural thought, scholars tend to prioritize a humanistic approach over a more technical and constructive one, focusing more on qualitative analyses based on the collection of sources, observation, and interpretation of available graphical and textual documentation. This methodological approach is invaluable in itself, constituting one of the very foundations for advancing knowledge in terms of architectural understanding, authorship, and the language of a certain chronological and geographical context. With this premise, the study we present here is a first, promising result of a broader research endeavor aimed at proposing new investigative procedures capable of highlighting novel and sometimes even concealed aspects in the reading of architecture [1]. In this sense, it aims to expand the range of tools available to research by looking at automated calculation methods based on best fit algorithms for a quantitative analysis of specific geometric characteristics of construction elements. In this initial phase, the experimentation examined four column shafts with the aim of identifying convergences and divergences in the design of their vertical curve profiles and the relationship between the base and the top of the shafts. Starting from the 3D point cloud, the adopted approach attempts to surpass the traditional sampling of a limited number of points from which to extract the two-dimensional profiles that guide the reading of the object, in favor of a generalized analysis capable of involving all the points acquired on the studied architectural element. The decision to focus the study on column shafts stems from the need to identify an artifact that is highly representative in terms of language, adheres to known and consolidated constructive rules or knowledge, and is sufficiently defined and definable in relation to geometric-mathematical models.

### The cloister of S. Maria della Pace in Rome

The four column shafts under examination belong to one of the four sides of the second order of the Cloister of Santa Maria della Pace in Rome, designed by Bramante around 1500 and completed around 1504. The layout of the cloister is based on a square grid of 26 Roman cubits per side, and the entire architectural structure relies on the design of precise proportional schemes for both the plan and the elevations. Regarding the execution of the decorative and sculptural elements, we know that on August 17, 1500, the stonemason Bartolomeo Lante di Francesco da Fiesole was commissioned to produce eight "square columns" with Ionic capitals following Bramante's designs [Bruschi 2010]. Conversely, we have no information about the creation of the Corinthian order shafts used for the second order. From a digital documentation perspective, an extensive survey campaign integrating 3D laser scans and photographic acquisitions used for photogrammetric processing has been conducted since 2019 (fig. 1). The resulting point cloud [2] was manually segmented to extract data related to the four analyzed shafts and served as the database for defining the developed algorithm [Griffo 2020]. Concerning the acquisition strategies, the point distribution along the perimeter of the shafts is not homogeneous; however, as we will see, this heterogeneity did not significantly affect the processing procedure.



Fig. 1. View of the 3D point cloud of the cloister. Elaboration by the authors.

## Methodology

Due to the lack of specific material and literature useful for our investigation, we have utilized theoretical and practical knowledge from various disciplines, aiming to create a tailored methodological approach for our purposes. Firstly, we reconstructed the evolution of the best fit method: since the 1870s, a number of scholars have addressed the topic of fitting straight lines from observed point data, taking into account the associated errors. These studies, conducted in various disciplines, form the basis for the development of subsequent circular fit algorithms, which, however, found some application in architecture only from the 1950s onwards [3] [Thom 1973]. The real explosion of interest in best fit occurred with the advent of computer science, and thus of hardware/software systems capable of efficiently applying even very complex algorithms to increasingly larger datasets. This development was accompanied around the turn of the millennium by the spread of measurement systems capable of sampling thousands and then millions of points on objects. However, the interaction between these two systems has so far been erratic [Bianchini 2017]. Indeed, while many applications capable of managing and manipulating point clouds and generating two-dimensional and three-dimensional geometric elements from them have quickly emerged [Bianchini 2020], relatively little has been done on the implementation of tools that fully control the transition from point clouds to geometric-mathematical entities using best fit algorithms. Point cloud processing software such as CloudCompare [4], for example, allows for the identification of simple shapes (planes, polygons, spheres, quadrics in 2.5D) but does not allow for detailed management of the parameters of the underlying geometries and mathematical elements. Although several scholars have been interested in developing algorithms for the identification of solids, such as cylinders and paraboloids [Pistellato et al. 2019; Spath 2001], they do not seem to have paid particular attention to the calculation of various parameters associated with a quadric or to overcoming the limitations related to specific orientations of shapes (i.e., with the axis of rotation not parallel to one of the three Cartesian axes). Nevertheless, best fits prove potentially capable of extending the array of tools available to scholars. This is because the regression techniques employed allow, on one hand, the mathematical function that best approximates the available data population to be obtained, and on the other, the construction of the geometric element that this function represents and, finally, the drawing of the line that graphically synthesizes it. In particular, the function must be one that minimizes the sum of the squares of the distances (or other para-

