

Topologia, o delle qualità immanenti delle forme. Dai grafi di Eulero alla rappresentazione semplificata e accessibile dell'architettura

Cristina Càndito

Abstract

La rappresentazione può essere il mezzo ideale per guidare la ricerca di un'essenza dell'architettura, se non in termini assoluti, sicuramente funzionale a livello comunicativo. L'analisi che si può compiere attraverso il metodo dei grafi può introdurre al mondo della topologia applicata per lo studio dei caratteri non metrici dello spazio. Nato nel Settecento grazie ad Eulero al fine di risolvere l'enigma dei percorsi senza ripetizione, il metodo dei grafi si applica negli studi contemporanei nell'ambito della teoria di Space Syntax come modalità per misurare la connessione relativa tra gli spazi tramite l'indice della profondità. Insieme al cambiamento angolare, che rileva i cambi di direzione, si possono registrare gli elementi più essenziali per l'esperienza della percorrenza del fruitore, e sono possibili graduali implementazioni. Il metodo si presta anche ad una comunicazione semplificata da rivolgere ad un pubblico non esperto, ma anche maggiormente memorizzabile ed agevole da tradurre in una forma tattile accessibile alle persone cieche. La sperimentazione si è rivolta ad alcuni edifici teatrali del XVII e XVIII secolo, i cui grafi della distribuzione interna coincidono e le cui differenze relative al cambiamento angolare collimano con i differenti contesti culturali e spaziali.

Parole chiave

topologia, grafi, tipologia architettonica, disabilità visiva, teatri

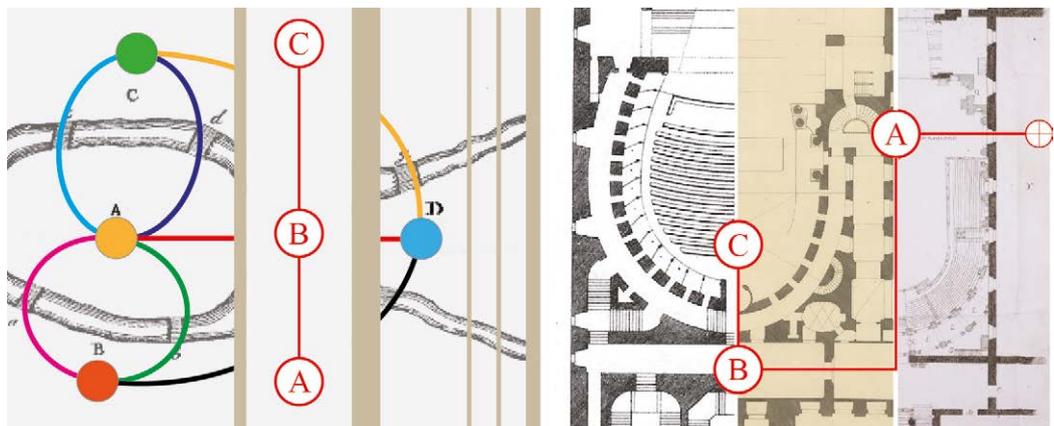


Immagine di sintesi del saggio. Elaborazione dell'autrice.

Introduzione

È possibile individuare dei criteri per definire le forme geometriche senza fare ricorso alle loro proprietà metriche? E questi principi possono suggerire forme più accessibili di rappresentazione dell'architettura? Qualche risposta in proposito la fornisce Leonhard Euler, il matematico svizzero attivo alla fine del Settecento, noto, tra l'altro, per essere il padre della topologia e del metodo dei grafi.

In questo contributo si fornisce un inquadramento del significato che hanno i grafi per determinare le caratteristiche distributive degli spazi architettonici. Nell'analisi dell'architettura, infatti, i grafi forniscono degli schemi semplificati delle relazioni spaziali tra i diversi ambienti, in una modalità che evidenzia alcune caratteristiche di uno spazio architettonico e che permette una lettura da parte delle persone che lo frequentano, anche senza una preparazione tecnica specifica o, addirittura, in assenza della capacità visiva.

I grafi di Eulero: distribuzione e rappresentazione

Nel 1735 un enigma riguardante gli itinerari all'interno di un tessuto urbano è risolto da un matematico svizzero, che concepisce un metodo destinato ad avere importanti ripercussioni nello studio delle relazioni spaziali.

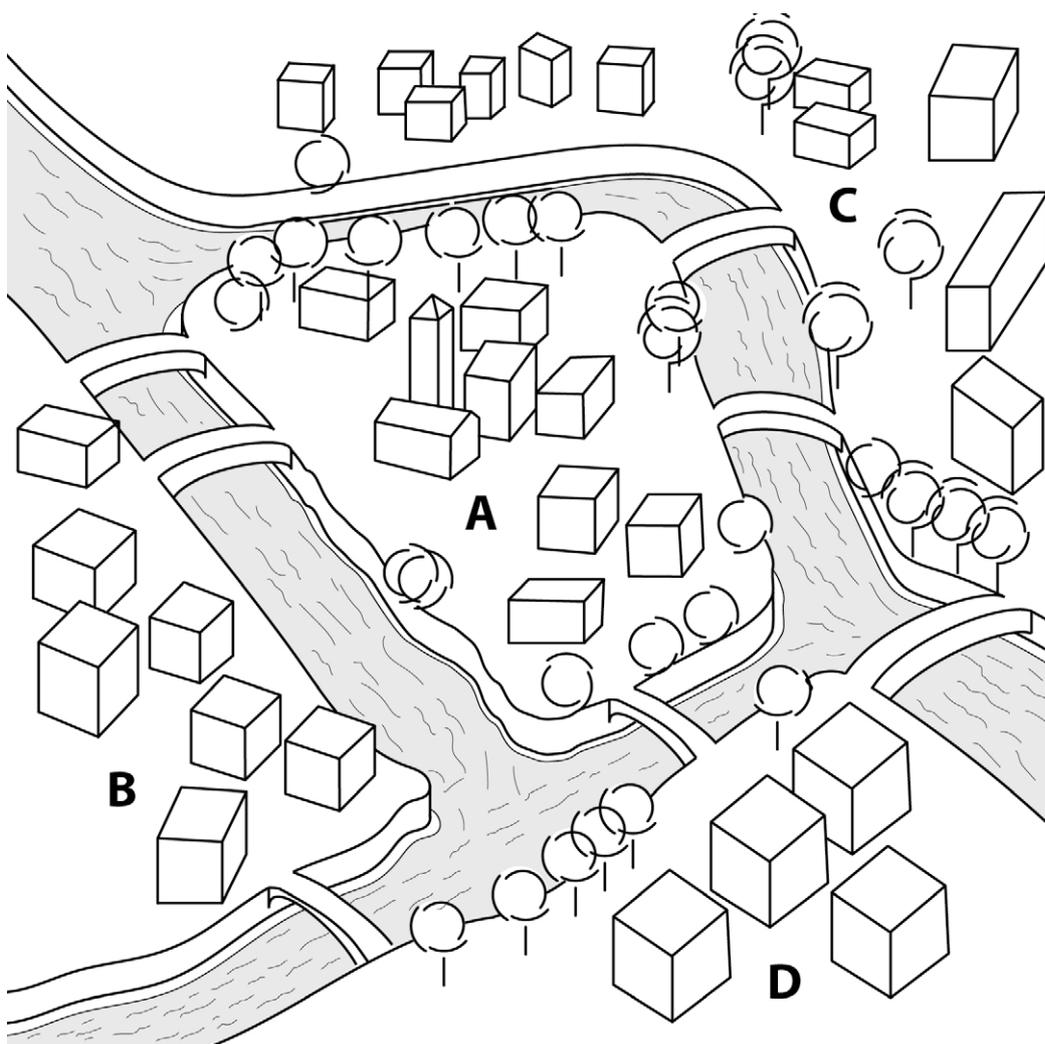


Fig. 1. Vista assonometrica schematica della porzione della città di Königsberg che comprendeva le due isole A e D e i sette ponti. Elaborazione dell'autrice.

L'artefice della innovativa soluzione è Leonhard Euler (in italiano, Eulero; 1707-1783), matematico tra i più prolifici della sua epoca, che opera tra San Pietroburgo e Berlino. In questa sede non si possono neanche citare gli innumerevoli contributi da lui apportati in svariati campi della matematica, spesso con ripercussioni pratiche, nella fisica e nell'astronomia [Agostini 1932; Calinger 2016] [1]. La sua lunga attività scientifica, dalla precoce laurea a Basilea nel 1736 fino alla tarda età, gli permise anche di occuparsi di temi divulgativi, solo apparentemente trascurabili.

La formula nota come caratteristica di Eulero, che accomuna i poliedri convessi relazionando vertici, spigoli e facce di un poliedro [2], costituisce uno dei fondamenti della geometria topologica. Su questo tema, si ricorda il metodo impiegato per la soluzione del curioso enigma dei sette ponti, che la tradizione narra assillare la popolazione di Königsberg [3]. La cittadina prussiana, affacciata sul Mar Baltico, forma due isole sul fiume Pregel che la attraversa: quella

