

# Geometrie coniugate: gli ingranaggi a nuclei iperboloidici

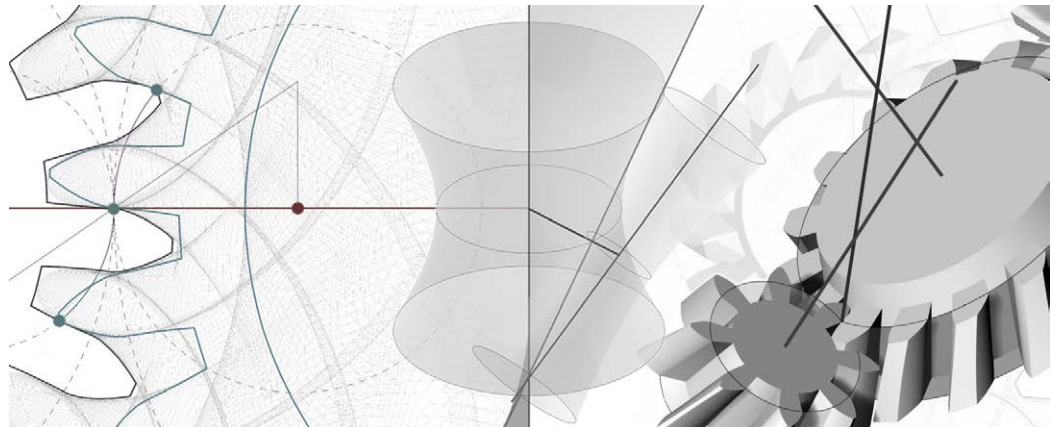
Alessio Buonacucina  
 Prokopios Kantas  
 Graziano Mario Valenti

## *Abstract*

La teoria geometrica degli ingranaggi, oggi studiata prevalentemente per via analitica, per circa due secoli, a partire dal'700, è stata dominio della geometria descrittiva. Un dominio che trovò un limite espressivo, quando la complessità e la varietà delle geometrie e dei movimenti cinematici ad esse impressi divennero impraticabili da rappresentarsi nella loro continuità, con i metodi, le tecniche e gli strumenti del tempo. Gli ausili alla elaborazione e alla modellazione digitale hanno da tempo reso valicabile questo confine. Il presente studio, pertanto, indaga uno dei problemi classici della teoria geometrica degli ingranaggi, mostrandone la possibile generalizzazione e nel contempo restituendo valore ai metodi di soluzione sintetica, propri della geometria descrittiva.

## *Parole chiave*

Philippe de La Hire, teoria geometrica degli ingranaggi, geometria descrittiva, iperboloidi di rotazione, modellazione parametrica



Sintesi del processo di  
 ricerca. Elaborazione degli  
 autori.

## Introduzione

Lo studio del movimento è indagato dal punto di vista geometrico descrittivo all'interno della Teoria Geometrica degli Ingranaggi, una branca della *Géométrie Descriptive*, che vede il suo principale sviluppo a partire dalla fine del '700 sino agli inizi del '900. Obiettivo di questo intervento è l'indagine delle geometrie coniugate mediante i metodi digitali della rappresentazione, ausili di grande utilità, per studiarne e sperimentarne l'applicazione.

Il trascorrere del tempo e il movimento nello spazio concorrono alla definizione degli enti geometrici fondamentali, qualificandosi come parametri la cui integrazione è necessaria per il controllo della forma e la sua rappresentazione. Sin dai primi studi, la Teoria Geometrica degli Ingranaggi focalizza in modo particolare l'analisi e la generazione della forma utile alla loro definizione, in funzione della natura delle entità geometriche adottate e del loro posizionamento reciproco nello spazio, problemi la cui soluzione interessa in modo specifico l'area della geometria descrittiva. Il rapporto tra tempo e spazio durante il movimento degli enti geometrici incide sulla varietà nella definizione di curve e superfici. Data l'ampiezza delle casistiche ottenibili, saranno qui trattate geometrie coniugate definite da un movimento a rapporto di velocità costante (fig. 1), mirando ad una lettura generalizzata del caso e demandando lo studio del rotolamento a rapporto di velocità variabile a successivi approfondimenti (fig. 2).

La presente trattazione è dunque composta da una introduttiva indagine storico-critica, seguita dall'analisi geometrico-descrittiva propedeutica all'approfondimento della natura delle curve impiegate e delle loro derivate. Il successivo studio delle superfici sviluppate su vincoli cinematici è condotto su una applicazione pratica, scelta nel contesto della Teoria Geometrica degli Ingranaggi.

## Evoluzione della teoria geometrica degli ingranaggi

I primi studi che interessano la costruzione geometrico-descrittiva degli ingranaggi risalgono al 1694, anno in cui Philippe de La Hire analizza nel suo trattato le proprietà delle curve cicloidi piane e la loro applicabilità alla definizione della profilatura delle ruote dentate. In questo suo contributo le proposizioni sono dimostrate in via sintetica attraverso il confronto delle aree degli enti, esaminati in momenti distinti del loro moto, arrivando così a definire quelli che saranno i tre principali procedimenti per la costruzione dei profili dei denti. Il primo trattato teorico-pratico è attribuito a Charles E. L. Camus, che affronta il tema della costruzione di diverse tipologie di macchine, estendendo per la prima volta la soluzione al problema degli ingranaggi conici, mediante l'uso delle epicicloidi sferiche. L'argomento è successivamente affrontato da diversi studiosi [1], ma è con la nascita della *École Polytechnique*, e grazie alla figura di Gaspard Monge, che queste ricerche sono integrate all'interno della teoria delle macchine, da intendersi come teoria applicata all'interno della *Géométrie Descriptive*. In questo contesto sono istituiti i primi corsi di meccanica, tenuti da J. P. Hachette, all'interno dei quali le macchine sono categorizzate in funzione della conservazione o alterazione delle tipologie di moto, rettilineo o circolare. All'interno di questa classificazione sono individuabili macchine costituite da ruote dentate, suddivise a loro volta in funzione del posizionamento reciproco degli assi [Hachette 1808]. È importante precisare che sino a questo momento la trasmissione del moto da un asse a un altro era contemplata solo nei casi in cui questi fossero paralleli o incidenti.

Verso la fine dell'800, sulle basi degli studi e delle classificazioni precedenti, Théodore Olivier scrive la *Théorie géométrique des engranages*, all'interno della quale teorizza e dimostra in via sintetica la possibile soluzione al problema generalizzato: la trasmissione del moto tra due assi sghembi. La complessità data dal movimento delle superfici, indagate con i metodi grafici della rappresentazione propri di quel periodo, non conduce ad un'agevole descrizione sintetica del problema, il cui studio è affrontato, più agevolmente, in via analitica. Tale tema viene dunque indagato dalle discipline che si avvalgono della più efficace definizione in forma simbolica della matematica [Salvatore 2019]. A fine '900, grazie all'avvento degli strumenti digitali dedicati alla rappresentazione, si apre una nuova e fertile stagione per lo

studio e la simulazione di problemi geometrici e cinematici complessi: un'occasione particolarmente favorevole per riaffermare la centralità della geometria descrittiva, nell'indagare e sperimentare la teoria degli ingranaggi.

### Geometrie coniugate nel moto a rapporto di velocità costante

L'ingranaggio è un meccanismo composto da due ruote dentate, ognuna fissata sul proprio albero di rotazione, il cui scopo è trasferire il moto rotatorio di un asse ad un altro. La trasmissione del movimento avviene interessando il problema delle geometrie coniugate, poiché durante la rotazione i profili delle ruote dentate restano costantemente in contatto di tangenza fra loro. Essendo il sistema costituito dalla combinazione di due movimenti, si procede all'analisi del sistema congruente costituito dal moto relativo del nucleo di una ruota dentata rispetto al suo coniugato [Codazza 1854].

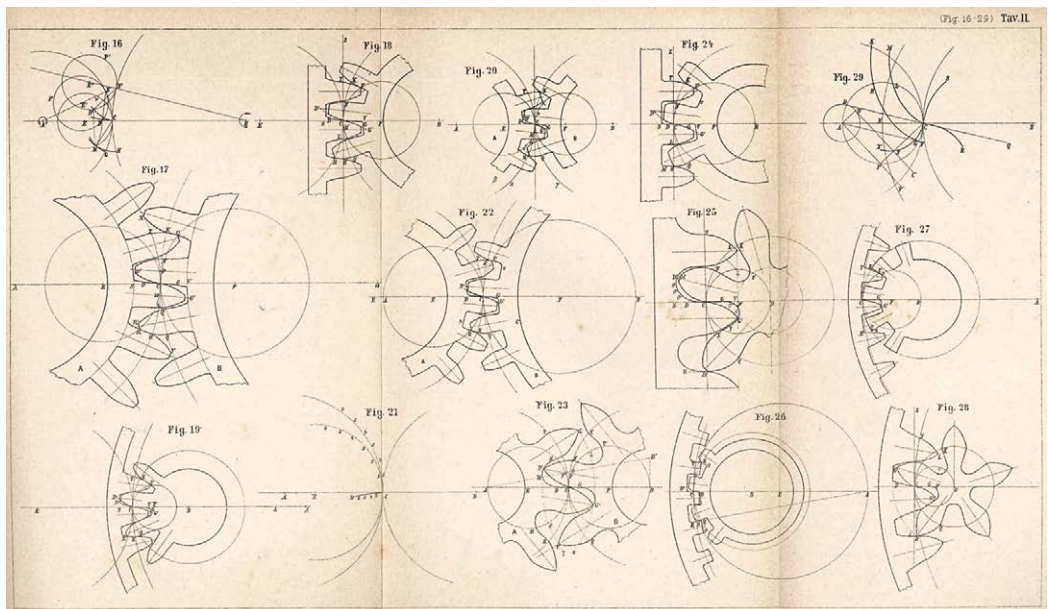


Fig. 1. L'elaborato riporta la costruzione dei profili coniugati dei denti dell'ingranaggio per la trasmissione del moto a rapporto di velocità costante [Tessari 1902, tav. II].