meters) between the observed data and those of the curve that interpolates them. Best fit types can thus be divided into two categories: Geometric fits, which minimize the geometric distance from the data points to the model curve we want to reproduce; Algebraic fits, used in this experiment, which minimize other logical functions described by algebraic expressions, thus without radicals. Geometric fits allow for greater accuracy compared to algebraic ones, but in practical applications, it is necessary to consider parameters of accuracy, computational lightness, and complexity of calculation, which often make the latter the preferred solution. Indeed, the algebraic fit is usually simple, fast, and reliable, and when the points lie close to the reference model curve, it allows for results that are significantly close to those obtainable with the geometric fit. This is evidenced, for example, by Chernov's work on circular figures [Chernov 2010], which demonstrates how the algebraic fit provides reliable results even when the points are not distributed along the entire arc of the circumference. The function of our quadric model to be minimized (prolate ellipsoid) can be expressed as follows:

$$\text{Eq 1: } \varphi(A, B, C, D, E, F, G, H, I) = \sum_{i=1}^n (Ax_i^2 + By_i^2 + Cz_i^2 + Dy_i z_i + Ex_i z_i + Fx_i y_i + Gz_i + Hy_i + Ix_i + 1)^2$$

where (A, B, C, D, E, F, G, H, I) are simple geometric parameters capable of describing the characteristics of any possible quadric in space.

The operational phases of the methodology we employed are outlined in table (fig. 2) and described step-by-step below.

The point clouds representing the columns must be filtered to eliminate spurious and non-representative points, leaving only those that actually belong to the shaft (fig. 3);

The number of points in the cloud considered is randomly reduced by 80 times. This allows the algorithm to process the data faster without a perceptible change in the results. Specifically, the points were decimated from 154,406 to 1,931 for column 1, from 182,857 to 2,286 for column 2, from 156,482 to 1,957 for column 3, and from 97,051 to 1,214 for column 4;

The best fit algorithm is applied to the decimated point cloud using the quadric equation as