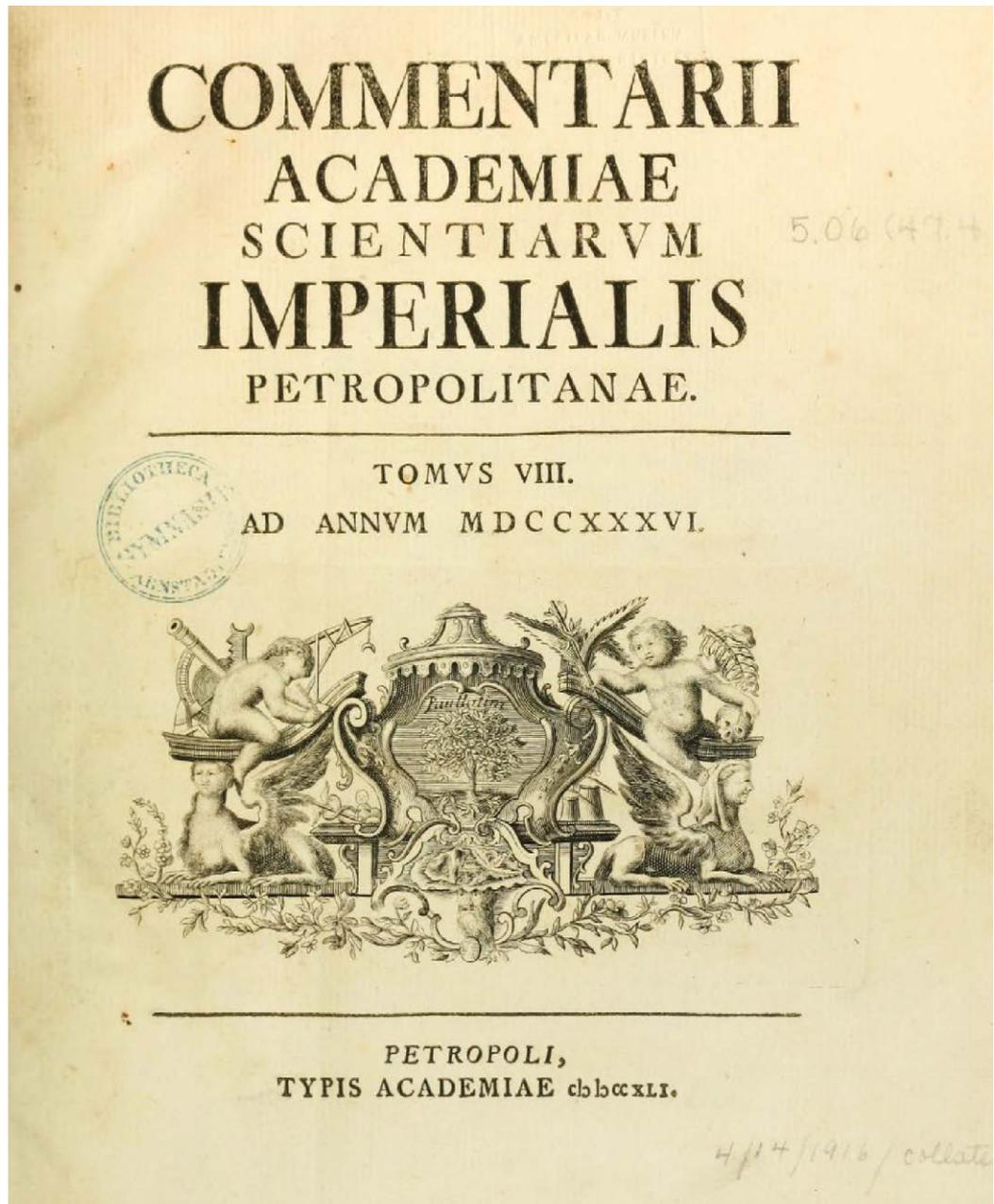


Fig. 2. Leonhard Euler (1736), *Solutio Problematis ad Geometriam Situs Pertinentis*. In *Commentarii Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae*, n. 8, Petropoli: Typis Academiae: frontepizio.

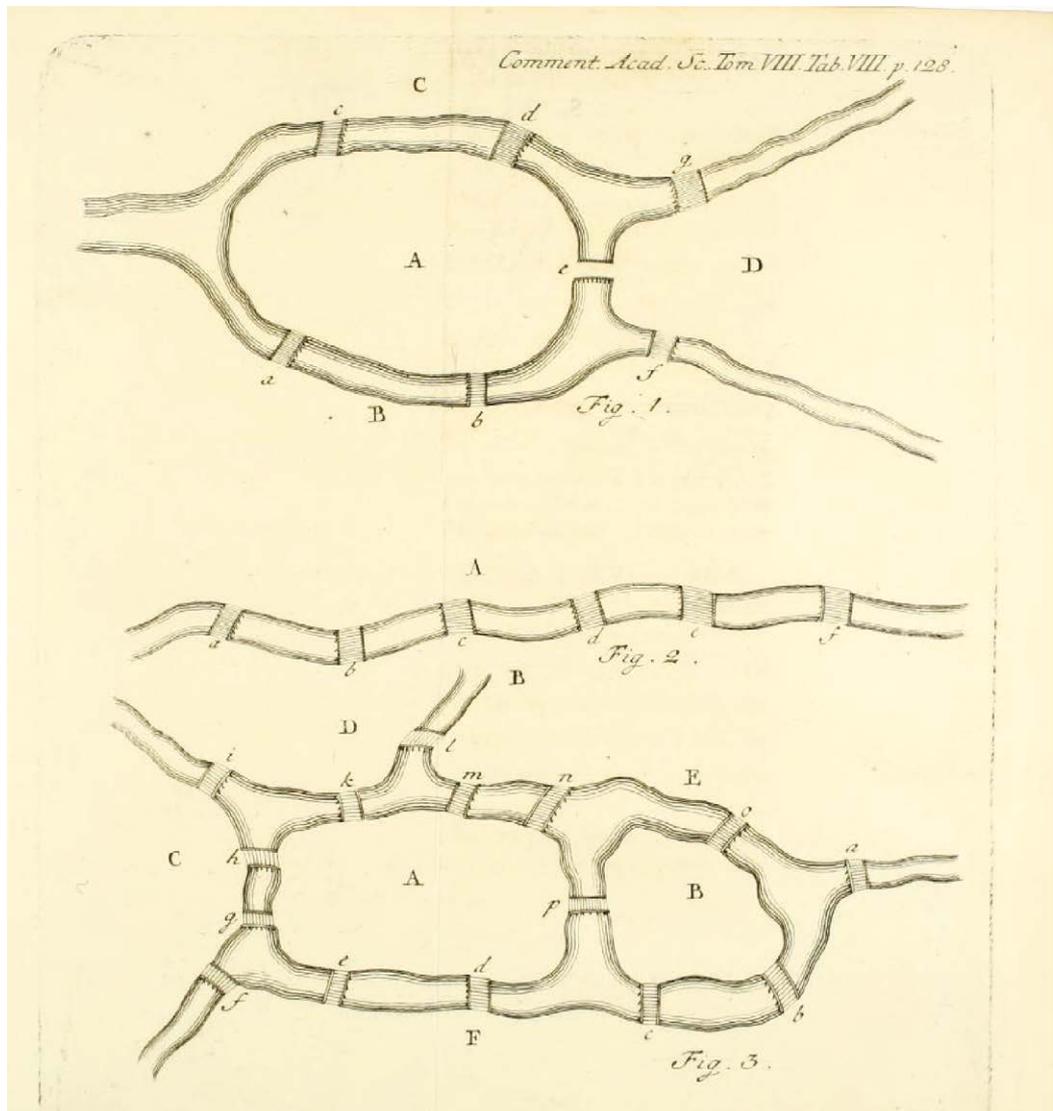


Fig. 3. Illustrazione del problema dei ponti di Königsberg (Euler 1736, fig. 1).

occidentale era collegata da due ponti alla parte nord della città e da altrettanti ponti alla parte sud. Inoltre, era connessa attraverso un quinto ponte all'altra isola. Dall'isola orientale partivano poi altri due ponti, uno verso la parte nord e uno verso la parte sud (fig. 1).

Il problema che si poneva era se fosse possibile tracciare un percorso che permettesse di ritornare al punto di partenza attraversando una sola volta tutti i sette ponti. La dimostrazione dell'assenza di una soluzione fu fornita da Eulero attraverso una rappresentazione semplificata delle relazioni spaziali, il grafo, durante una presentazione ai membri dell'Accademia di San Pietroburgo nel 1735 e pubblicata l'anno seguente [Euler 1736; Alexanderson 2006] (figg. 2-3). Nello stesso periodo, Eulero incominciava a soffrire di gravi disturbi visivi [Agostini 1932] con la perdita della vista da un occhio, sfociati nel 1768 circa nella cecità totale.

Da un enigma apparentemente marginale nasce, dunque, la teoria dei grafi: una metodologia capace di rappresentare le relazioni spaziali grazie ad una generalizzazione che raffigura le loro caratteristiche essenziali (fig. 4). Lo stesso Eulero dimostra consapevolezza della potenzialità del metodo, le cui origini riconosce in quella che Gottfried Wilhelm Leibnitz aveva definito geometria di posizione (geometria situs) in una lettera a Christian Huygens nel 1679 [4], nella quale Leibnitz introduce le caratteristiche indipendenti dalle distanze senza ricorrere a metodi di calcolo.

Utilizzando il linguaggio geometrico contemporaneo, un grafo è un reticolo bidimensionale

composto da due elementi: i nodi, assimilabili a punti di passaggio, e gli archi, che costituiscono le linee di connessione. I nodi sono definiti pari se vi convergono un numero pari di archi e dispari quando a confluire è un numero dispari di archi.

La percorribilità priva di ripetizioni - tracciabile senza staccare la penna dal foglio - si verifica nel caso di quello che è oggi chiamato reticolo euleriano: un grafo contenente nodi pari o al più due nodi dispari. Se parte da un dato nodo e termina sullo stesso, il grafo si definisce chiuso e possiede solo nodi pari. Se invece inizia e finisce su nodi differenti, allora contiene due nodi dispari, uno come partenza lungo il reticolo e l'altro come conclusione: in questo caso si definisce aperto. Eulero dimostrò l'impossibilità della soluzione per i ponti di Königsberg, poiché il reticolo non risultava né aperto né chiuso, contenendo quattro nodi dispari.

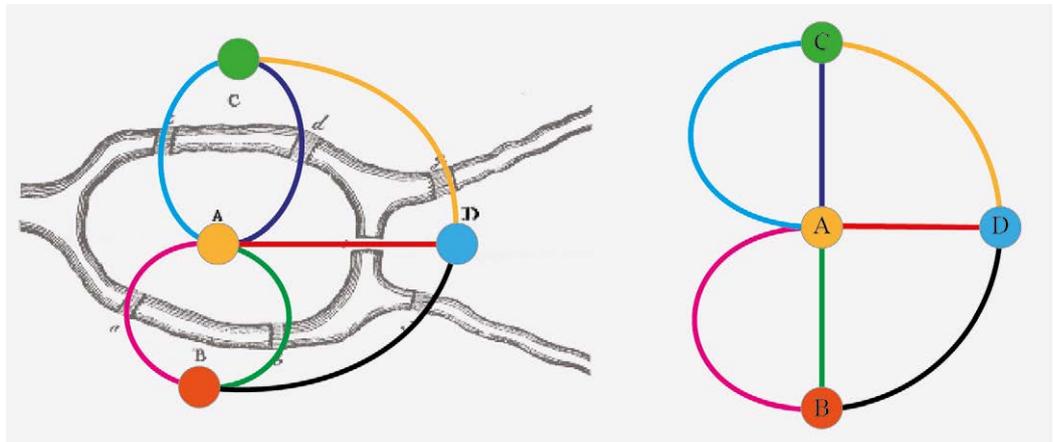


Fig. 4. I passaggi che conducono ad un grafo semplificato: il reticolo non è euleriano e quindi non consente la percorribilità senza ripetizioni. Elaborazione dell'autrice.

Applicazioni per lo studio delle relazioni spaziali: i luoghi per lo spettacolo

Il metodo dei grafi nato per individuare la percorribilità senza ripetizioni, che può, ad esempio, essere applicata alla determinazione di percorsi espositivi, è impiegato anche per l'analisi di altri aspetti della spazialità. La teoria di Space Syntax, concepita a partire dalla fine degli anni Settanta del Novecento [Hillier, Hanson 1984] con l'intento di evidenziare le relazioni tra spazio e il comportamento umano nell'ambiente urbano e nell'architettura, sviluppa metodologie di analisi strumentali [Krenz 2022] comprendenti anche il metodo del justified graph [Cochez et al. 2021].

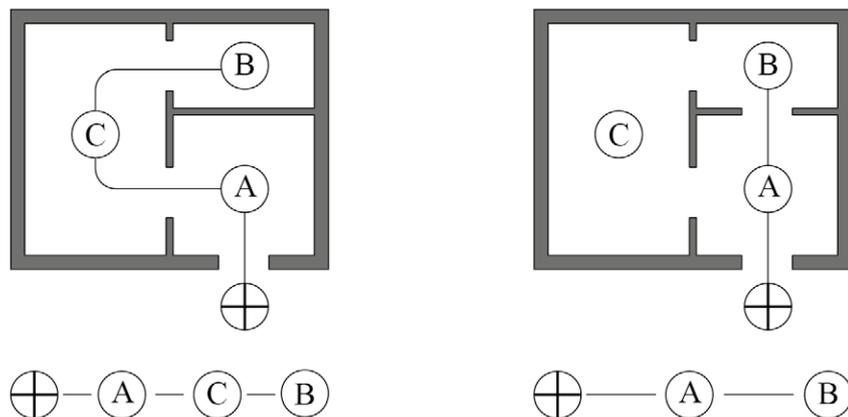


Fig. 5. Uno schema planimetrico identico che si traduce in grafi diversi in funzione delle diverse connessioni. A sinistra: profondità = 2 tra A e B; a destra: profondità = 1 tra gli stessi ambienti, per la presenza di un collegamento diretto. Elaborazione dell'autrice.