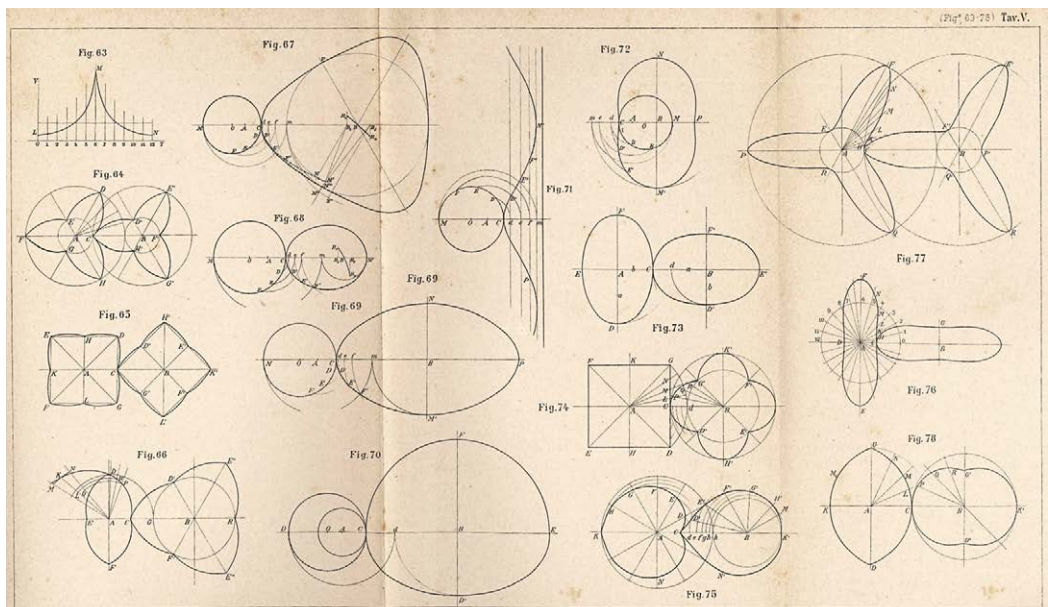


Fig. 2. L'elaborato riporta alcuni esempi di profili per la trasmissione del moto a rapporto di velocità variabile [Tessari 1902, tav. V].

Il progetto di forme che rispettino tali vincoli richiede la considerazione di diversi parametri, codificati da P. de La Hire in un procedimento che appropria progressivamente tre problemi distinti [2]: la natura geometrica del nucleo rispetto alla posizione reciproca dei loro assi, la costruzione di profili coniugati dei denti della ruota, la natura geometrica delle superfici dei denti. La soluzione al primo problema passa per la costruzione delle superfici che costituiscono il nucleo delle ruote, ovvero quelle superfici in grado di scorrere l'una sull'altra mantenendo una linea di contatto. Poiché le possibili posizioni reciproche degli assi sono tre – paralleli, incidenti, sghembi – si avranno tre rispettive soluzioni: nuclei cilindrici nel caso in cui gli assi di rotazione abbiano in comune un punto improprio, nuclei conici nel caso abbiano in comune un punto proprio e iperboloidi a una falda di rivoluzione qualora non esista un piano che li contiene [Olivier 1844]. La soluzione al secondo problema, quello della costruzione dei profili coniugati [3], è raggiungibile attraverso diversi passaggi: stabiliti il passo e il rapporto tra il numero dei denti delle ruote, viene inizialmente definita la curva involupante tutte le posizioni consecutive assunte da un profilo scelto (fig. 3), la quale costituisce il profilo ad esso coniugato, dopodiché sono individuati gli archi di azione dell'ingranaggio attraverso la definizione della linea dei contatti, intesa come luogo geometrico costituito dai punti di tangenza nelle successive posizioni del sistema [4] [Tessari 1902]. La soluzione al terzo problema indaga la natura geometrica delle superfici dei denti e nel caso generale non può essere ricondotta allo studio nel piano. La scelta della superficie involupata è arbitraria e su di essa saranno individuate una serie di linee convenientemente orientate, le cui coniugate andranno a costituire le direttrici della superficie da determinare [Kantas 2015]. Appare evidente quanto la definizione di ingranaggi ricadenti nel caso generale richieda uno strumento opportunamente concepito per il controllo di una tale mole di dati. Per questa ragione prima dell'avvento dell'ausilio digitale non è stato possibile conciliare la comunità scientifica riguardo alla concreta realizzazione di tali soluzioni. Perciò la trasmissione del moto tra assi sghembi è comunemente risolta con l'introduzione di un asse ausiliario, ad essi incidente, ovvero ricorrendo a due coppie di ruote dentate coniche per la soluzione del problema (fig. 4).

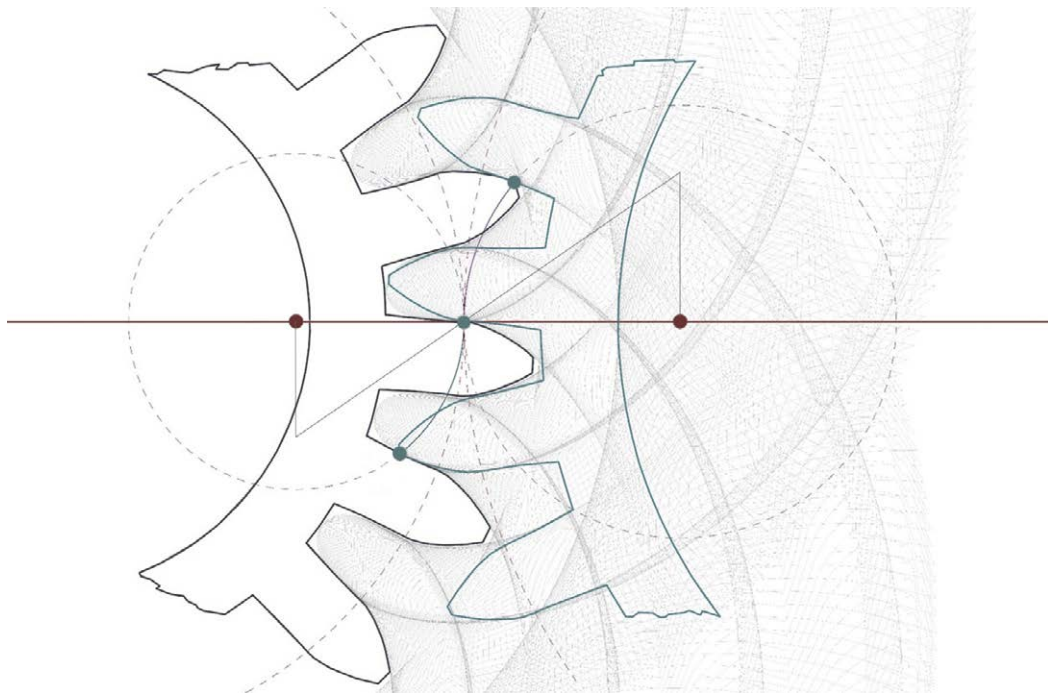


Fig. 3. Rappresentazione di un profilo e costruzione del suo coniugato tramite involupamento delle posizioni assunte durante il moto relativo. Concorrono alla definizione dell'ingranaggio il rapporto di trasmissione a velocità costante (rosso) e la conservazione di tre punti di contatto tra i denti durante la rotazione (verde). Elaborazione degli autori.



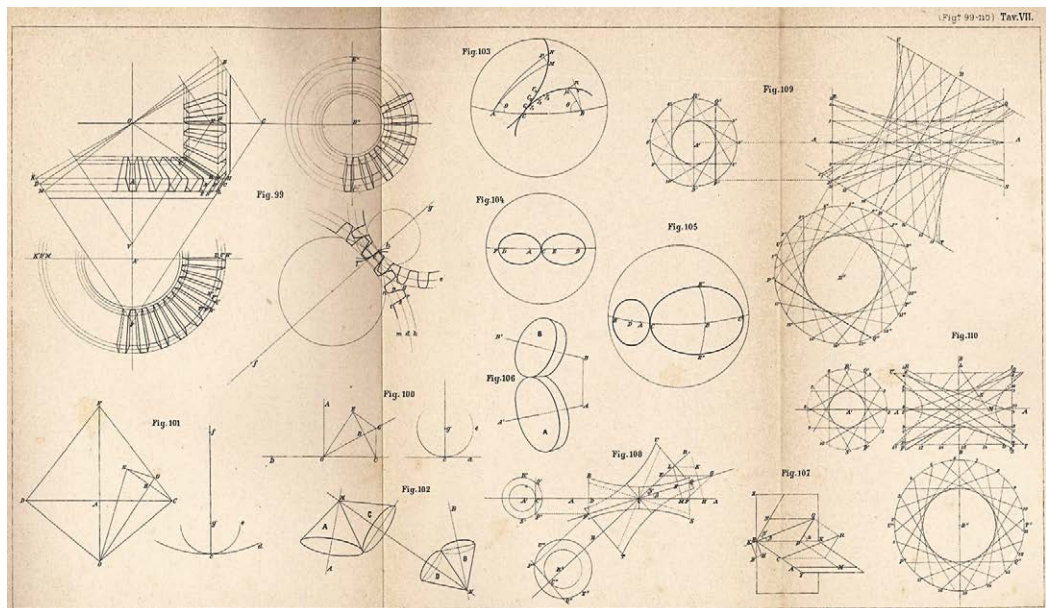


Fig. 4. L'elaborato indaga la natura delle diverse tipologie di nuclei per la trasmissione del moto a rapporto di velocità costante. In Fig. 102 è riportata la soluzione della trasmissione tra assi sghembi per mezzo di nuclei conici [Tessari 1902, tav. VII].