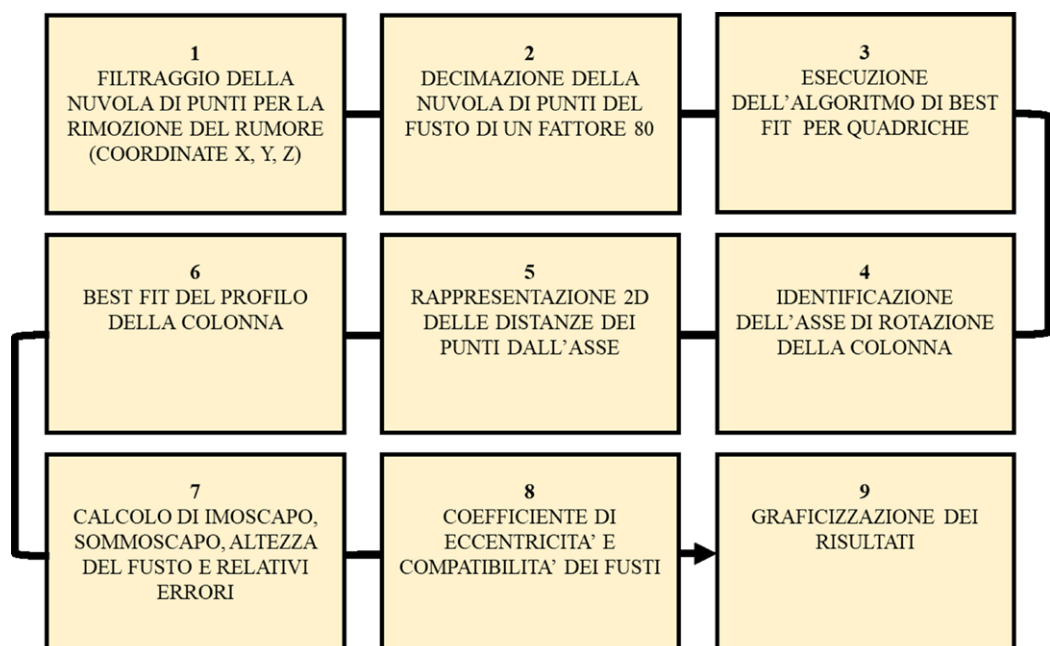


Fig. 2. Block diagram of the methodology used in this work. For each point of the process, you can find a description in the body of the text. Elaboration by the authors.

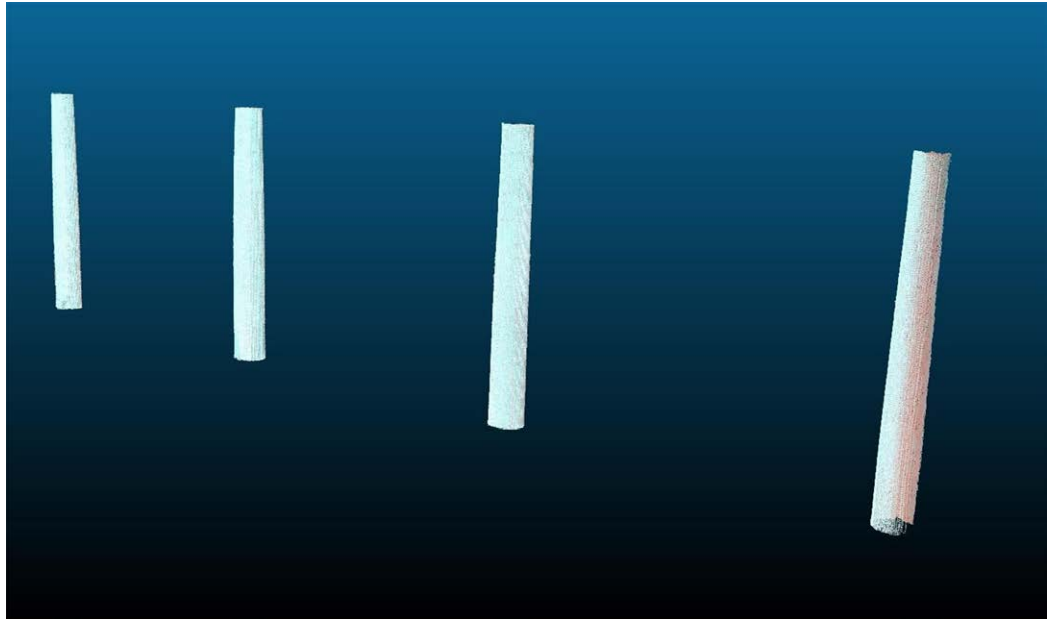


Fig. 3. Point clouds of the shafts of the 4 columns. Elaboration by the authors.

the reference model (eq. 1). Given the shape of the column shaft, the type of quadric to be used as the model is a prolate ellipsoid;  
 Once the quadric parameters are obtained, the equation of the line describing its axis of rotation, and consequently that of the shaft, can be derived;  
 The distribution of the distances of the points from the axis of rotation of the shaft relative to its height is graphically represented. At this stage, the representation shifts from spatial to planar, where the axis of rotation is aligned with the y-axis of the graph (fig. 4);  
 A second fit is performed, this time using the equation of an ellipse as the model (in our study, the shaft profile is approximated to an arc of an ellipse);  
 This allows for the calculation of the radii at the base and top of the shaft and the height of the shafts (the upper and lower limits are considered to be the points positioned at the greatest and least heights relative to the axis of rotation);  
 The eccentricity coefficient of the curves obtained from the best fit is used to verify the potential compatibility of the tapering of the shafts;  
 By graphically representing the obtained results, it is possible to qualitatively detect the presence of similarities and differences in the analyzed shafts.