Tra le significative potenzialità di questa rappresentazione, se ne descrive una che appare influente ai fini della presente trattazione, ovvero il dato della cosiddetta profondità (depth) [Hillier, Hanson 1984, p.108] che indica, con una progressione numerica, il grado di connessione tra due ambienti. Consideriamo due stanze A e B contigue: la morfologia del grafo e il dato sulla profondità mutano a seconda che la distribuzione si verifichi attraverso un terzo ambiente C (A è collegato a B con una profondità 2) o se questi sono direttamente collegati (profondità 1) (fig. 5). In questa lettura - necessariamente relativa al rapporto tra due ambienti specifici - minore è la profondità, maggiore è la connessione tra i due ambienti. Negli spazi complessi, la somma delle profondità parziali rispetto ad un riferimento significativo (ad esempio, l'atrio d'ingresso) può fornire indicazioni sul grado di connessione del sistema.

Questo cambiamento di prospettiva permette di focalizzare la lettura delle relazioni tra gli ambienti all'interno di un sistema secondo quanto rilevato nel percorso praticato dagli utenti dello spazio, sotto certi aspetti più significativa rispetto ai dati metrici, che registrano la vicinanza in "linea d'aria".

Si ritiene importante rilevare il potenziale legato all'accessibilità della rappresentazione di questa analisi, in quanto si presta per una efficace comunicazione tattile dei caratteri distributivi di spazi architettonici da recepire anche in assenza della vista, in una formula semplificata e più memorizzabile.

Per poter mostrare quanto la teoria dei grafi possa risultare duttile nella rappresentazione dell'architettura, si sceglie come caso studio quello dello spazio per lo spettacolo, confrontando esempi distanti geograficamente e cronologicamente, al fine di riconoscere, all'interno di una evidente difformità stilistica, i caratteri distintivi e quelli costanti relativi alla distribuzione degli spazi.

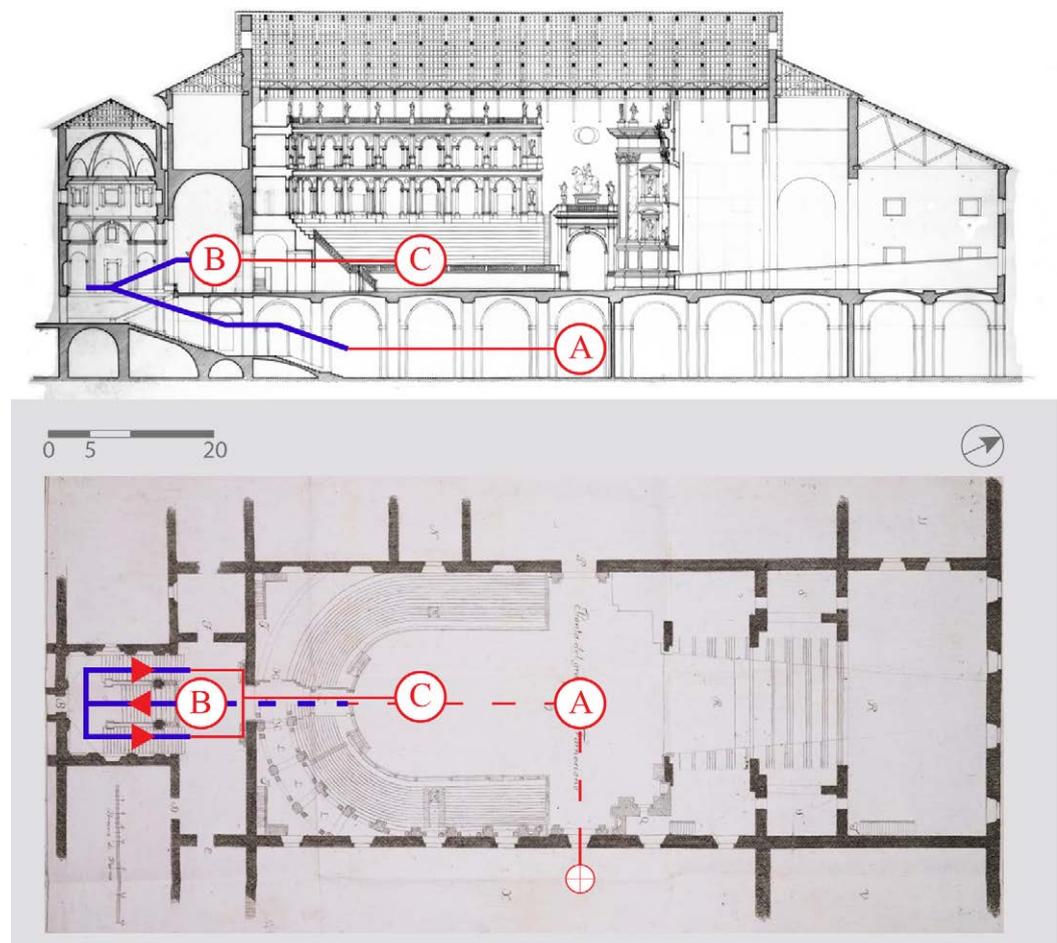


Fig. 6. Teatro Farnese di Parma (G.B. Aleotti, 1618-1619): pianta e sezione (Soprintendenza ai Monumenti dell'Emilia-Bologna; Mob. G Scaf. 63) con sovrapposto lo schema distributivo. In questa figura, come nelle seguenti, il tratto rosso indica percorsi in piano e il tratto blu quelli con cambio di livello. Elaborazione dell'autrice.

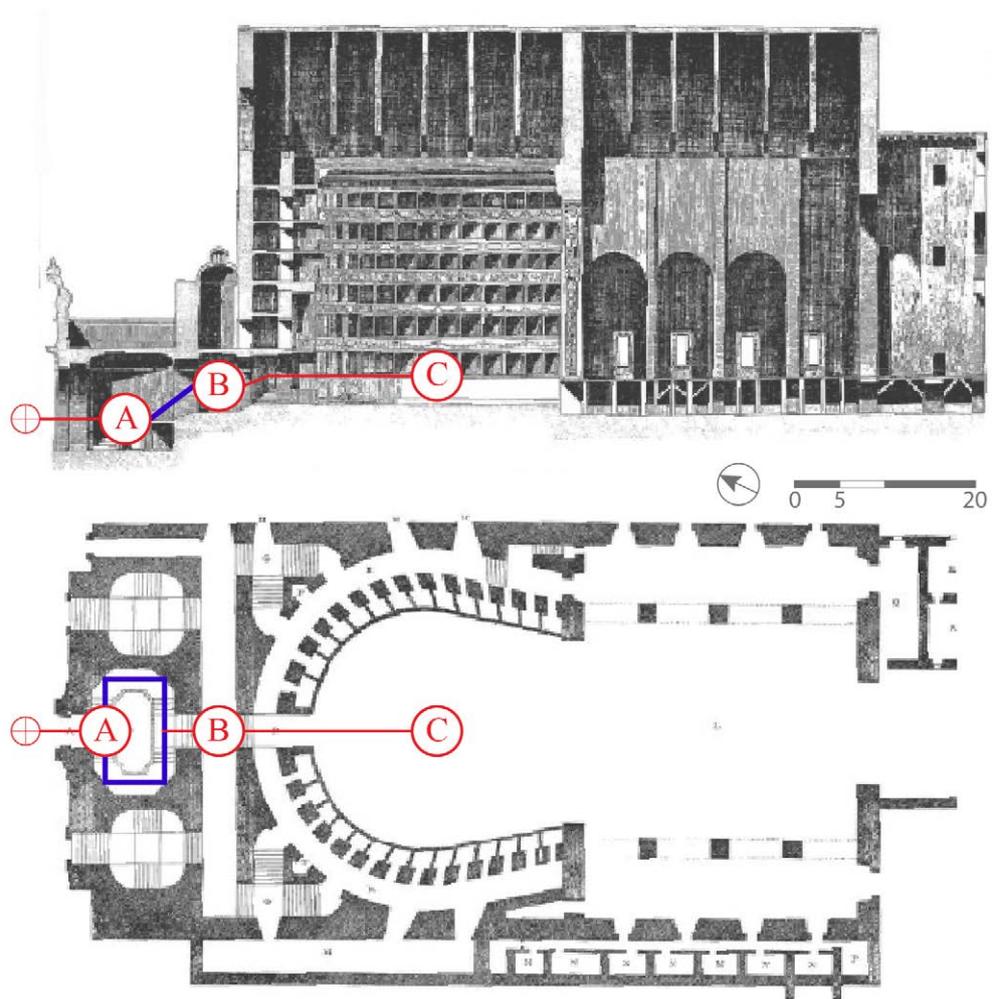


Fig. 7. Teatro San Carlo di Napoli (G.A. Medrano, 1737): pianta e sezione (Diderot, D., & Alembert, D. (1751-1780). L'Encyclopédie, Recueil de Planche ..., 25, Théâtres, tavv. I-II) con sovrapposizione dei tratti di distribuzione. Elaborazione dell'autrice.

La sperimentazione non può che considerarsi unicamente esemplificativa, perché un esame significativo sul soggetto architettonico si dovrebbe compiere su un numero più elevato di esempi e con l'ausilio di varianti del sistema dei grafi applicate alla intensità dei flussi di esplorazione dei luoghi e all'integrazione con altre considerazioni [5]. Si ritiene comunque interessante presentare alcuni risultati parziali che permettono di riconoscere e rappresentare i caratteri essenziali di organismi apparentemente molto diversi tra loro.

In questa sede non si può effettuare un'introduzione a quella che è la vasta storia degli spazi per lo spettacolo con le loro varianti legate al disegno dell'architettura e, più estesamente, alla concezione culturale dello spettacolo [Tafuri 1987; Pevsner 1986; Zerlenga 2020; Clemente 2022]. Si tralascia, dunque, tutto il periodo classico, medievale e rinascimentale, oltre alle peculiarità culturali quali, ad esempio, il teatro elisabettiano e gli spazi per la rappresentazione delle culture orientali. Occorre inoltre sottolineare che non è oggetto di analisi la disposizione della sala per l'esibizione, quanto la distribuzione degli spazi che conducono il pubblico all'area dedicata allo spettacolo.