### Soluzione al caso generale

L'esistenza della forma, e quindi la sua realizzabilità, può essere dimostrata per mezzo di una puntuale costruzione geometrica. Ciò risulta ancor più evidente in un'epoca in cui il progresso tecnologico consente un passaggio quasi immediato dal disegno di progetto alla sua realizzazione tramite strumenti di prototipazione rapida. Il modello digitale matematico diventa pertanto indispensabile, poiché il progetto necessita di essere gestito con strumenti che ne consentano la parametrizzazione, ausilio fondamentale per gestire la varietà e la complessità delle informazioni che è necessario controllare nei diversi processi di involuppo delle entità geometriche [5].

Le operazioni di parametrizzazione per la definizione degli enti geometrici ricalcano i passaggi del procedimento prima esposto, teorizzato da de La Hire e adottato da tutti gli autori successivi. La costruzione delle geometrie coniugate dei nuclei sono munite di denti per la trasmissione del moto, anch'essi superfici coniugate designate alla trasmissione del moto. Dati due assi sghembi posizionati arbitrariamente, la generatrice comune alle superfici dei due nuclei è determinata in funzione del rapporto di trasmissione del moto da conferire al sistema. I movimenti relativi di tale retta attorno agli assi dati generano gli iperboloidi di rivoluzione a una falda che costituiscono i due nuclei (fig. 5). Nell'ottica di una soluzione generalizzata, sono stati scelti valori arbitrari per la definizione della conformazione del sistema: gli assi formano un angolo di 52 gradi e la linea di contatto è collocata in funzione di un rotolamento delle superfici con rapporto di velocità di 2:1.

Risolto il primo problema della definizione dei nuclei di rotazione, si procede con la soluzione del secondo, operando attraverso la parametrizzazione delle curve secondo la loro definizione di luogo geometrico (fig. 6).

La scrittura e l'applicazione di un algoritmo a struttura nodale, concepito per il controllo delle successive posizioni degli enti geometrici in movimento, diviene propedeutico ad un agevole definizione della curva involupante. Tale approccio permette di definire con maggiore precisione e controllo le operazioni di costruzione di ogni ente geometrico durante il movimento relativo rispetto al suo coniugato, consentendo di indagare posizioni potenzialmente infinite, se messe a confronto con le metodologie della rappresentazione su cui è stata fondata la teoria. La costruzione di profili con nuclei delle superfici di rivoluzione è generalmente risolta adottando come curva involupata l'evolvente della circonferenza individuata su un piano ortogonale all'asse di rivoluzione, poiché questa possiede proprietà

particolarmente indicate alla gestione del progetto: in primo luogo la sua coniugata è costituita da un'altra evolvente, seppur diversa dalla prima, e inoltre è possibile utilizzare la stessa curva sia sul fianco che sulla costa dello stesso profilo per la trasmissione simmetrica del moto, permettendo dunque l'inversione della rotazione dell'intero sistema [Paris 2012a]. Tuttavia in una trattazione del caso generale, anziché seguire l'ordine codificato dai testi di riferimento, risulta conveniente definire inizialmente la natura geometrica delle superfici involupate; a queste sono estrapolate tre sezioni convenientemente orientate, i cui involuppi costituiscono le direttrici della superficie coniugata (fig. 7). Nei modelli esemplificativi proposti, si veda la soluzione del problema partendo da differenti superfici involupate: la scelta di un piano in un caso (fig. 8a), e di un paraboloide iperbolico nell'altro (fig. 8b). Le direttrici individuate per involuppo definiscono quindi con una generatrice retta la superficie coniugata, che risulta essere rispettivamente un cilindroide (a) e un paraboloide iperbolico (b). Si noti come entrambi i modelli costituiscano una soluzione geometricamente corretta allo stesso problema, senza variazioni nel posizionamento reciproco degli assi e nel rapporto di trasmissione delle velocità. La selezione di una delle molteplici soluzioni possibili sarà determinata dal contesto di utilizzo, riflettendo le istanze progettuali di altre discipline. Il modello digitale e la sua simulazione virtuale in movimento dimostrano l'esistenza della soluzione al caso generale precedentemente teorizzata. La sua realizzazione fisica (fig. 9) attesta la corretta funzionalità del progetto che, sebbene sia costruito su considerazioni esclusivamente geometriche, non disattende le condizioni fisiche ricadenti in altre discipline.

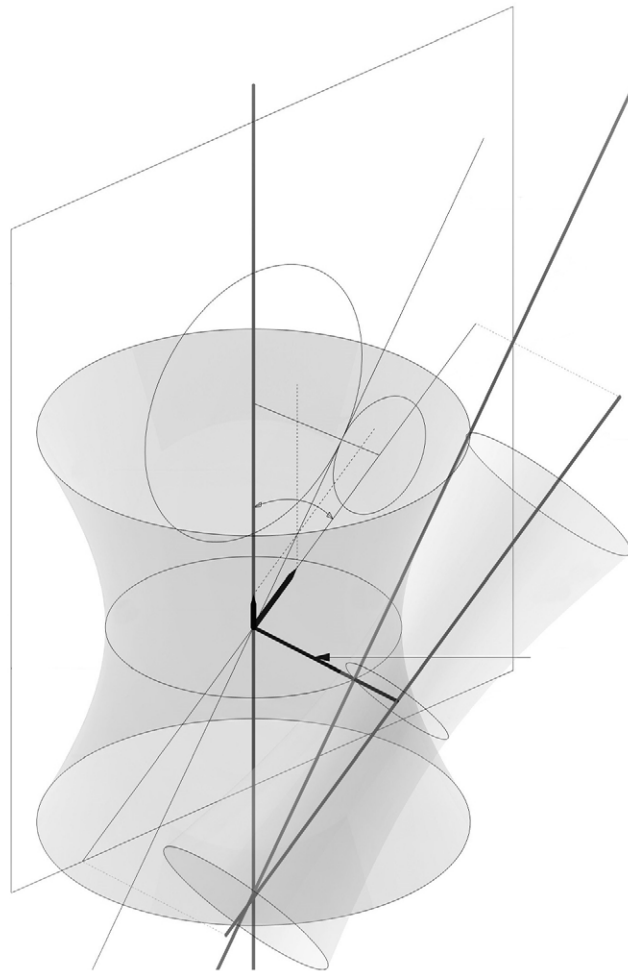


Fig. 5. Iperboloidi ad una falda, superfici di rivoluzione dimensionate con un rapporto di trasmissione della velocità di 2:1. Elaborazione degli autori.

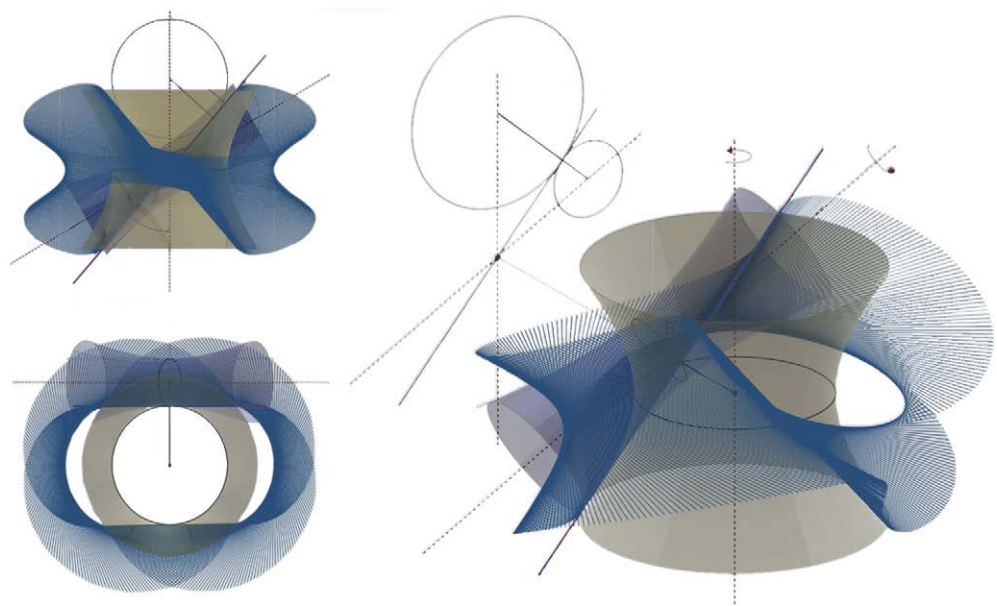


Fig. 6. Superficie generata nello studio cinematico dalla curva generatrice comune agli iperboloidi durante il moto relativo. Elaborazione degli autori.