### Results e analysis

The best fit algorithm returned the data presented in table (fig. 5). It is noted that, in terms of dimensions, shaft 1 has a height compatible with that of the remaining shafts but smaller values for the base and top radii (fig. 6). However, observing the values of the ratio between the top and base radii and the eccentricity coefficients, it is evident that the tapering of shaft 4 is different from all the others (fig. 7). For accuracy, the eccentricity coefficient is calculated as follows:

$$\text{eq. 2: } e = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$$

where a and b are the major and minor semiaxes, respectively, of the ellipse obtained from the best fit of the shaft profile.

Fig. 4. Dimensions and uncertainty of the imoscapo, sommoscapo and height of the shafts of the 4 columns, ratio between the sommoscapo and imoscapo and its uncertainty, eccentricity coefficient of the best fit curves of the four shafts. Elaboration by the authors.

N° Colonna	Raggio imoscapo (m)	Raggio sommoscapo (m)	Altezza (m)	Ratio Sommoscapo/Imoscapo	Coefficiente di eccentricità e
1	0.145±0.002	0.120±0.002	2.644±0.003	1.208±0.018	0.99952
2	0.156±0.002	0.132±0.002	2.644±0.003	1.182±0.017	0.99950
3	0.154±0.003	0.126±0.003	2.646±0.003	1.222±0.025	0.99945
4	0.158±0.003	0.124±0.003	2.627±0.003	1.274±0.024	0.99932

Regarding the inclination of the shafts with respect to the Cartesian axes, all four tend to have similar deviations that stay within 3° from orthogonality (fig. 8).

Fig. 5. angular deviation in degrees between the axes of the columns obtained through the best fit and the Cartesian axes (x, y, z). Elaboration by the authors.

N° Colonna	Scarto asse x (°)	Scarto asse y (°)	Scarto asse z (°)
1	0.96	2.12	-2.33
2	0.75	2.11	-2.23
3	0.94	2.3	-2.49
4	0.81	2.51	-2.64