Nikolaus Pevsner [Pevsner 1971, pp. 83-114] si occupa dei caratteri dei teatri a partire dalla nascita del teatro rinascimentale, che è determinata dall'insediamento permanente all'interno del Palazzo e dall'adozione di un unico palcoscenico e di uno spazio fisso per il pubblico. I temi fondamentali circa lo sviluppo del teatro in Italia, Francia e Inghilterra vengono individuati naturalmente nelle caratteristiche dell'ambiente per lo spettacolo e per il pubblico, che

non coincidono, però, con la distribuzione dell'edificio. Pevsner [Pevsner 1971, p. 86] osserva la particolarità della pianta a U del Teatro Farnese di Parma (G.B. Aleotti, 1618-1619) [6], ma qui si intende evidenziare la semplicità della distribuzione che introduce il pubblico dalla corte esterna all'interno del palazzo (A) e lo conduce alla sala dello spettacolo (C) mediante una scala (B) che distribuisce al livello superiore (fig. 6). Un portale d'ingresso fornisce l'accesso alla platea, la quale assume la flessibile funzione di luogo per il pubblico o arena per lo spettacolo. Riguarda la sola distribuzione capillare il percorso che da questa posizione permette di raggiungere i vari livelli della cavea a gradoni attraverso una gradinata perimetrale a ferro di cavallo.

Se analizziamo questa articolazione del percorso e la confrontiamo con la maggior parte dei teatri costruiti, anche nel secolo successivo, italiani - come il San Carlo di Napoli (G.A. Medrano, 1737) (fig. 7) - o francesi - come l'Opéra Royal di Versailles (J.A. Gabriel, 1763-1770) (fig. 8) -, possiamo agevolmente riconoscerne delle costanti, nonostante la differenziazione della gamma di dimensioni e funzione degli ambienti e le difformi espressioni stilistiche.

La diversa concezione dello spazio per lo spettacolo o per il pubblico, il differente aspetto delle aree di passaggio o il variabile peso che assume il numero e la disposizione degli ordini degli eventuali palchetti, infatti, non influiscono sulla successione schematica del percorso dello spettatore, che porta in tutti e tre i casi ad una profondità dello spazio per lo spettacolo rispetto all'ingresso pari a 2, come mostra l'identità dello schema del grafo (fig. 9 a). Possiamo, però, distinguere il rapporto con l'esterno, per il quale nel Teatro Farnese e nell'Opéra di Versailles si osserva un ingresso laterale causato dall'inserimento nei rispettivi sistemi dei palazzi a cui appartengono.

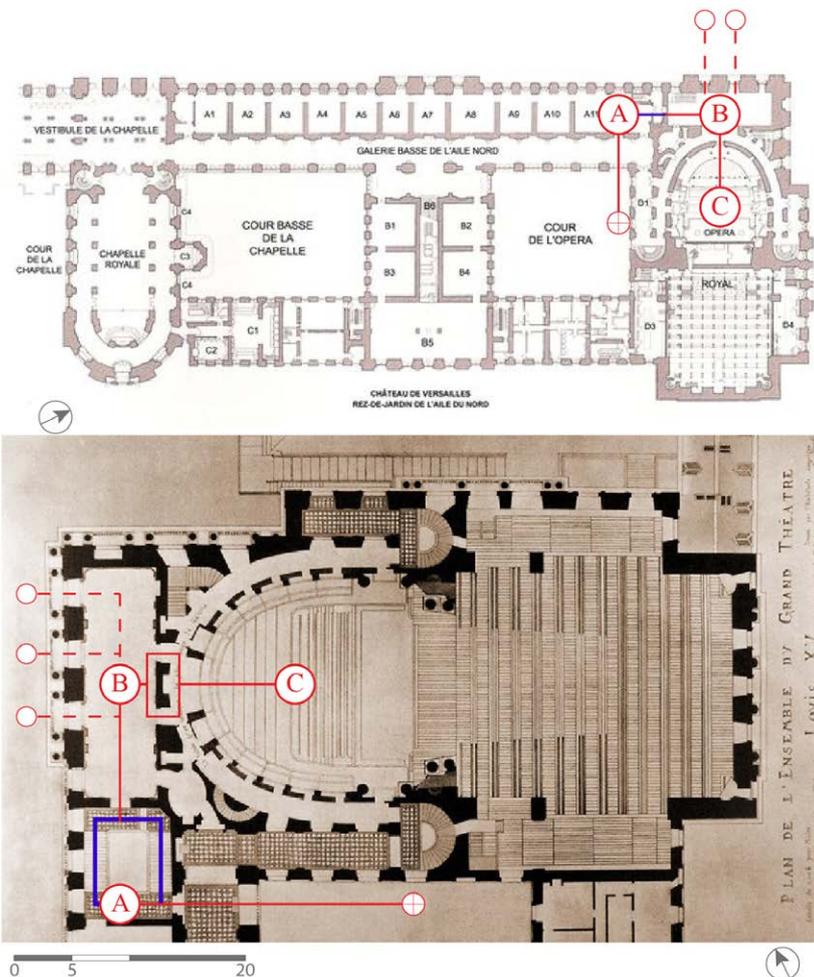
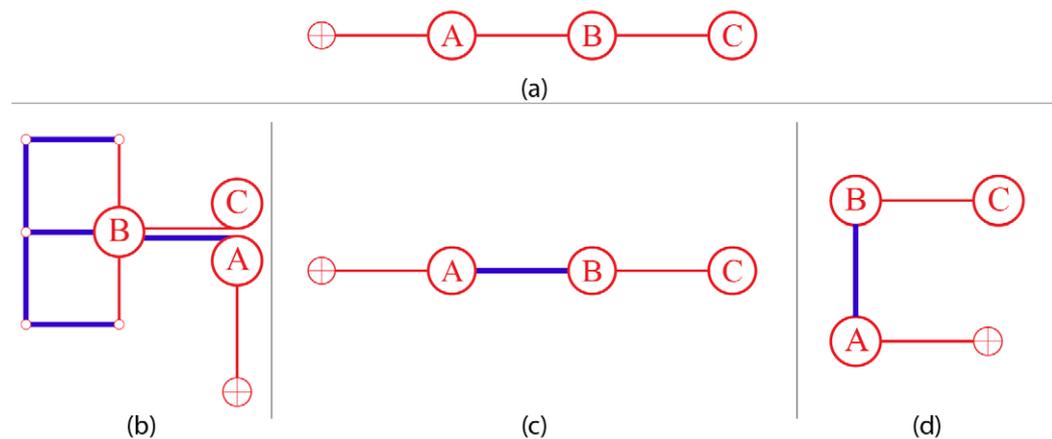


Fig. 8. Opéra Royal di Versailles (J.A. Gabriel, 1763-1770): planimetria del braccio della Reggia e pianta con sovrapposto lo schema di distribuzione. In tratteggio, i varchi diretti attivi in alcune fasi storiche. Elaborazione dell'autrice.

Una caratteristica che permette di considerare la complessità del concetto di distanza non limitata a quella metrica, ma neanche dipendente dal solo numero di profondità (depth) misurata con il grafo, è il fattore del cambiamento angolare (angular distance) da uno spazio all'altro [Serra, Hillier 2019]. La purezza topologica dell'analisi del grafo può essere così affinata sempre con l'intento di registrare le caratteristiche del percorso influenti sull'esperienza del fruitore. Considerando questo aspetto, è possibile differenziare il percorso che muove dall'ambiente A, che assume la funzione di atrio, a B, identificabile con il foyer, allo spazio degli spettatori C. A questo modo, si osserva la conservazione della schematica assialità rettificata del grafo solo nel Teatro San Carlo (fig. 9 c), mentre nel Teatro Farnese (fig. 9 b) la rappresentazione assiale cela invece diversi cambiamenti di direzione e nell'Opéra di Versailles (fig. 9 d) si registrano due variazioni di direzione a 90°, sempre determinate dai vincoli del contesto. In questa sede si intende rilevare un'altra caratteristica spesso trascurata dalle rappresentazioni bidimensionali: quella della variabile altimetrica, rappresentata con il colore blu nelle figure da 6 a 9. A questo modo si può affinare la comunicazione dello spazio attraverso un dato importante per i potenziali frequentatori dello spazio, in quanto impatta sullo sforzo fisico generato dal percorso e sulle possibilità di percorrenza per certe categorie di persone. Gli schemi pur semplificati, a questo modo possono fornire informazioni essenziali per l'orientamento e l'accessibilità, oltre a prestarsi ad una traduzione tattile e ad una facile memorizzazione da parte di fruitori ciechi [7].

Fig. 9. Grafi e oltre.
 (a) L'identico schema del grafo dei tre teatri considerati. Schemi di distribuzione rettificati:
 (b) Teatro Farnese: inversione del senso del percorso e movimento altimetrico. (c) Teatro San Carlo con la peculiarità rilevabile nell'assenza del cambiamento angolare pur con una variazione altimetrica. (d) Opéra Royal di Versailles con il fattore di cambiamento angolare che registra 2 svolte a 90°, secondo l'accesso attivato dopo le trasformazioni, con relativa variazione altimetrica. Elaborazione dell'autrice.



La teoria dei grafi: ciò che resta dello spazio senza la luce

Il metodo dei grafi, nato per risolvere l'enigma dei sette ponti di Königsberg, si applica allo studio della percorribilità senza ripetizioni formulata da Eulero nel 1736 e si estende all'analisi distributiva degli spazi urbani e architettonici nell'ambito degli studi di Space Syntax. In questo contributo si offre una lettura topologica, seppur circoscritta, di alcuni teatri storici attraverso l'individuazione dei grafi del percorso degli spettatori.

La teoria dei grafi permette di classificare le architetture a prescindere dalle loro proprietà metriche, ma anche da quelle stilistiche. La quantità della profondità, intesa come grado di connessione tra gli spazi, integrata dalle considerazioni sul cambiamento angolare, ma anche della variazione altimetrica, registra ciò che resta di un edificio quando è privato non solo della decorazione (verso l'essenza formale auspicata da Adolf Loos), ma anche dell'articolazione delle superfici non influente sulla distribuzione, nonché di quel carattere fondamentale che è il gioco dei volumi raggruppati sotto la luce, capace di definire l'architettura secondo Le Corbusier.

Al di là degli aspetti suggestivi di un'analisi che mira a individuare una ipotesi di schematizzazione dello spazio architettonico, si comprende come il grafo permetta di rilevare ciò

che si percepisce nell'esplorazione dello spazio, escludendo molti dati percepibili solamente attraverso la vista. Alla ricerca della rappresentazione dell'essenza di una tipologia attraverso le sue costanti distributive, si può giungere all'individuazione dei suoi caratteri immanenti ritraendo l'esperienza dei fruitori capace di accomunare le persone dotate di capacità visive e quelle che presentano difficoltà in questo canale sensoriale, come lo stesso ideatore, il matematico Eulero, che perse progressivamente la vista proprio a partire dal periodo dei suoi studi sul grafo dei ponti di Königsberg.

Riconoscimenti

Il presente studio fa parte di una ricerca più ampia fondata sui metodi e strumenti della scienza della rappresentazione applicati allo spazio progettato e finalizzata all'ampliamento dell'accessibilità della comunicazione dello spazio e della sua rappresentazione (*Fenomeni proiettivi e percettivi per l'accessibilità nella rappresentazione architettonica*; Progetti di Ricerca di Ateneo 2023, Università di Genova).

Note

[1] Tra le varie opere di Eulero si ricorda la *Meccanica* (1736) e i testi sul calcolo differenziale (1755) e integrale (1768-70), oltre ai suoi riconoscimenti da parte dell'Accademia di Parigi (1738 e 1740) che lo portarono ad assumere una larga fama in tutti gli ambienti accademici europei.