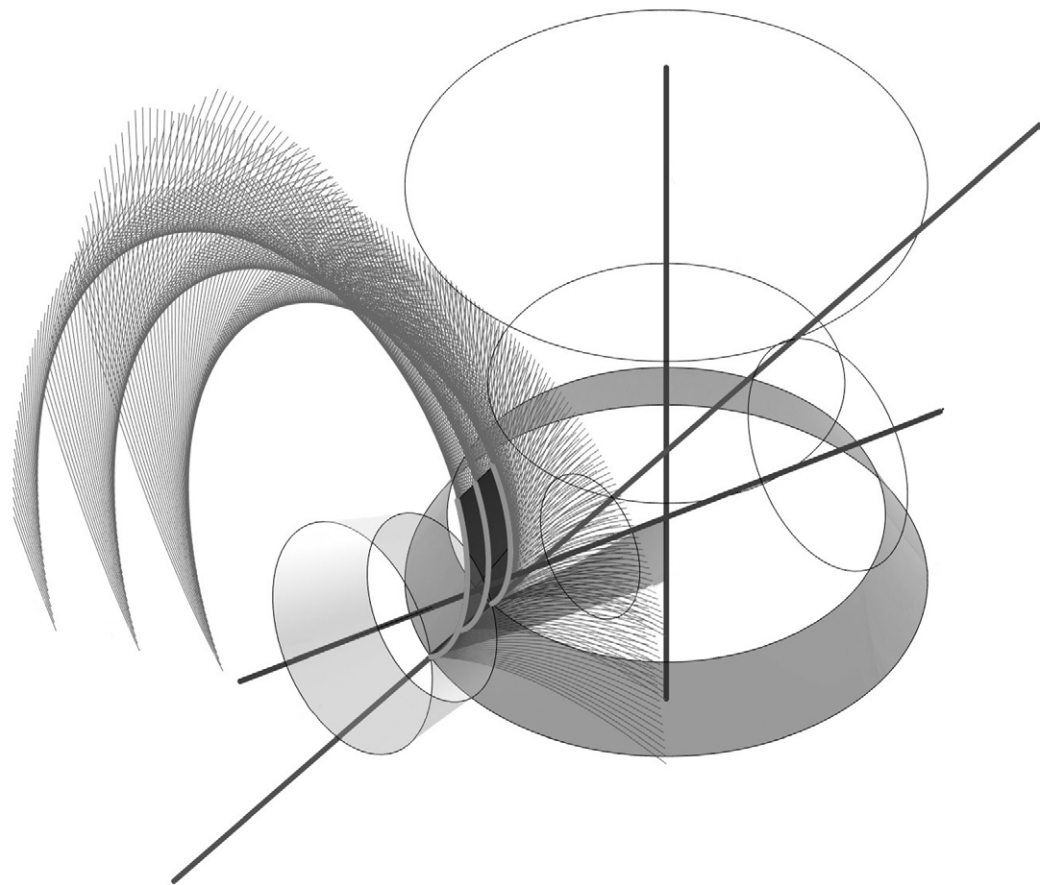


Fig. 7. Costruzione delle direttrici della superficie coniugata sull'involuppo delle posizioni di tre profili convenientemente orientati. Elaborazione degli autori.

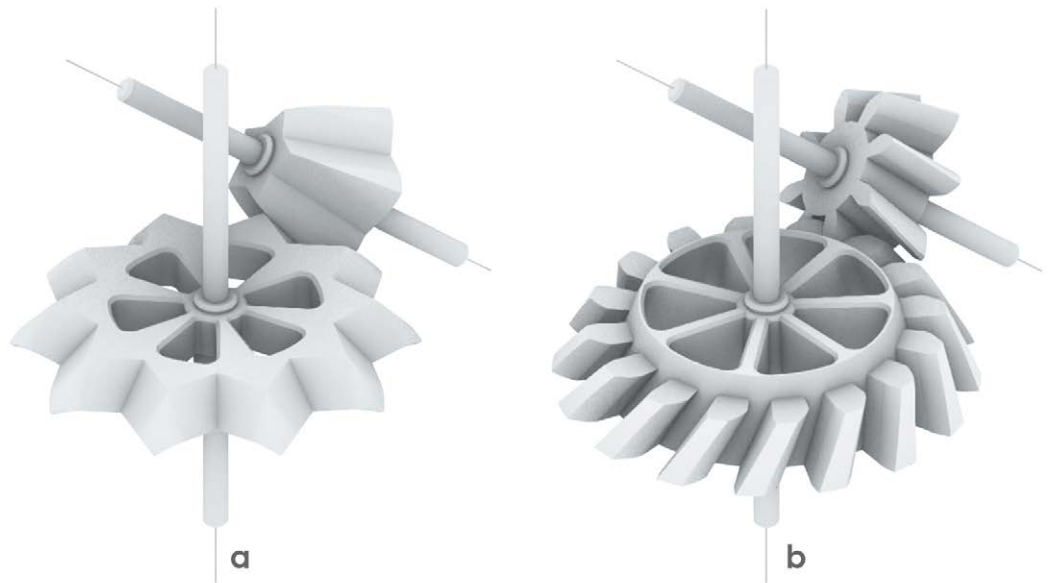


Fig. 8. Ingranaggi con medesimo rapporto di trasmissione della velocità, generati sulla stessa posizione reciproca degli assi. Il raggiungimento di soluzioni diverse è da attribuirsi a scelte progettuali, quali il numero dei denti e la natura delle superfici involupate: un piano (a) e un paraboloido iperbolico (b). Elaborazione degli autori.



Fig. 9. Prototipo realizzato in alluminio e acciaio. L'impiego di porzioni di iperboloidi lontane dal punto di minima distanza tra gli assi di rivoluzione induce sforzi assiali che vengono dissipati tramite l'utilizzo di cuscinetti a sfera obliqui, montati in configurazione contrapposta.



## Conclusioni

Lo studio delle geometrie coniugate, e in particolare la loro definizione come curve e superfici luogo geometrico, trova immediata applicazione nell'ottimizzazione di sistemi articolati in movimento, propri della teoria geometrica degli ingranaggi.

Questo intervento affronta la generalizzazione del problema della trasmissione del moto ad assi sghembi, in particolare la definizione dell'ingranaggio a nucleo iperboloidico, e ne esemplifica funzionamento e realizzabilità. In questo modo si intende fornire un utile contributo ed impulso ad ulteriori studi a riguardo di una tipologia di ingranaggio ad oggi poco diffusa e considerata e verso la quale è ancora presente una nutrita remota e poco giustificata scetticità.

Questa trattazione, oltre a voler fornire un'indagine geometrico-descrittiva che funga da supporto per nuovi studi da parte di altre discipline tecnico scientifiche, vuole anche dimostrare come gli strumenti digitali della Scienza della Rappresentazione possano assumere un ruolo cardine nella ricerca multidisciplinare e nello sviluppo di soluzioni sintetiche per la Teoria delle Macchine.

## Note

[1] Tra questi, Eulero stabilisce le condizioni affinché due curve possano ruotare l'una sull'altra senza scorrimento e dimostra che non è possibile costruire ingranaggi cilindrici in cui siano soddisfatte allo stesso tempo il rapporto costante fra le velocità angolari degli assi e l'attrito volvente tra i profili dei denti.

[2] Per una trattazione approfondita delle soluzioni ai tre problemi geometrico-descrittivi si rimanda a Kantas P.[Kantas 2015].

[3] Nella trasmissione del moto tra elementi coniugati, il profilo che imprime la spinta è definito costa, mentre quello che la riceve fianco. In generale, prima che termini il contatto tra due profili, altri due dovranno entrare in presa affinché il moto della ruota sia trasmesso con continuità: tale regola è da intendersi come consuetudine derivata da prove empiriche e non come un enunciato rigorosamente dimostrato.

[4] Il profilo coniugato di un profilo dato può essere considerato come il luogo geometrico dei piedi delle normali condotte dai successivi punti di contatto delle due circonferenze primitive alle corrispondenti posizioni del profilo dato.

[5] Le verifiche delle soluzioni discusse in questo studio sono operate mediante i laboratori virtuali della geometria descrittiva digitale.

## Ringraziamenti

Si desidera ringraziare Polytech Lab s.r.l. azienda co-finanziatrice della borsa di dottorato (D.M. n. 352/22) di cui è titolare Alessio Buonacucina, per il prezioso supporto e contributo alla ricerca fornito a tutti gli autori.

## Riferimenti bibliografici

Branca G. (1629). *Le macchine*. Roma: Mascardi.

Camus C.E.L. (1752). *Cours de mathématique, Éléments de mécanique statique*. Paris: Prault.

Ceccarelli M., Cigola M. (2009). Descriptive Geometry and the Theory of Mechanisms in XIX century Italian Engineering: similarities and interrelationships. In *Disegnare/Drawing: Ideas, images*, anno X, n. 39, pp. 12-25.

Cigola M. (2012). Elogio di teorie parallele: Geometria descrittiva e Meccanica applicata. In M. Filippa, L. Carlevaris (a cura di). *Elogio della teoria, identità delle discipline del disegno e del rilievo*. Atti del 34° convegno internazionale dei docenti di rappresentazione.. Roma 13-15 Dicembre 2012, pp. 39-46. Roma: Gangemi.

Codazza G. (1854). *Teoria geometrica degli ingranaggi*. Milano: Giuseppe Bernardoni.

Hachette J.P. (1808). *Essai sur la composition des machines*. Paris: Imprimerie Imperiale.

Hachette, J.P. (1811). *Traité élémentaire des machines*. Paris: Klostermann.

Kantas P. (2015). *Teoria geometrica degli ingranaggi*. Tesi di dottorato XXVIII ciclo in Scienze della Rappresentazione e del Rilievo. Sapienza Università di Roma.

La Hire P.de. (1694). *Mémoires de mathématique et de physique*. Paris: Imprimerie Imperiale.

Loria G. (1921). *Storia della Geometria Descrittiva dalle origini sino ai giorni nostri*. Milano: Hoepli.

- Migliari R. (1997). Il Modello Digitale Continuo. In *Disegnare Idee Immagini*, vol. 15, pp. 59-66.
- Migliari R. (2001). *Geometria dei Modelli: Rappresentazione grafica e informatica per l'architettura e per il design*. Roma: Edizioni Kappa.
- Migliari R. (2009). Metodi e tecniche della rappresentazione digitale. In L. Unali (a cura di). *New Lineamenta*, pp. 19-31. Roma: Edizioni Kappa.
- Migliari R. (2009). *Geometria Descrittiva*, vol. 1, 2. Milano: Città Studi.
- Migliari R. (2012). La Geometria descrittiva nel quadro storico della sua evoluzione dalle origini alla rappresentazione digitale. In L. Carlevaris, L. De Carlo, R. Migliari (a cura di). *Attualità della geometria descrittiva*. Roma: Gangemi.
- Olivier T. (1842-1843). *Cours de Géométrie Descriptive*. Paris: Dunod.
- Olivier T. (1843-1870). *Compléments de Géométrie Descriptive*. Paris: Dunod.
- Olivier T. (1844). *Théorie géométrique des engrenages*. Paris: Dunod.
- Paris L. (2012). Teoria geometrica degli ingranaggi. In A. Casale (a cura di). *Geometria descrittiva e rappresentazione digitale: Memoria e innovazione*, vol. II, pp. 63-84. Roma: Edizioni Kappa.
- Paris L. (2012). Geometrie coniugate. In *Disegnarecon*, vol. 9, pp. 235-244. <https://doi.org/10.6092/issn.1828-5961/3172>
- Salvatore M. (2019). Geometria delle linee curve per la genesi della forma. In L. De Carlo, L. Paris (a cura di). *Le linee curve per l'architettura e il design*, pp. 73-108. Milano: FrancoAngeli.
- Tessari D. (1871). Sopra la costruzione degli ingranaggi ad assi non concorrenti. In *Atti della R. Accademia delle Scienze*. Torino.
- Tessari D. (1890). *La cinematica applicata alle machine*. Torino: Loescher.
- Tessari D. (1902). *La costruzione degli ingranaggi: ad uso delle scuole degli ingegneri e dei meccanici*. Torino: Fratelli Bocca.
- Vernant J. P. (2010). *L'immagine e il suo doppio. Dall'era dell'idolo all'alba dell'arte*. Milano-Udine: Mimesis.