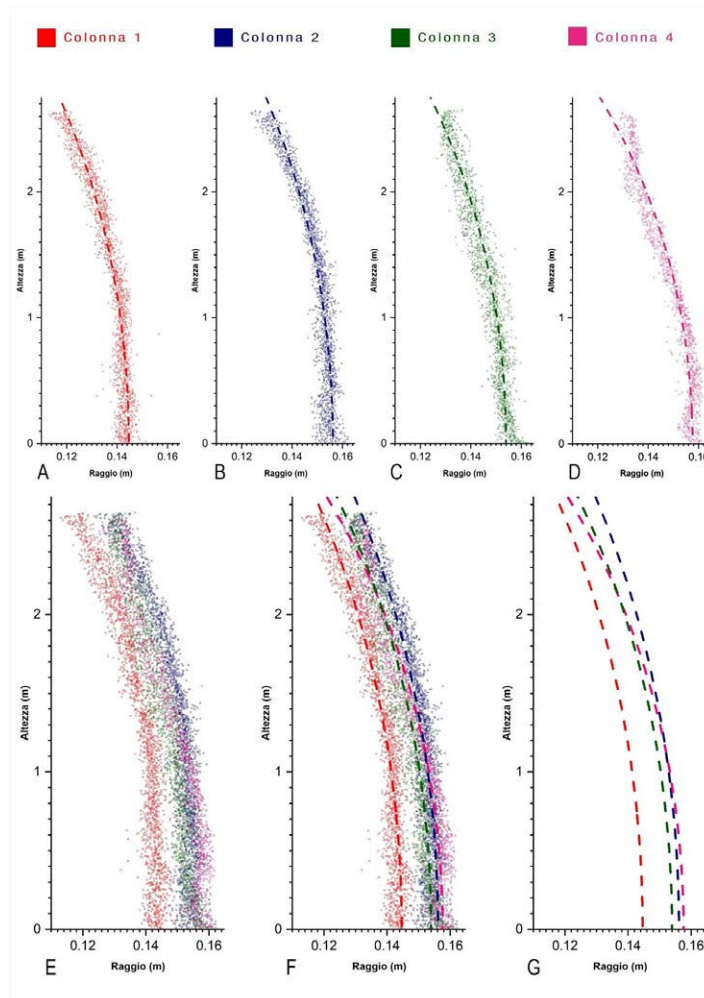


Fig. 6. Distances in meters of the points with respect to the rotation axis of the column (radius) and best fit curve that approximates the profile of the stem (dotted line). The ratio between the x and y axes in the graphs is 1:20 for representation purposes. Elaboration by the authors.