[2] La formula $\chi = V-S+F$ (V=vertici; S=spigoli; F=facce), che assume il nome di caratteristica di Eulero-Poincaré, permette tra l'altro di individuare i 5 poliedri platonici ($\chi = 2$) come gli unici poliedri convessi regolari.

[3] La città (nome latino Regiomons/Regiomonte) dal 1945 è annessa alla Russia e chiamata Kaliningrad; dal 2023 è rinominata Królewiec dalla Polonia.

[4] Christiaan Huygens, *Œuvres complètes*, 22 vols. Vol 8, La Haye: Société Hollandaise des sciences, 1888, pp. 214-218.

[5] Tra le analisi che si possono integrare con quella dei grafi si può citare l'isovista [Càndito, Meloni 2022].

[6] Costruito all'interno del Palazzo della Pilotta per volere di Ranuccio Farnese, il teatro doveva costituire lo spazio per la festa di accoglienza di una visita di Cosimo II che non si verificò. Pur terminato nel 1619, l'edificio venne inaugurato in occasione delle nozze di Odoardo Farnese nel 1628; subì gravi danni dai bombardamenti del 1944 e venne ricostruito nel 1965.

[7] Si vedano modalità non convenzionali di orientamento per le persone con disabilità visiva [Papadopoulos, Koustriava, Barouti 2017] che sono in corso di sperimentazione nella presente ricerca per introdurre nuove modalità per la comunicazione delle qualità spaziali.

Riferimenti bibliografici

Agostini, A. (1932), Voce Euler; Leonhard. In *Enciclopedia Treccani* https://www.treccani.it/enciclopedia/leonhard-euler_%28Enciclopedia-Italiana%29/. Accessed 17 Dec. 2023

Alexanderson, G. L. (2006). About the cover: Euler and Königsberg's Bridges: A historical view. In *Bulletin (New Series) of the American Mathematical Society*, 43(4), 567–574. <<https://doi.org/10.1090/S0273-0979-06-01130-X>>

Calinger, R.S. *Leonhard Euler: Mathematical Genius in the Enlightenment*. Princeton University Press, 2016. JSTOR, <https://doi.org/10.2307/j.ctv7h0smb>. Accessed 17 Dec. 2023.

Càndito C., Meloni A. (2022), Development of a 3d Isovist Tool: the visibility of the architectural space of the University Palace in Genoa using panoramic photography. *SCIRES-IT. Scientific REsearch and Information Technology Ricerca Scientifica e Tecnologie dell'Informazione*, Vol 12, n. 2 (2022), pp. 15-28

Clemente, S. (2022). *Reconstructing Theatre Architecture: The Developing Process of the Modern Space for the Show*. Cham: Springer International Publishing. <<https://doi.org/10.1007/978-3-030-89968-4>>

Cochez, M., et al. (2021). *Graph Structures for Knowledge Representation and Reasoning: 6th International Workshop, GKR 2020, Virtual Event, September 5, 2020, Revised Selected Papers*. Cham: Springer Nature.

Euler, L. (1736), *Solutio Problematis ad Geometriam Situs Pertinentis*. In *Commentarii. Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae*, n. 8, Petropoli: Typis Academiae, pp. 128-140.

Hillier B., Hanson J. (1984), *The Social Logic of Space*. Cambridge: Cambridge University Press.

Krenz K. (2022). Developments in Space Syntax: Past, Present and Future. In *Urban Design*, vol. 4, n. 42, pp. 80–96.

Papadopoulos, K., Koustriava, E., Barouti, M. (2017). Cognitive maps of individuals with blindness for familiar and unfamiliar spaces: Construction through audio-tactile maps and walked experience. In *Computers in Human Behavior*, 75, pp. 376–384.

Pevsner, Nikolaus (1986). *Storia e caratteri degli edifici*; edizione italiana a cura di Achille M. Ippolito, Roma: Palombi.

Serra M., Hillier B. (2019). Angular and Metric Distance in Road Network Analysis: A nationwide correlation study. In *Computers, Environment and Urban Systems*, n. 74, pp. 194–207. <<https://doi.org/10.1016/j.compenvurbsys.2018.11.003>>

Tafari M. (1987), Il luogo teatrale. In Cruciani F., Seragnoli D., *Il teatro italiano nel Rinascimento*. Bologna: Il Mulino, pp. 53-66.

Zerlenga O. (2020). Teatri napoletani. Fonti iconografiche e realtà costituite a confronto. In *Diségno*, n. 6, pp. 81-94.

Autrice

Cristina Cándito, Università di Genova, cristina.candito@unige.it

Per citare questo capitolo: Cristina Cándito (2024). Topologia, o delle qualità immanenti delle forme. Dai grafi di Eulero alla rappresentazione semplificata e accessibile dell'architettura/Topology, or the immanent qualities of forms. From Euler graphs to the simplified and accessible representation of architecture. In Bergamo F., Calandriello A., Ciammaichella M., Friso I., Gay F., Liva G., Monteleone C. (a cura di). *Misura / Dismisura. Atti del 45° Convegno Internazionale dei Docenti delle Discipline della Rappresentazione/Measure / Out of Measure. Transitions. Proceedings of the 45th International Conference of Representation Disciplines Teachers*. Milano: FrancoAngeli, pp. 1097-1118.

Topology, or the immanent qualities of forms. From Euler graphs to the simplified and accessible representation of architecture

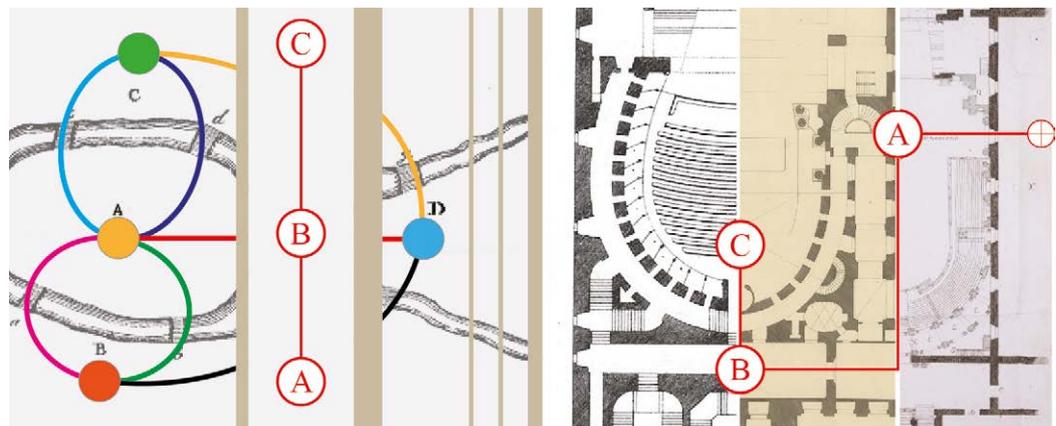
Cristina Càndito

Abstract

Representation can be the ideal means to guide the search for an essence of architecture, if not in absolute terms, than certainly at the communicative level. The analysis that can be carried out through the graph method can introduce the world of applied topology to the study of non-metric characters of space. Born, thanks to Euler, in the eighteenth century in order to solve the riddle of paths without repetition, the graph method is applied in contemporary studies in the context of Space Syntax theory as a method for measuring the relative connection between spaces through the depth index. Together with the angular distance, which detects changes in direction, the most essential elements for the user's travel experience can be recorded, and gradual implementations are possible. The method also lends itself to simplified communication, addressing the needs of the non-expert audience, while also translating into tactile form, a more memorable and easier mode of access for blind people. The present study applies this method to some theatrical buildings of the seventeenth and eighteenth centuries whose graphs of the internal distribution coincide and whose differences in angular distance and other features reflect their different cultural and spatial contexts.

Keywords

topology, graphs, architectural typology, visual impairment, theatres



Summary image of the essay. Author's elaboration.

Introduction

Is it possible to identify criteria to define geometric shapes without resorting to their metric properties? And can these principles suggest more accessible forms of representation of architecture? Some answers in this regard are provided by Leonhard Euler, the Swiss mathematician active at the end of the eighteenth century, known, among other things, for being the father of topology and the graph method.

This study provides an overview of the role that graphs play in determining the distribution characteristics of architectural spaces. In the analysis of architecture, in fact, graphs provide simplified diagrams of the spatial relationships between different environments, in a way that highlights some characteristics of an architectural space and affords users an understanding of space, even without specific technical knowledge and even, in the case of visual impairment.

Euler graphs: distribution and representation

In 1735, an enigma regarding itineraries within the urban fabric was solved by a Swiss mathematician, who conceived of a method destined to impact the study of spatial relationships. The creator of the innovative solution was Leonhard Euler (1707-1783), one of the most

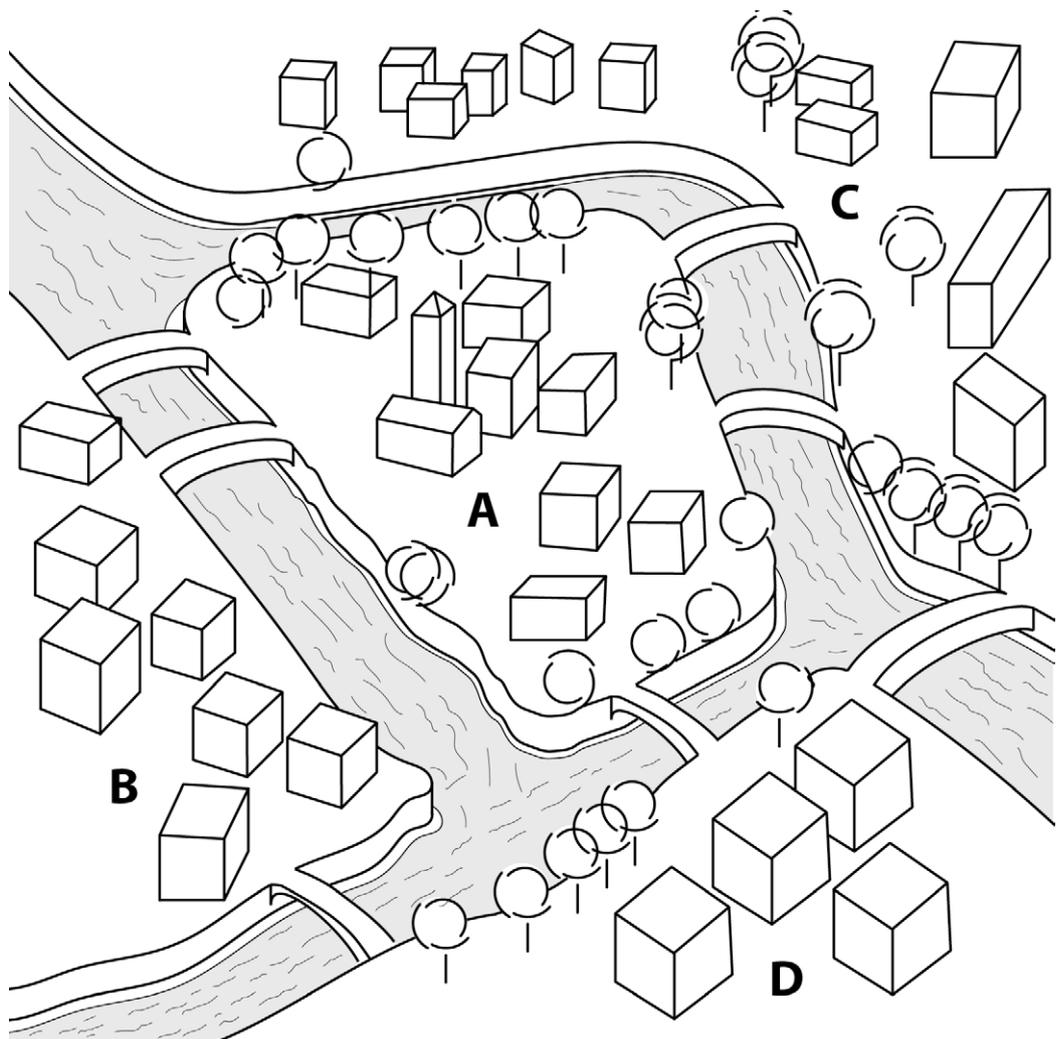


Fig. 1. Schematic axonometric view of the portion of the city of Königsberg which included the two islands A and D and the seven bridges. Author's elaboration.