#### **Autori**

Alessio Buonacucina, Sapienza Università di Roma, [alessio.buonacucina@uniroma1.it](mailto:alessio.buonacucina@uniroma1.it)  
 Prokopios Kantas, Polytech Lab S.r.l., [prokopiskantas@gmail.com](mailto:prokopiskantas@gmail.com)  
 Graziano Mario Valenti, Sapienza Università di Roma, [grazianomario.valenti@uniroma1.it](mailto:grazianomario.valenti@uniroma1.it)

*Per citare questo capitolo:* Alessio Buonacucina, Prokopios Kantas, Graziano Mario Valenti. (2024). Geometria coniugate: gli ingranaggi a nuclei iperbolici/Conjugate geometries: hyperboloidal core gears. In Bergamo F., Calandriello A., Ciammaichella M., Friso I., Gay F., Liva G., Monteleone C. (a cura di). *Misura / Dismisura. Atti del 45° Convegno Internazionale dei Docenti delle Discipline della Rappresentazione / Measure / Out of Measure. Transitions. Proceedings of the 45th International Conference of Representation Disciplines Teachers*. Milano: FrancoAngeli, pp. 987-1006.

# Conjugate geometries: hyperboloidal core gears

Alessio Buonacucina  
Prokopius Kantas  
Graziano Mario Valenti

## *Abstract*

The geometric theory of gears, predominantly studied analytically today, has been within the domain of descriptive geometry for about two centuries, starting from the 18th century. A domain that faced expressive limitations as the complexity and variety of gear geometries and kinematic movements rendered their continuous representation impractical with the methods, techniques, and tools available at the time. Digital processing and modeling aids have long made this boundary surmountable. The present study investigates one of the classic problems in gear geometry, demonstrating its potential for generalization while also restoring value to the synthetic solution methods inherent in descriptive geometry.

## *Keywords*

Philippe de La Hire, geometric theory of gears, descriptive geometry, hyperboloid of revolution, parametric modelling

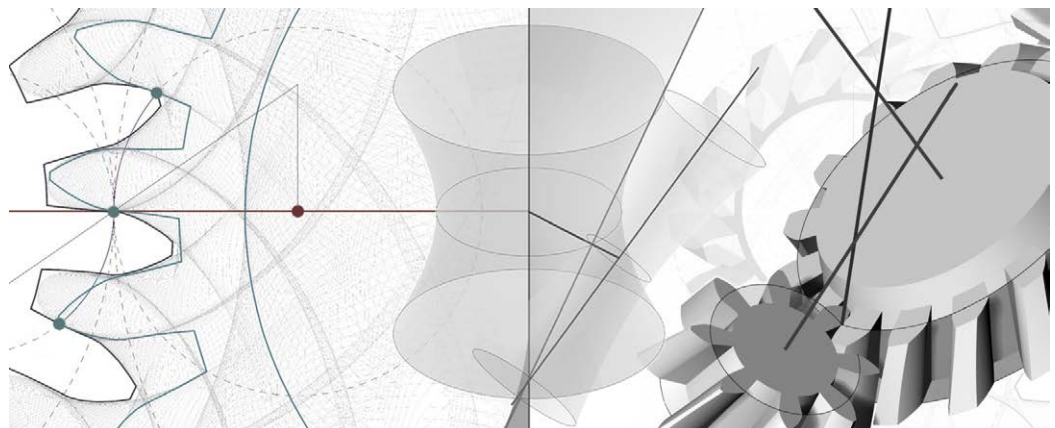


Illustration of the research topic. Image by the authors.

## Introduction

The study of motion is investigated from a descriptive geometric perspective within the Geometric Theory of Gears, a branch of Descriptive Geometry, which saw its main development from the late 18th century to the early 20th century. The objective of this intervention is to investigate conjugate geometries using digital methods of representation, highly useful aids for studying and experimenting with their application.

The passage of time and movement in space contribute to the definition of fundamental geometric entities, qualifying as parameters whose integration is necessary for controlling shape and its representation. From the early studies, the Geometric Theory of Gears particularly focuses on the analysis and generation of the form useful for their definition, depending on the nature of the geometric entities adopted and their mutual positioning in space, problems whose solution specifically concerns the area of descriptive geometry. The relationship between time and space during the movement of geometric entities affects the variety in the definition of curves and surfaces. Given the breadth of obtainable cases, conjugate geometries defined by movement at a constant velocity ratio will be treated here (fig. 1), aiming for a generalized interpretation of the case and deferring the study of rolling at variable velocity ratio to subsequent investigations (fig. 2). The present exposition is composed of an introductory historical-critical investigation, followed by a geometric-descriptive analysis aimed at delving into the nature of the employed curves and their derivatives. The subsequent study of surfaces developed on kinematic constraints is conducted through a practical application, chosen within the context of the Geometric Theory of Gears.

## Historical evolution of the geometric theory of gears

The earliest studies concerning the geometric-descriptive construction of gears date back to 1694, when Philippe de La Hire analyzed in his treatise the properties of plane cycloidal curves and their applicability to defining the profiling of gear wheels. In his contribution, propositions are demonstrated synthetically through the comparison of the areas of entities, examined at distinct moments of their motion, thus defining what will be the three main procedures for constructing tooth profiles. The first theoretical-practical treatise is attributed to Charles E. L. Camus, who addresses the construction of various types of machines, extending for the first time the solution to the problem of bevel gears, through the use of spherical epicycloids. The subject is subsequently addressed by several scholars [1], but it is with the establishment of the *École Polytechnique*, and thanks to the figure of Gaspard Monge, that these researches are integrated into the theory of machines, to be understood as a theory applied within *Géométrie Descriptive*. In this context, the first mechanics courses are established, taught by J. P. Hachette, within which machines are categorized based on the preservation or alteration of types of motion, whether rectilinear or circular. Within this classification, machines consisting of gear wheels are identified, further subdivided based on the mutual positioning of the axes [Hachette 1808]. It is important to note that up to this point, the transmission of motion from one axis to another was contemplated only in cases where they were parallel or intersecting. Toward the end of the 19th century, building upon previous studies and classifications, Théodore Olivier writes the *Théorie géométrique des engranages*, within which he theorizes and demonstrates synthetically the possible solution to the generalized problem: the transmission of motion between two skew axes. The complexity arising from the movement of surfaces, investigated with the graphical methods of representation characteristic of that period, does not lead to an easy synthetic description of the problem, the study of which is more readily tackled analytically. Therefore, this theme is investigated by disciplines that rely on the most effective symbolic definition in mathematical form [Salvatore 2019]. By the end of the 20th century, thanks to the advent of digital tools dedicated to representation, a new and fertile season opens for the study and simulation of complex geometric and kinematic problems: a particularly favorable opportunity to reaffirm the centrality of descriptive geometry in investigating and experimenting with gear theory.



## Conjugate geometries in constant velocity ratio motion

The gear mechanism consists of two toothed wheels, each fixed on its own rotational axis, with the purpose of transferring rotary motion from one shaft to another. The transmission of motion occurs by affecting the problem of conjugate geometries, as during rotation the profiles of the gear wheels remain constantly in tangential contact with each other. Since the system is composed of the combination of two movements, the analysis proceeds to the congruent system consisting of the relative motion of the core of a gear wheel with respect to its conjugate [Codazza 1854]. The design of shapes that meet these constraints requires the consideration of several parameters, as encoded by P. de La Hire in a procedure that progressively approaches three distinct problems [2]: the geometric nature of the core relative to the mutual position of their axes, the construction of conjugate profiles of the gear teeth, the geometric nature of the tooth surfaces.

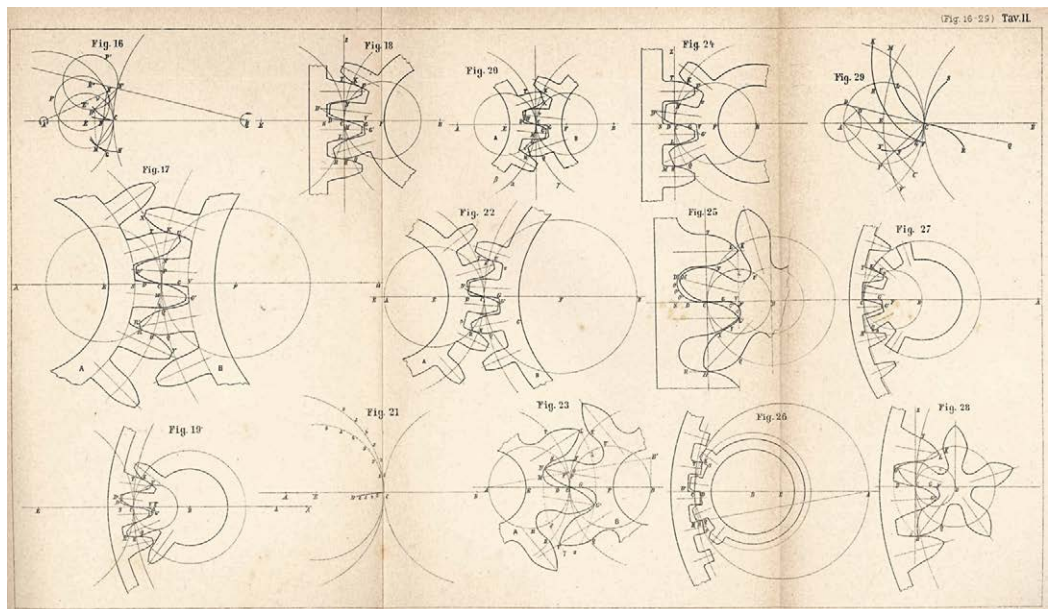


Fig. 1. The elaboration illustrates the construction of the conjugate profiles of the gear teeth for the transmission of motion at a constant speed ratio [Tessari 1902, tav. II].