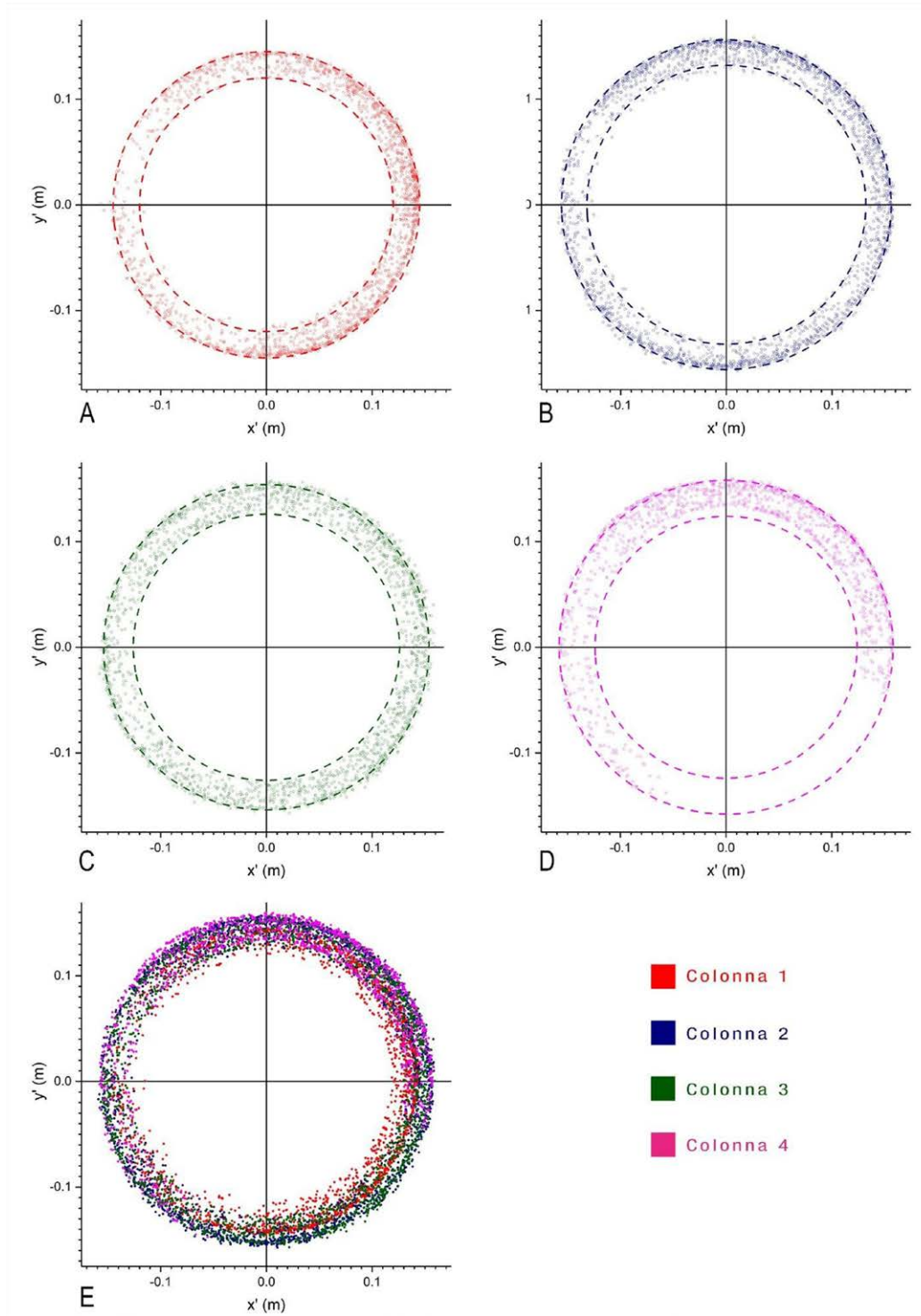


Fig. 7. View of the XY' section of the two columns. The dotted lines indicate the circumferences of the radii at the base and top of the shaft. The polar distribution of the points around the center (0,0) demonstrates the goodness of the fit in determining the rotation axis. Elaboration by the authors.

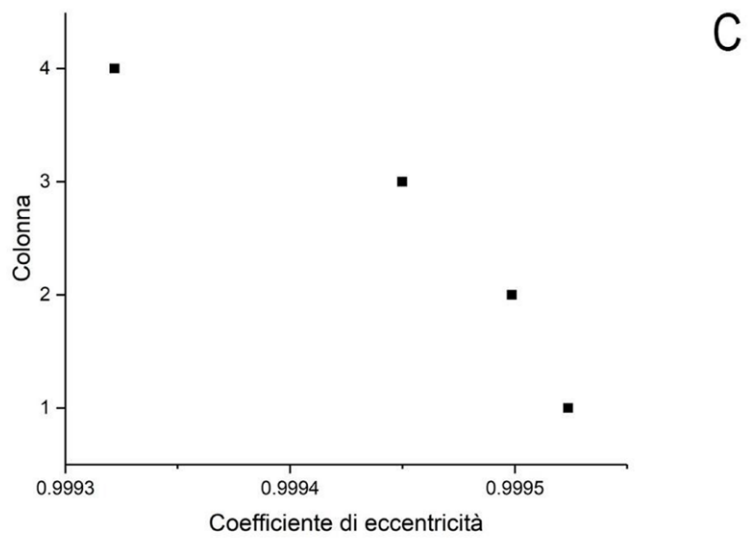
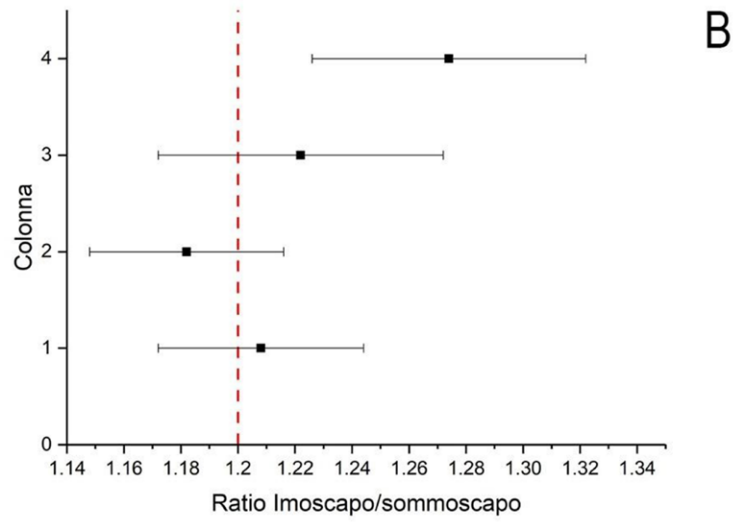
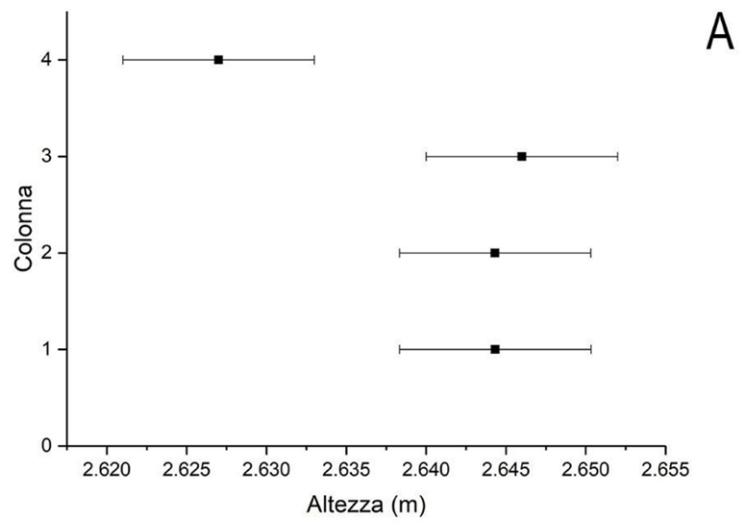