prolific mathematicians of his time, who worked between St. Petersburg and Berlin. Here we cannot even mention the countless contributions he made to various fields of mathematics, often leading to practical developments in physics and astronomy [Agostini 1932; Calinger 2016] [1]. His long scientific career beginning with his early graduation in Basel in 1736, also allowed him to deal with popular topics that were only apparently negligible. The formula known as the Euler characteristic, which unites convex polyhedra by relating the vertices, edges and faces of a polyhedron [2], constitutes one of the foundations of topological geometry. We would like to take a moment to relate its use in solving the curious enigma of the Seven Bridges of Königsberg, which tradition says haunted the local population [3]. The Prussian town, overlooking the Baltic Sea, covered two islands on the Pregel river that crosses it; the western one was connected to the northern part of the city by two bridges and to the northern part by two more. An additional fifth bridge connected the western island to its counterpart to the east. Two other bridges were constructed on the eastern

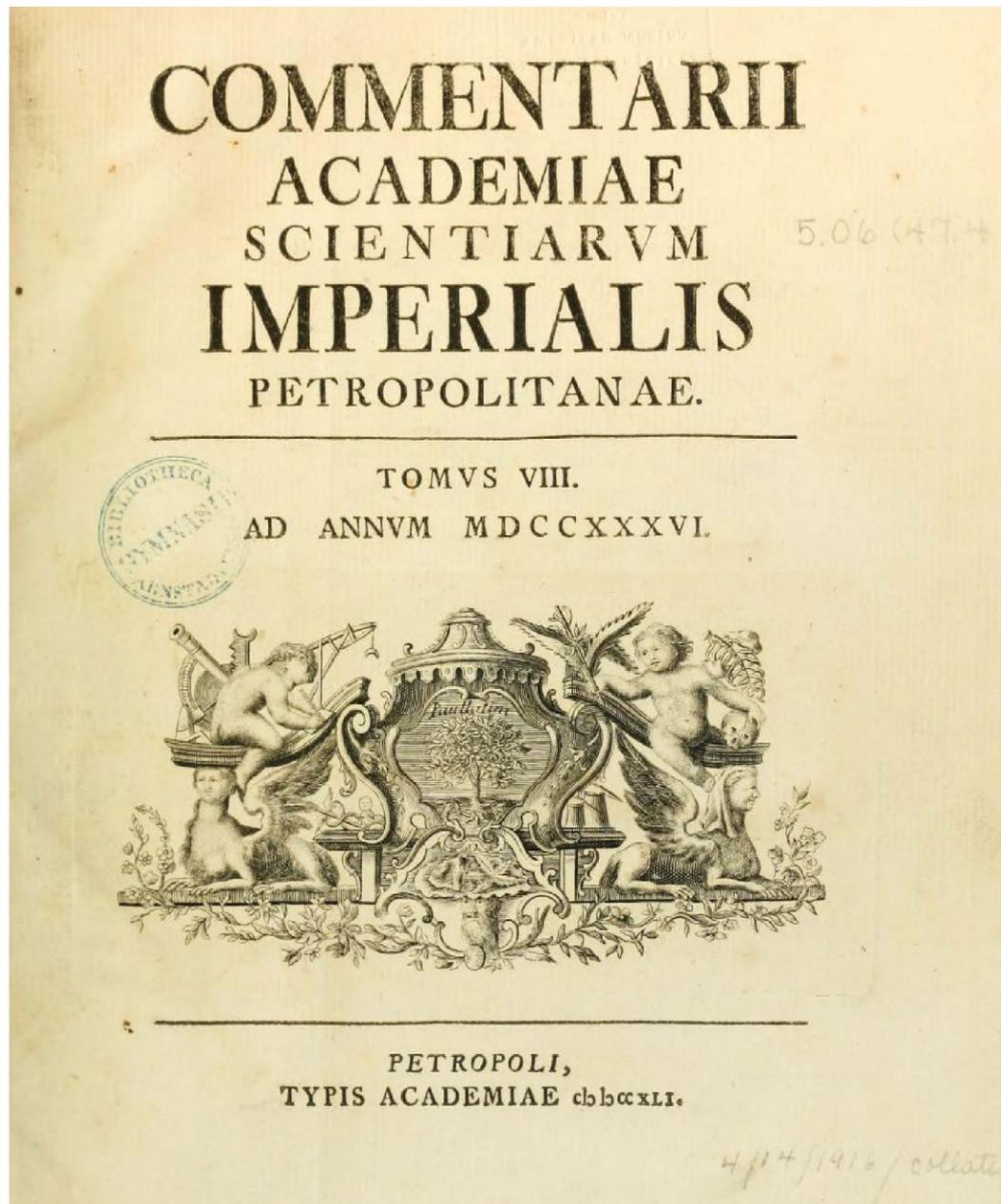


Fig. 2. Commentarii. Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae, n. 8, Petropoli: Typis Academiae: frontispiece. Leonhard Euler (1736), Solutio Problematis ad Geometriam Situs Pertinentis.

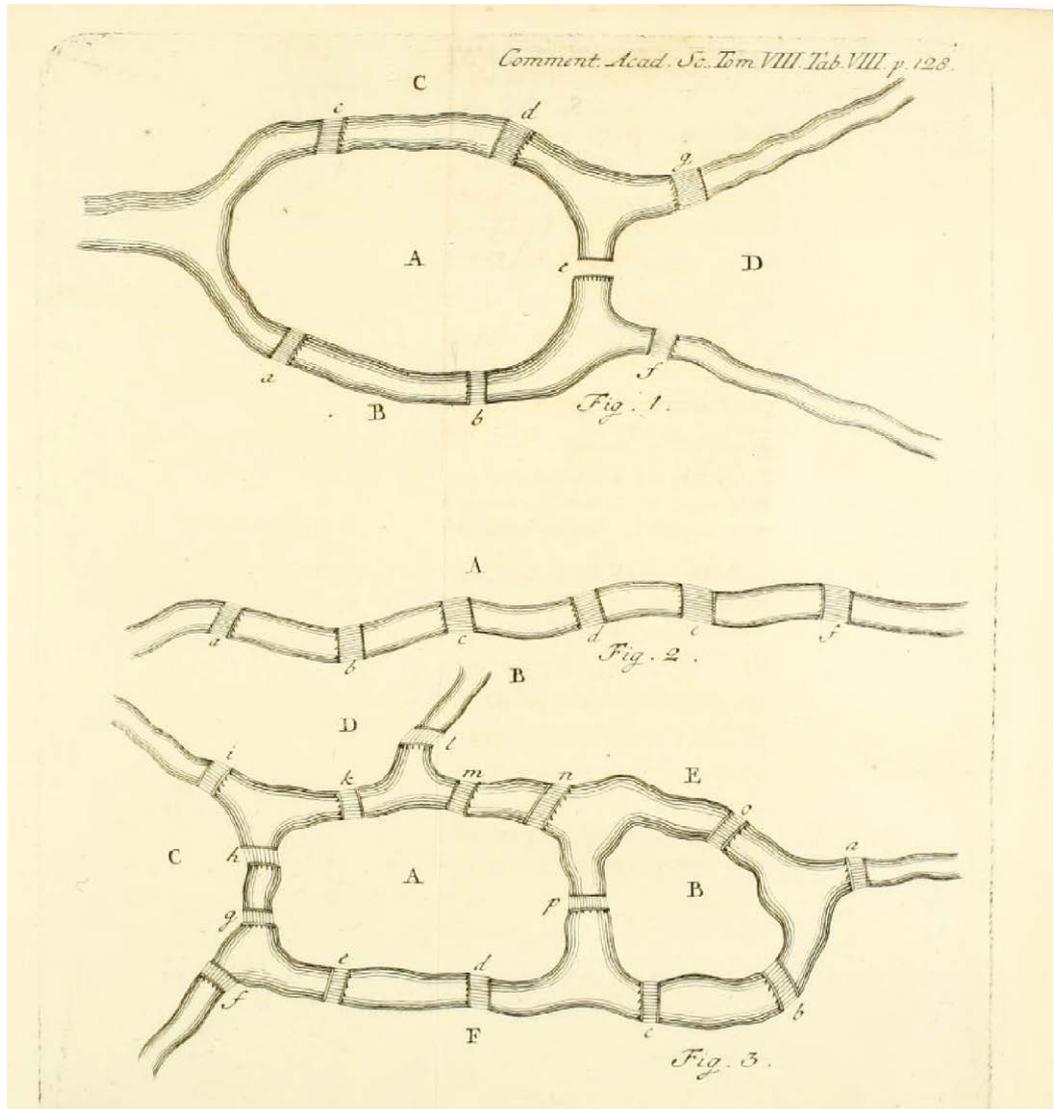


Fig. 3. Illustration of the Königsberg bridge problem. (Euler 1736, fig. 1)

island, one connecting the island to the mainland in the north and the other bridging it with the mainland to the south (fig. 1).

The problem that arose was whether it was possible to trace a route that would allow one to return to the starting point by crossing all seven bridges only once. The demonstration of the absence of a solution was provided by Euler through a simplified representation of spatial relations - the graph - during a presentation to the members of the St. Petersburg Academy in 1735 and published the following year [Euler 1736; Alexanderson 2006] (figs. 2-3). In the same period, Euler began to suffer from serious visual disturbances [Agostini 1932] with the loss of sight in one eye, resulting in total blindness around 1768.

Graph theory is therefore born from an apparently marginal enigma methodology capable of representing spatial relations thanks to a generalization that depicts their essential characteristics (fig. 4). Euler himself demonstrates awareness of the potential of the method, whose origins he recognizes in what Gottfried Wilhelm Leibnitz had earlier defined as the geometry of position (*geometria situs*). This concept was introduced in a letter to Christian Huygens in 1679 [4], in which Leibnitz discussed such characteristics independent of distances without resorting to calculation methods.

Using contemporary geometric language, a graph is a two-dimensional network composed of two elements: the nodes, which can be assimilated to passage points, and the arcs, which

constitute the connection lines. The nodes are defined as 'even' or 'odd' depending on the number of converging arcs.