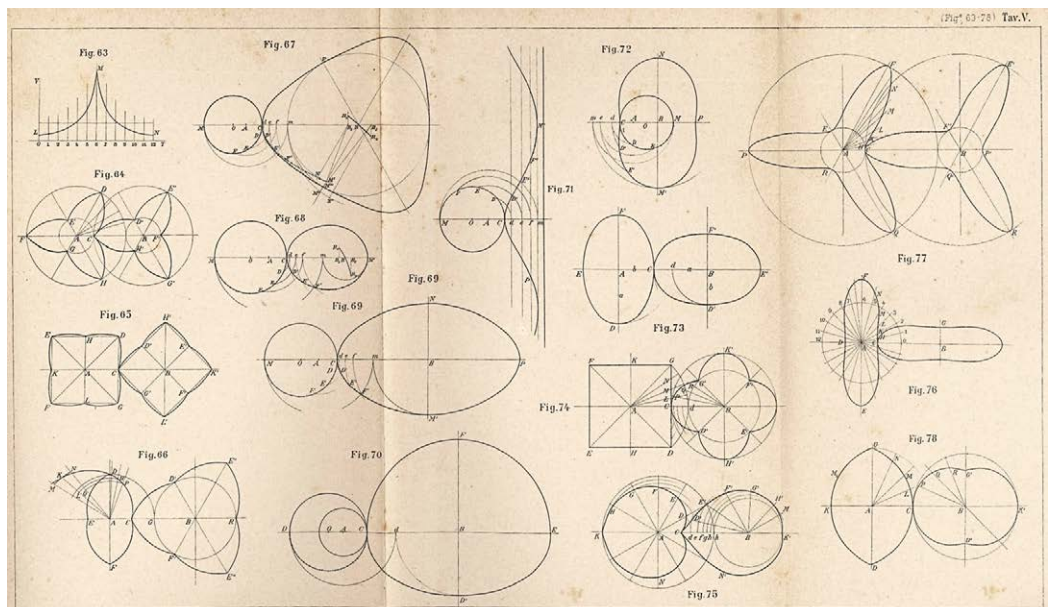


Fig. 2. The elaboration presents some examples of profiles for the transmission of motion at a variable speed ratio [Tessari 1902, tav. V].

The solution to the first problem involves the construction of the surfaces that make up the core of the wheels, namely those surfaces capable of sliding against each other while maintaining a line of contact. Since the possible mutual positions of the axes are three – parallel, intersecting, skew – there will be three respective solutions: cylindrical cores in the case where the rotation axes have a common improper point, conical cores in the case where they have a common proper point, and one-sheeted hyperboloid of revolution if there is no plane containing them [Olivier 1844].

The solution to the second problem, that of constructing conjugate profiles [3], is achieved through several steps: once the pitch and the ratio between the number of teeth of the gears are established, the curve enveloping all consecutive positions assumed by a selected profile is initially defined (fig. 3), which constitutes its conjugate profile; then, the action arcs of the gear are identified by defining the line of contacts, understood as the geometric locus consisting of the points of tangency in the successive positions of the system [4] [Tessari 1902]. The solution to the third problem investigates the geometric nature of the tooth surfaces and in the general case cannot be reduced to study in the plane. The choice of the enveloped surface is arbitrary, and on it, a series of conveniently oriented lines will be identified, whose conjugates will constitute the ruling lines of the surface to be determined [Kantas 2015].

It is evident how the definition of gears falling within the general case requires a tool appropriately conceived for managing such a vast amount of data. For this reason, before the advent of digital aids, it was not possible to reconcile the scientific community regarding the concrete realization of such solutions. Therefore, the transmission of motion between skew axes is commonly resolved by introducing an auxiliary axis, incident to them, for solving the problem, involving the use of two pairs of bevel gears (fig. 4).

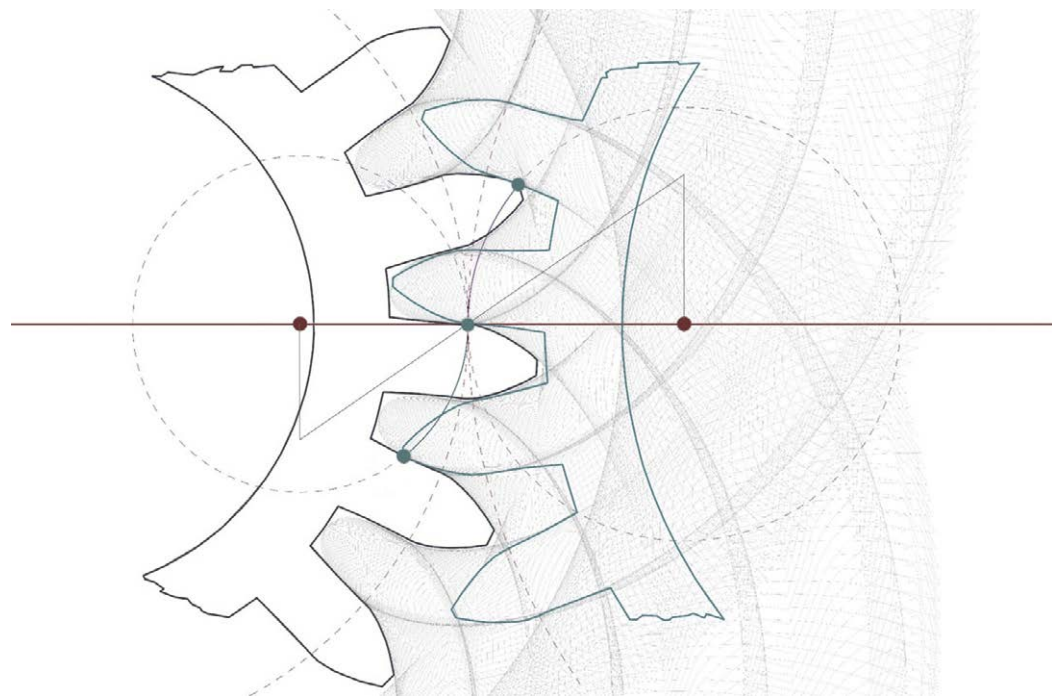


Fig. 3. Representation of a profile and construction of its conjugate through enveloping of the positions assumed during relative motion. Contributing to the definition of the gear are the constant velocity transmission ratio (red) and the maintenance of three points of contact between the teeth during rotation (green). Elaboration by the authors.

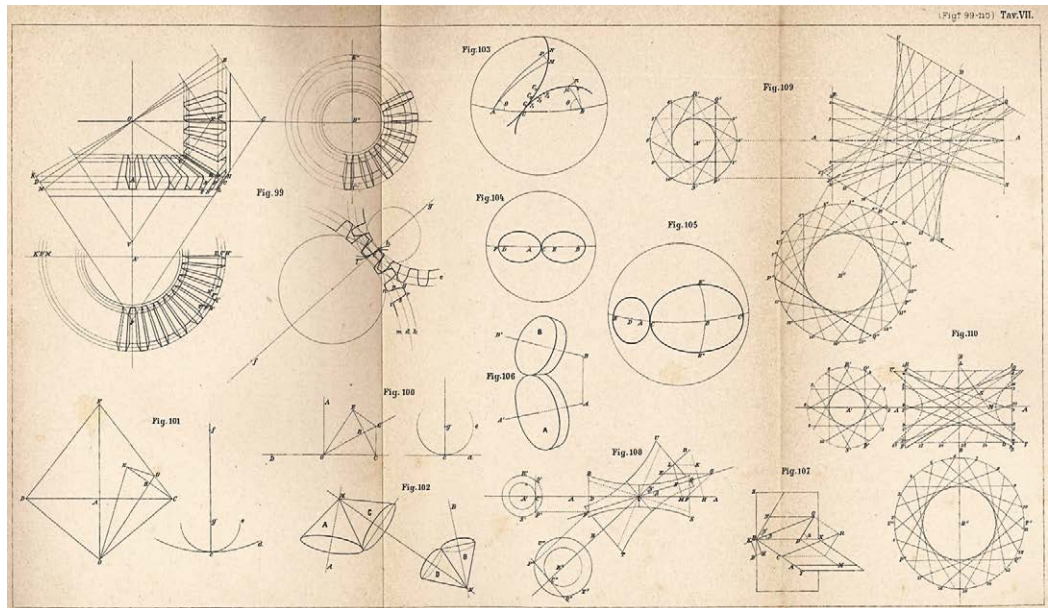


Fig. 4. Tessari, D. (1902). Tab. VII. The work investigates the nature of various types of cores for constant velocity ratio motion transmission. In Fig. 102, the solution of transmission between skew axes is depicted through conical cores [Tessari 1902, tav. VII].

### Generalized case solution

The existence of the shape, and therefore its realizability, can be demonstrated through precise geometric construction.