Fig. 8. A, the height values ( $2\sigma$  error) of the 4 columns; B, the values of the ratio between the radii at the base and top of the shaft ( $2\sigma$  error). The red line indicates the expected value for the  $6/5$  ratio between radii at the base and the one on top of the shaft; C, the eccentricity coefficients of the best fit curves of the stem profiles. Elaboration by the authors.

## Conclusions

The experimentation conducted highlights the anomaly in the numerical description of shaft 4 in which the difference in diameter between the imoscape and sommoscape seems to be more pronounced. In fact, the imoscape has a significantly larger diameter than that of the other shafts while the imoscape is smaller than the one of both shaft 1 and shaft 3. This very first result immediately raises some questions about the construction process of the building, the workers and organization of the site, the origin of the shafts not to mention possible undocumented later restorations or replacements. In fact, this anomaly, which cannot be perceived by the eye and is difficult to detect using normal cloud analysis and 2D/3D modeling procedures, brings to light the fact that the profile of one of the 4 shafts analyzed is significantly different from the others, and this leads to the formulation of some hypotheses susceptible to further investigation: is it the simultaneous presence of several craftsmen on the site who each adopt their own “curve” within the overall design scheme? Does the shaft have different origins than the others, for example, is it of perusal and has it undergone readjustment? Was it replaced later for deterioration reasons? One could counter that these are all in all marginal questions and will be able to add little to previous studies. Nonetheless, the illustrated procedure certainly unveils a hitherto unknown detail thus contributing to increasing the level of knowledge of the artifact but above all profitably applies an innovative procedure in the analysis of historical architecture. This is, as mentioned, the presentation of the preliminary stages of a more extensive research that, starting from these assumptions, is already moving toward extending the investigation to all 16 Corinthian columns of the cloister in order to verify whether the anomaly traced on one of the sides is also present elsewhere. A further possible development, on the other hand, concerns the application of the best fit to colonnades made up of rebound materials in order to search for any similarities between shafts or highlight significant divergences. Ultimately, by imagining applying the algorithm to a very wide range of case histories, it would be possible in an almost automated manner to even infer the rule of art employed by certain craftsmen in certain local contexts. In this key, historical study could be enriched with new data in the service of architectural interpretation.

## Notes

[1] The study is part of the activities conducted by Flavio Carnevale as part of his PHD program in Heritage Science under the supervision of Carlo Bianchini and Marika Griffio.