Repetition-free practicability - traceable without lifting the pen from the paper - occurs in the case of what is today called an Eulerian graph, containing 'even' - or at most two odd - nodes. If it starts from a given node and ends on the same one, the graph is defined as 'closed' and has only even nodes. If, however, it starts and ends on different nodes, then it contains two odd nodes, one as a starting point along the lattice and the other as a conclusion. In this case, it is defined as 'open.' Euler demonstrated the impossibility of a solution for the Königsberg bridges, since the lattice was neither open nor closed, containing four odd nodes.

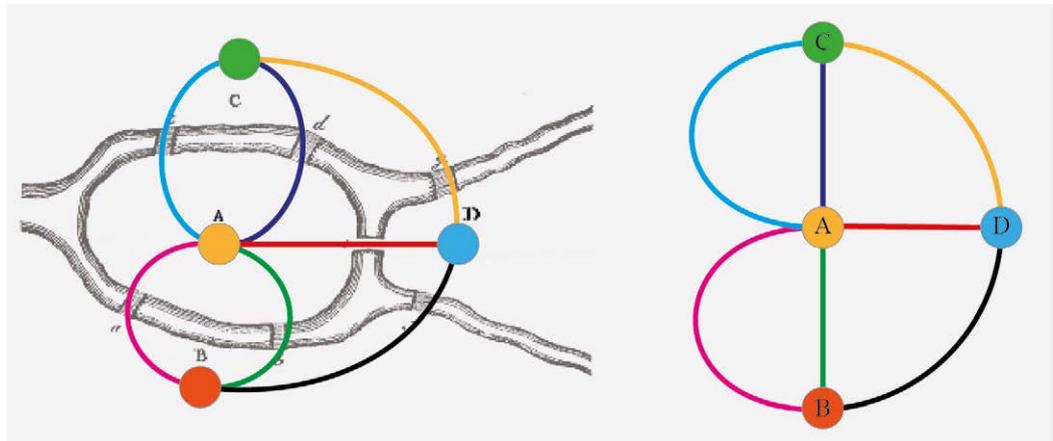


Fig. 4. The steps that lead to a simplified graph: the graph is not Eulerian and therefore does not allow practicability without repetitions. Author's elaboration.

Applications for the study of spatial relationships: places for entertainment

The graph method created to identify practicability without repetitions, which can, for example, be applied to the determination of exhibition routes, is also used for the analysis of other aspects of spatiality. The Space Syntax theory, conceived of at the end of the 1970s [Hillier Hanson, 1984] with the aim of highlighting the relationships between space and human behaviour in the urban environment and in architecture, develops instrumental analysis methodologies [Krenz 2022] also including the justified graph method [Cochez et al. 2021]. Among the significant potentialities of this representation, one is described which appears influential for the purposes of this discussion, namely the so-called 'depth data' [Hillier; Hanson 1984, p.108] which indicates, with a numerical progression, the degree of connection between

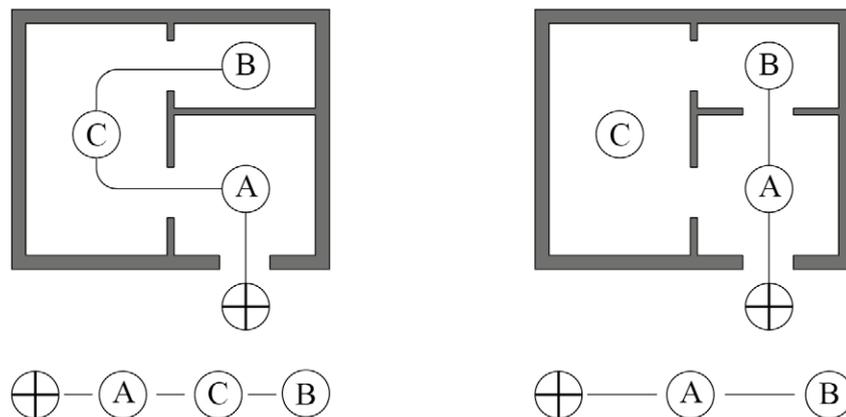


Fig. 5. An identical planimetric diagram which translates into different graphs depending on the different connections. Left: depth = 2 between A and B; right: depth = 1 between the same rooms, due to the presence of a direct connection. Author's elaboration.

en two environments. Let's consider two contiguous rooms: A and B. The morphology of the graph and the depth data change depending on whether the distribution occurs through a third room, C (A is connected to B with a depth 2), or if these are directly connected (depth 1) (fig. 5). In this reading - necessarily relating to the relationship between two specific environments - the lower the depth, the greater the connection between the two environments. In complex spaces, the sum of the partial depths with respect to a significant reference (for example, the entrance hall) indicates the degree of connection of the system.

This change of perspective allows us to focus on the reading of the relationships between the environments within a system according to what is detected in the path followed by the users of the space. This is, in some respects, more significant than the metric data, which record the proximity as the linear distance.

It is considered important to highlight the potential linked to the accessibility of the representation of this analysis, as it lends itself to an effective tactile communication of the distributional characteristics of architectural spaces in a simplified and more memorable formula, which can be understood even in the absence of sight.

In order to show how flexible graph theory can be in the representation of architecture, spaces of entertainment have been chosen as a case study, comparing geographically and chronologically distant examples, in order to recognise, within an evident stylistic difference, the distinctive and constant characters relating to the distribution of spaces.

This experiment can only be considered exemplary, because a more comprehensive study of the architectural subject should be carried out using a higher number of examples and with variants of the graph system applied to the intensity of the exploration flows of the places and other considerations [5]. However, it is interesting to present some preliminary

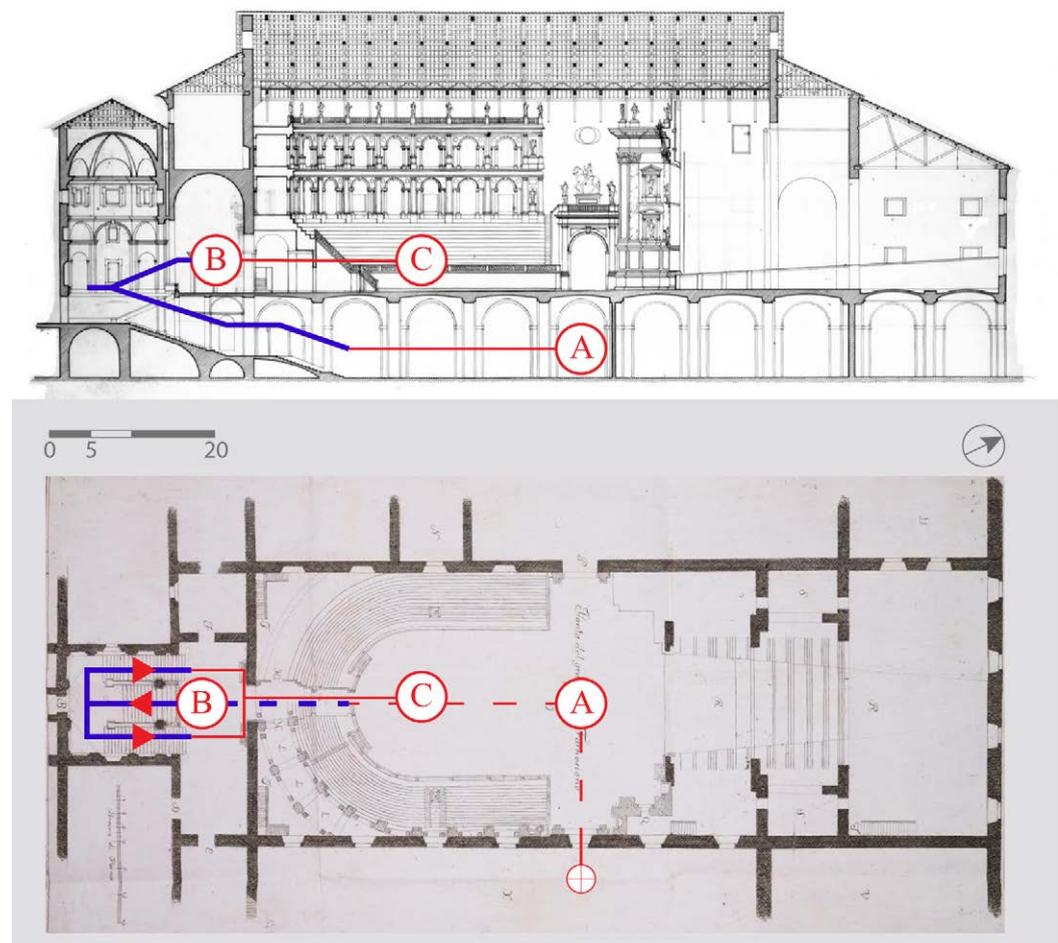


Fig. 6. Farnese Theatre of Parma (G.B. Aleotti, 1618-1619): plan and section (Superintendence of Monuments of Emilia-Bologna; Mob. G Scaf. 63) with the distribution scheme superimposed. In this figure, as in the following ones, the red line indicates flat routes and the blue line those with a change in level. Author's elaboration.

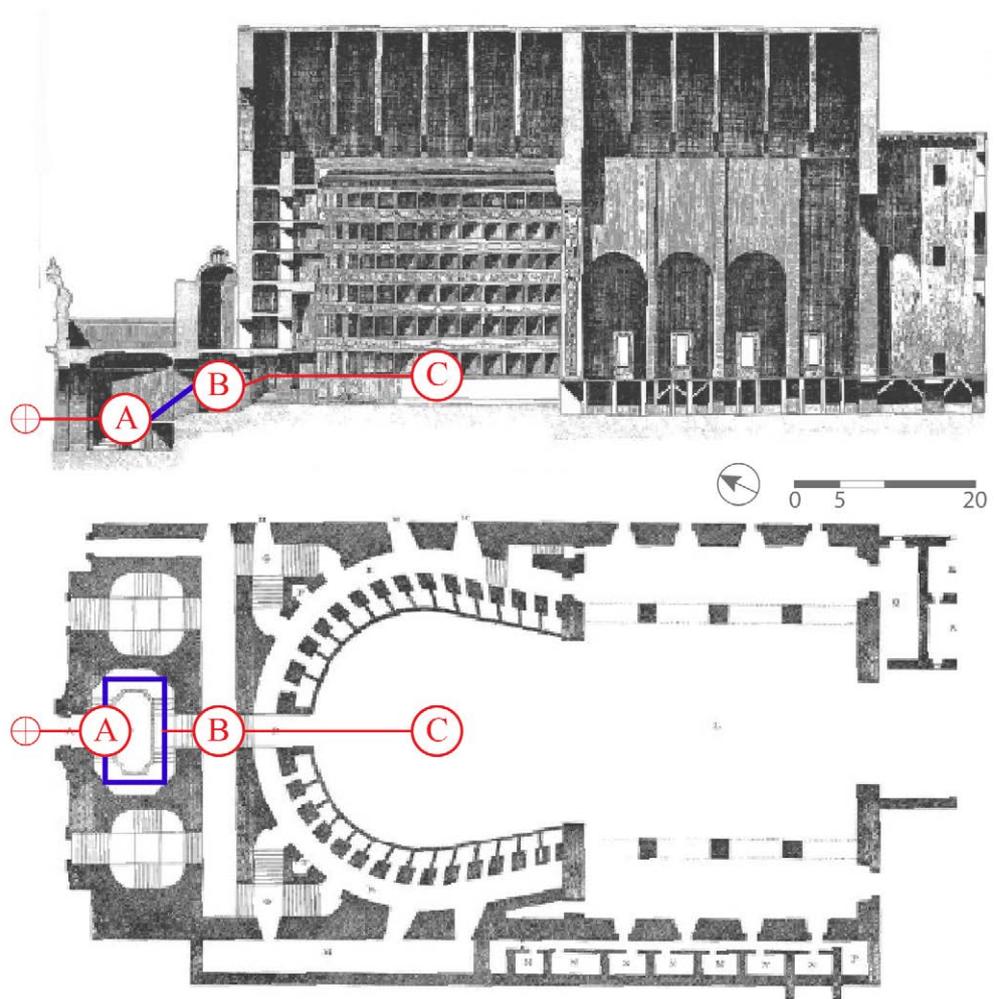


Fig. 7. San Carlo Theatre in Naples (G.A. Medrano, 1737): plan and section (Diderot, D., & Alembert, D. (1751-1780). *L'Encyclopédie, Recueil de Planche ...*, 25, *Theâtres*, pl. I-II) with overlapping distribution sections. Author's elaboration.

findings that allow us to recognize and represent the essential characteristics of apparently very different organisms.