This becomes even more evident in an era where technological progress allows for an almost immediate transition from project design to realization through rapid prototyping tools. The mathematical digital model thus becomes indispensable, as the project needs to be managed with tools that allow parameterization, a fundamental aid for handling the variety and complexity of the information that needs to be controlled in the various processes of enveloping geometric entities [5].

The parameterization operations for defining geometric entities follow the steps of the procedure previously outlined, theorized by de La Hire and adopted by all subsequent authors. The construction of the conjugate geometries of the cores is equipped with teeth for transmitting motion, themselves conjugate surfaces designated for motion transmission. Given two arbitrarily positioned skew axes, the common generator to the surfaces of the two cores is determined based on the motion transmission ratio to be imparted to the system. The relative movements of this line around the given axes generate the one-sheeted hyperboloids of revolution that constitute the two cores (fig. 5). In the perspective of a generalized solution, arbitrary values have been chosen for defining the configuration of the system: the axes form an angle of 52 degrees, and the line of contact is positioned based on a rolling of the surfaces with a speed ratio of 2:1.

Once the first problem of defining the rotating cores is solved, the second problem is addressed by parametrizing the curves according to their definition as a geometric locus (fig. 6). The development and application of a nodal structured algorithm, designed to control the successive positions of the geometric entities in motion, becomes a prerequisite for an easy definition of the enveloping curve. This approach allows for a more precise and controlled definition of the construction operations of each geometric entity during relative motion with respect to its conjugate, enabling the investigation of potentially infinite positions compared to the representation methodologies upon which the theory was founded. The construction of profiles with core surfaces of revolution is generally resolved by adopting the involute of the circumference identified on a plane orthogonal to the axis of revolution as the enveloping curve, as it possesses properties particularly suitable for project management: firstly, its conjugate is constituted by another involute, albeit different from the



first, and furthermore, it is possible to use the same curve both on the flank and on the face of the same profile for symmetrical motion transmission, thus allowing the inversion of the rotation of the entire system [Paris 2012a]. However, in a treatment of the general case, instead of following the order codified by reference texts, it is convenient to initially define the geometric nature of the enveloping surfaces; from these, three conveniently oriented sections are extracted, whose envelopments constitute the ruling lines of the conjugate surface (fig. 7). However, in a treatment of the general case, rather than following the order encoded by reference texts, it is convenient to initially define the geometric nature of the enveloped surfaces; from these, three conveniently oriented sections are extracted, whose envelopes constitute the ruling lines of the conjugate surface. In the exemplified models proposed, we observe the solution of the problem starting from different enveloped surfaces: the choice of a plane in one case (fig. 8a), and a hyperbolic paraboloid in the other (fig. 8b). The ruling lines identified through enveloping define, with a straight generatrix, the conjugate surface, which turns out to be respectively a cylindroid (a) and a hyperbolic paraboloid (b). It is noteworthy how both models constitute a geometrically correct solution to the same problem, without variations in the mutual positioning of the axes and in the speed transmission ratio. The selection of one of the multiple possible solutions will be determined by the context of use, reflecting the design requirements of other disciplines. The digital model and its virtual motion simulation demonstrate the existence of the solution to the general case previously theorized. Its physical realization (fig. 9) attests to the correct functionality of the project, which, although built on purely geometric considerations, does not neglect the physical conditions falling within other disciplines.

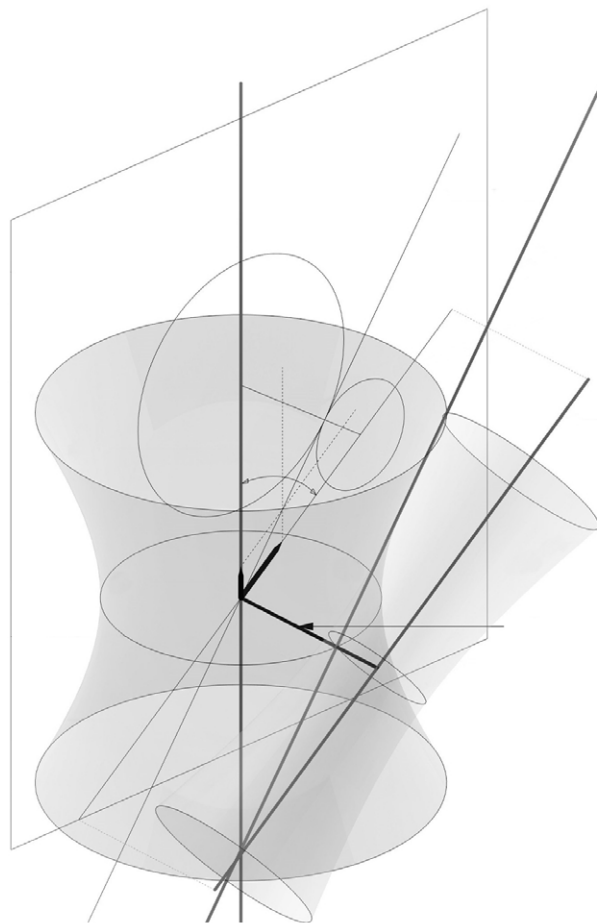


Fig. 5. One-sheeted hyperboloids with a speed transmission ratio of 2:1. Elaboration by the authors.



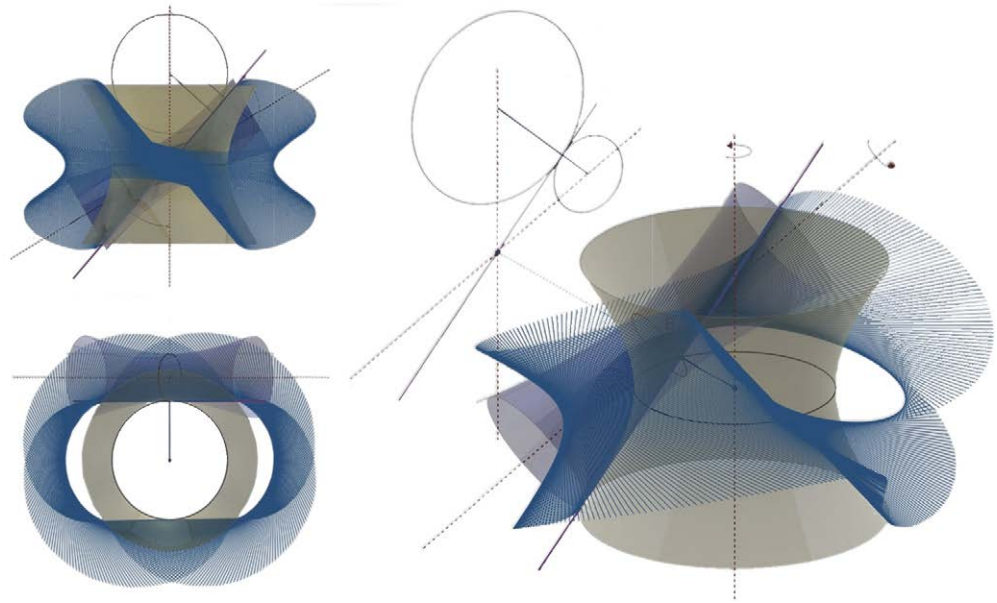


Fig. 6. Surface generated in the kinematic study by the common generating curve of the hyperboloids during relative motion. Elaboration by the authors.

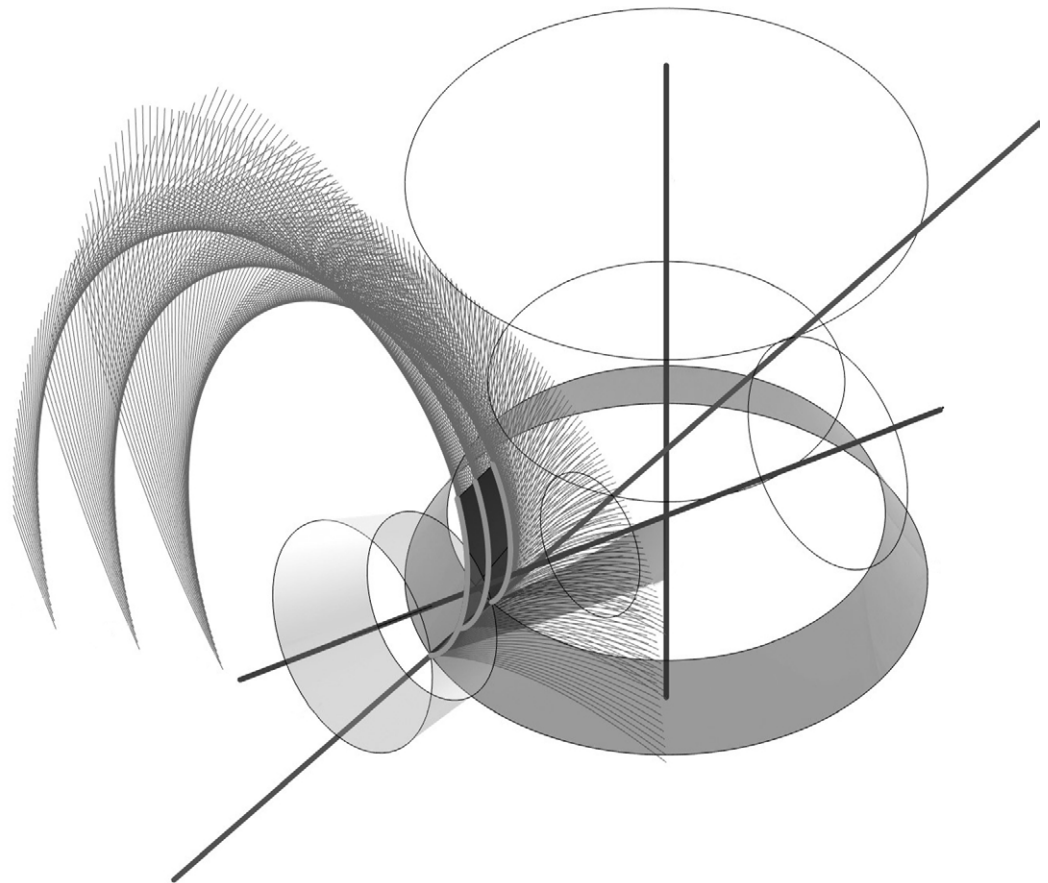


Fig. 7. Construction of the ruling lines of the conjugate surface through the envelopment of the positions of three conveniently oriented profiles. Elaboration by the authors.