[2] The survey activities were coordinated by professors Carlo Bianchini and Alfonso Ippolito in the context mainly of two regional programs financed by LazioInnova in the framework of the PON-FESR 2017-2023: the HBIM4LazioHERITAGE projects (Sistema informativo integrato HBIM per la conservazione e la gestione di siti culturali nel Lazio) coordinated by CNR e AMEN (Augmented Museum Environment Network) presented by Centro Culturale Internazionale Dart S.r.l. Both involved DSDRA of Sapienza, Università di Roma.

[3] These include the analysis of stone circles from English megalithic sites with the aim of verifying whether the ancient people who built them had used a common unit of measurement.

[4] CloudCompare. 3D point cloud and mesh processing software [<https://www.danielgm.net/cc/>]

## References

3D point cloud and mesh processing software. Open Source Project. <<https://www.danielgm.net/cc/>> (consultato il 31 Luglio 2024).

Bianchini C. (2017). Quale regola per il Tempietto?. In F. Cantatore (Ed.), *Il Tempietto di Bramante nel monastero di San Pietro in Montorio*, pp. 267-274. Roma: Edizioni Quasar.

Bianchini C. (2020). A methodological approach for the study of domes. In *Nexus Network Journal*, vol. 22, n. 4, pp. 983-1013. <<http://dx.doi.org/10.1007/s00004-020-00526-9>>

Bianchini C. et al. (2020). La costruzione scientifica della memoria: il caso della nuova antica città di Ninfa| The Scientific Construction of Memory: the Case of the New Ancient City of Ninfa. In A. Arena et al. (Eds.), *CONNETTERE-Un disegno per*

annodare e tessere · CONNECTING-Drawing for weaving relationships. Atti del 42° Convegno internazionale dei docenti della Rappresentazione. Reggio Calabria, 16-18 settembre 2020, pp. 1760-1777. Milano: FrancoAngeli.

Bruschi A. (2010). *Bramante*. Bari: Laterza.

Chernov N. (2010). *Circular and Linear Regression: Fitting Circles and Lines by Least Squares*. Boca Raton: CRC Press.

Griffo M. (2022). Semantics through models. Ex ante and ex post classification processes. In L. Inzerillo, F. Acuto (Eds.). *Digital & Documentation*, vol. 4 pp. 61-71. Pavia: Pavia University Press.

Pistellato M. et al. (2019). Robust Cylinder Estimation in Point Clouds from Pairwise Axes Similarities. In M. Castrillon-Santana, M. De Marsico, A. Fred (Eds.), *Proceedings of the 8th International Conference on Pattern Recognition Applications and Methods /ICPRAM*. Roma, 24-26 febbraio 2024, vol. 1, pp. 640-647. Praga. <<http://dx.doi.org/10.5220/0007401706400647>>

Späth H. (2001). Least squares fitting with rotated paraboloids. In *Mathematical Communications*, vol. 6, n. 2.

Thom A. (1973). A megalithic lunar observatory in Orkney: the ring of Brogar and its cairns. In *Journal for the History of Astronomy*, vol. 4, pp. 111-123.

#### Authors

Carlo Bianchini, Sapienza Università di Roma, [carlo.bianchini@uniroma1.it](mailto:carlo.bianchini@uniroma1.it)  
Flavio Carnevale, Sapienza Università di Roma, [flavio.carnevale@uniroma1.it](mailto:flavio.carnevale@uniroma1.it)  
Marika Griffo, Sapienza Università di Roma, [marika.griffo@uniroma1.it](mailto:marika.griffo@uniroma1.it)

To cite this chapter: Carlo Bianchini, Flavio Carnevale, Marika Griffo (2024). Algoritmi di best fit applicati allo studio dell'architettura storica/Best fit algorithms applied to the study of historical architecture. In Bergamo F., Calandriello A., Ciammaichella M., Friso I., Gay F., Liva G., Monteleone C. (Eds.). *Misura / Dismisura. Atti del 45° Convegno Internazionale dei Docenti delle Discipline della Rappresentazione/Measure / Out of Measure. Transitions. Proceedings of the 45th International Conference of Representation Disciplines Teachers*. Milano: FrancoAngeli, pp. 879-898.