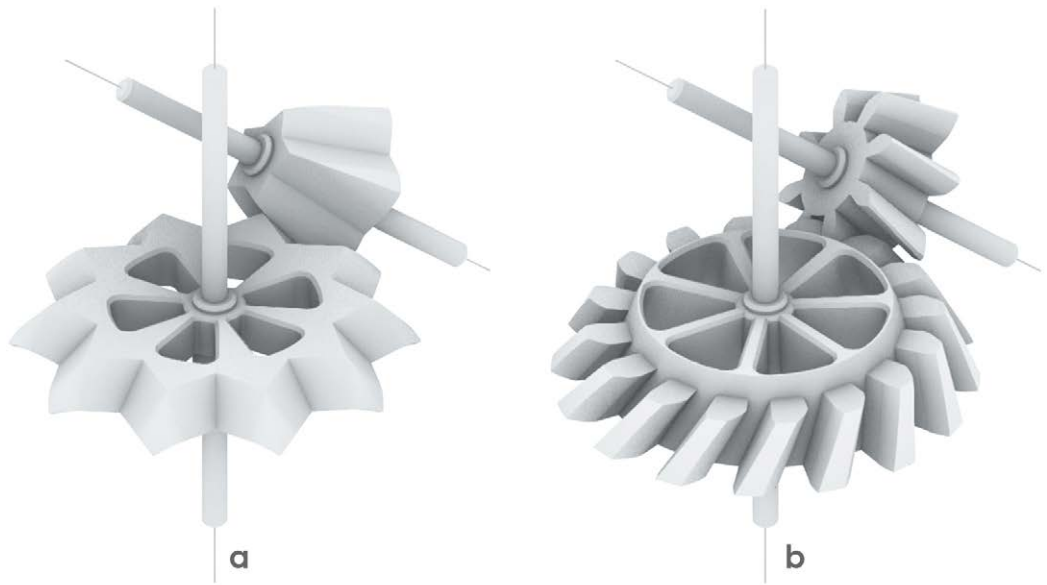


Fig. 8. Gears with the same speed transmission ratio, generated at the same mutual position of the axes. The attainment of different solutions is attributed to design choices, such as the number of teeth and the nature of the enveloping surfaces: a plane (a) and a hyperbolic paraboloid (b). Elaboration by the authors.



Prototype made of aluminum and steel. The use of portions of hyperboloids far from the point of minimum distance between the axes of revolution induces axial loads that are dissipated through the use of angular contact ball bearings, mounted in an opposing configuration.

## Conclusions

The study of conjugate geometries, and particularly their definition as curves and surfaces of geometric locus, finds immediate application in the optimization of articulated systems in motion, characteristic of the geometric theory of gears. This intervention addresses the generalization of the motion transmission problem to skew axes, particularly focusing on the definition of the hyperboloidic core gear, and exemplifies its operation and feasibility. In doing so, it aims to provide a valuable contribution and impetus to further studies on a type of gear that is currently less widespread and considered, and towards which there is still a significant, albeit unjustified, skepticism. This discussion, in addition to aiming to provide a geometric-descriptive investigation to support new studies by other technical-scientific disciplines, also seeks to demonstrate how digital tools of Descriptive Science can play a pivotal role in multidisciplinary research and in the development of synthetic solutions for Machine Theory.

## Notes

[1] Euler, among these, establishes the conditions under which two curves can rotate on each other without sliding and demonstrates that it is not possible to construct cylindrical gears in which both the constant ratio between the angular velocities of the axes and the rolling friction between the tooth profiles are satisfied simultaneously.

[2] For a comprehensive treatment of the solutions to the three geometric-descriptive problems, reference can be made to Kantas P. [Kantas 2015].

[3] Generally, before the contact between two profiles ends, another two must engage to ensure that the motion of the wheel is transmitted continuously. This rule is to be understood as a convention derived from empirical evidence rather than as a rigorously proven statement.

[4] The conjugate profile of a given profile can be considered as the locus of the feet of the normals drawn from the successive contact points of the two primitive circles to the corresponding positions of the given profile.

[5] The verification of the solutions discussed in this study is carried out through virtual laboratories of digital descriptive geometry.

## Acknowledgements

We would like to thank Polytech Lab s.r.l., the co-financing company of the doctoral scholarship (D.M. n.352/22) held by Alesio Buonacucina, for their valuable support and contribution to the research provided to all the authors.

## References

- Branca G. (1629). *Le macchine*. Roma: Mascardi.
- Camus C.E.L. (1752). *Cours de mathématique, Éléments de mécanique statique*. Paris: Prault.
- Ceccarelli M., Cigola, M. (2009). Descriptive Geometry and the Theory of Mechanisms in XIX century Italian Engineering: similarities and interrelationships. In *Disegnare/Drawing: Ideas, images*, anno X, n. 39, pp. 12-25.
- Cigola M. (2012). Elogio di teorie parallele: Geometria descrittiva e Meccanica applicata. In M. Filippa, L. Carlevaris (a cura di). *Elogio della teoria, identità delle discipline del disegno e del rilievo*. Atti del 34° convegno internazionale dei docenti di rappresentazione.. Roma 13-15 Dicembre 2012, pp. 39-46. Roma: Gangemi.
- Codazza G. (1854). *Teoria geometrica degli ingranaggi*. Milano: Giuseppe Bernardoni.
- Hachette J.P. (1808). *Essai sur la composition des machines*. Paris: Imprimerie Imperiale.
- Hachette, J.P. (1811). *Traité élémentaire des machines*. Paris: Klostermann.
- Kantas P. (2015). *Teoria geometrica degli ingranaggi*. Tesi di dottorato XXVIII ciclo in Scienze della Rappresentazione e del Rilievo. Sapienza Università di Roma.
- La Hire P.de. (1694). *Mémoires de mathématique et de physique*. Paris: Imprimerie Imperiale.
- Loria G. (1921). *Storia della Geometria Descrittiva dalle origini sino ai giorni nostri*. Milano: Hoepli.
- Migliari R. (1997). Il Modello Digitale Continuo. In *Disegnare Idee Immagini*, vol. 15, pp. 59-66.

- Migliari R. (2001). *Geometria dei Modelli: Rappresentazione grafica e informatica per l'architettura e per il design*. Roma: Edizioni Kappa.
- Migliari R. (2009). Metodi e tecniche della rappresentazione digitale. In L. Unali (a cura di). *New Lineamenta*, pp. 19-31. Roma: Edizioni Kappa.
- Migliari R. (2009). *Geometria Descrittiva*, vol. 1, 2. Milano: Città Studi.
- Migliari R. (2012). La Geometria descrittiva nel quadro storico della sua evoluzione dalle origini alla rappresentazione digitale. In L. Carlevaris, L. De Carlo, R. Migliari (a cura di). *Attualità della geometria descrittiva*. Roma: Gangemi.
- Olivier T. (1842-1843). *Cours de Géométrie Descriptive*. Paris: Dunod.
- Olivier T. (1843-1870). *Compléments de Géométrie Descriptive*. Paris: Dunod.
- Olivier T. (1844). *Théorie géométrique des engrenages*. Paris: Dunod.
- Paris L. (2012). Teoria geometrica degli ingranaggi. In A. Casale (a cura di). *Geometria descrittiva e rappresentazione digitale: Memoria e innovazione*, vol. II, pp. 63-84. Roma: Edizioni Kappa.
- Paris L. (2012). Geometrie coniugate. In *Disegnarecon*, vol. 9, pp. 235-244. <https://doi.org/10.6092/issn.1828-5961/3172>
- Salvatore M. (2019). Geometria delle linee curve per la genesi della forma. In L. De Carlo, L. Paris (a cura di). *Le linee curve per l'architettura e il design*, pp. 73-108. Milano: FrancoAngeli.
- Tessari D. (1871). Sopra la costruzione degli ingranaggi ad assi non concorrenti. In *Atti della R. Accademia delle Scienze*. Torino.
- Tessari D. (1890). *La cinematica applicata alle machine*. Torino: Loescher.
- Tessari D. (1902). *La costruzione degli ingranaggi: ad uso delle scuole degli ingegneri e dei meccanici*. Torino: Fratelli Bocca.
- Vernant J. P. (2010). *L'immagine e il suo doppio. Dall'era dell'idolo all'alba dell'arte*. Milano-Udine: Mimesis.

#### Authors

Alessio Buonacucina, Sapienza Università di Roma, [alessio.buonacucina@uniroma1.it](mailto:alessio.buonacucina@uniroma1.it)  
Prokopios Kantas, Polytech Lab S.r.l., [prokopiskantas@gmail.com](mailto:prokopiskantas@gmail.com)  
Graziano Mario Valenti, Sapienza Università di Roma, [grazianomario.valenti@uniroma1.it](mailto:grazianomario.valenti@uniroma1.it)

To cite this chapter: Alessio Buonacucina, Prokopios Kantas, Graziano Mario Valenti. (2024). Geometria coniugate: gli ingranaggi a nuclei iperbolici/Conjugate geometries: hyperboloidal core gears. In Bergamo F., Calandriello A., Ciammaichella M., Friso I., Gay F., Liva G., Monteleone C. (Eds.). *Misura / Dismisura. Atti del 45° Convegno Internazionale dei Docenti delle Discipline della Rappresentazione / Measure / Out of Measure. Transitions. Proceedings of the 45th International Conference of Representation Disciplines Teachers*. Milano: FrancoAngeli, pp. 987-1006.