Here, we cannot provide an introduction to the vast history of theatre spaces with their variations linked to architectural design and, more extensively, to the cultural conception of performance [Tafuri 1987; Pevsner 1986; Zerlenga 2020; Clement 2022]. Therefore, the entire classical, medieval and Renaissance period is omitted, as well as cultural peculiarities such as the Elizabethan theatre or examples in Eastern contexts. It should also be underlined that the layout of the room for the performance is not the object of analysis, but rather the distribution of the spaces that lead the public to the area dedicated to the show.

Nikolaus Pevsner [Pevsner 1971, pp. 83-114] deals with the characteristics of theatres starting from the birth of the Renaissance theatre, which is defined by its permanent position inside the Palace, its use of a single stage, and its provision of a fixed space for the public. The fundamental themes regarding the development of the theatre in Italy, France and England are naturally identified in the characteristics of the environment for the performance and for the public, which do not, however, coincide with the distribution of the building. Pevsner [Pevsner 1971, p. 86] observes the particularity of the U-shaped plan of the Farnese Theatre in Parma (G.B. Aleotti, 1618-1619) [6], but here we intend to highlight the simplicity of the distribution which guides the public from the external courtyard into the interior of the palace (A) and leads them to the performance hall (C) via a staircase (B) which leads to

the upper level (fig. 6). An entrance portal provides access to the stalls, which assumes the flexible function of a place for the public or an arena for the show. The route that, from this position, allows you to reach the various levels of the stepped auditorium via a horseshoe-shaped perimeter staircase, concerns only the capillary distribution.

If we analyse this articulation of the route and compare it with those employed in the majority of theatres built, even in the following century, including Italian theatres - such as the San Carlo in Naples (G.A. Medrano, 1737) (fig. 7) - or French examples - such as the Opéra Royal of Versailles (J.A. Gabriel, 1763-1770) (fig. 8), we can easily recognize some constants, despite differences in of the range of dimensions and function of the rooms, and differences in stylistic expressions.

The varying conceptions of the space for the show or for the public, the different appearances of passage areas and the variable weight assumed by the number and arrangement of the orders of any boxes, in fact, do not influence the schematic succession of the spectator's path, which leads in all three cases to a depth of the space for the show with respect to the entrance equal to 2, as shown by the identity of the graph scheme (fig. 9 a). We can, however, distinguish the relationship with the outside, as will be shown in the case of the Farnese Theatre and the Versailles Opera, where we observe a lateral entrance caused by the position within the respective systems of the buildings to which they belong.

A feature that allows us to consider the complexity of the concept of distance not limited to that metric, but also not dependent only on the number of depth measured with the graph, is the factor of the angular distance, or the change of direction from one space to another [Serra, Hillier 2019]. The topological purity of the graph analysis can thus always be refined

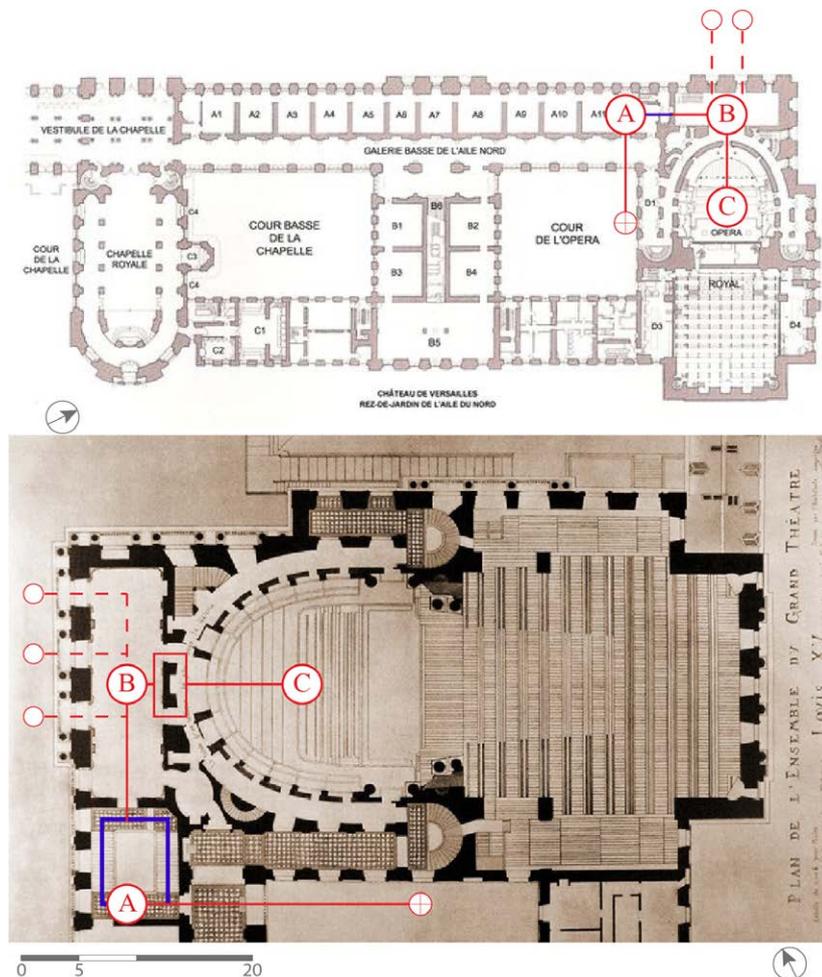
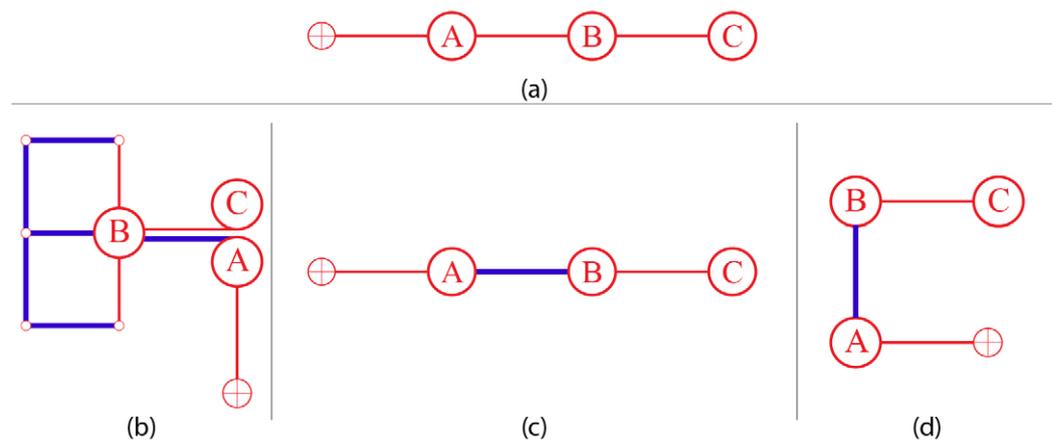


Fig. 8. Opéra Royal of Versailles (J.A. Gabriel, 1763-1770); plan of the wing of the Palace and plan with the distribution scheme superimposed. In hatching, the direct gates active in some historical phases. Author's elaboration.

with the aim of recording the characteristics of the path that influence the user's experience. Considering this aspect, it is possible to differentiate the path that moves from A, which takes on the function of an atrium, to B, the foyer, to the spectators' space, C. In this way, we observe the conservation of the schematic rectified axially of the graph only in the San Carlo Theatre (fig. 9 c). In the Farnese Theatre (fig. 9 b), the axial representation instead conceals several changes in direction and in the Versailles Opéra (fig. 9 d) there are two variations in direction at 90°, always determined by the constraints of the context.

Here we intend to highlight another characteristic often overlooked by two-dimensional representations: that of the altimetric variable, represented in blue in figures 6 to 9. In this way, it is possible to refine the communication of space through important data for the potential frequenters of the space, as it impacts the physical effort generated by the route and the travel possibilities for certain categories of people. The diagrams, although simplified, can thus provide essential information for orientation and accessibility, in addition to lending themselves to tactile translation and easy memorization by blind users [7].

Fig. 9. Graphs and beyond. (a) The identical diagram of the graph of the three theatres considered. Adjusted distribution schemes: (b) Farnese Theatre: reversal of the direction of the route and altimetric movement. (c) San Carlo Theatre with the peculiarity found in the absence of angular change despite an altimetric variation. (d) Opera Royal of Versailles with the angular change factor that records two 90° turns, according to the access activated after the transformations, with relative altimetric variation. Author's elaboration.



Graph theory: what remains of space without light

The graph method, created to solve the enigma of the Seven Bridges of Königsberg, is applied to the study of practicability without repetitions as formulated by Euler in 1736 and extends to the distribution analysis of urban and architectural spaces in the context of Space Syntax studies. The present study offers a topological, albeit limited, reading of some historical theatres through the identification of the graphs of the spectators' path.

Graph theory allows architectures to be classified regardless of their metric or stylistic properties. The quantity of depth, understood as the degree of connection between spaces, integrated by considerations of the angular distance, as well as the altimetric variation, records what remains of a building when it is rid of not only decoration (towards the formal essence desired by Adolf Loos), but also of the articulation of surfaces beyond distribution. Additionally, it also disregards the idea of architecture as "the play of volumes under the light", as defined by Le Corbusier.

Beyond the suggestive aspects of an analysis that aims to identify a hypothesis of schematization of architectural space, we understand how the graph allows us to detect what is perceived in its exploration, excluding many data that can only be perceived through sight. In search of the representation of the essence of a typology through its distributional constants, one can arrive at the identification of its immanent characteristics by portraying the experience of users capable of bringing together people with visual abilities and those who present difficulties in this sensorial channel, like the creator himself, the mathematician Euler, who progressively lost his sight starting from the period of his studies on the Königsberg bridge graph.

Acknowledgments

The present study is part of a broader research project based on the methods and tools at play in the science of representation as applied to designed space and aimed at expanding the accessibility of the communication of space and its representation (*Projective and perceptive phenomena for accessibility in architectural representation*; University of Genoa Research Projects 2023).

Notes

[1] Among Euler's various works, we remember *Mechanics* (1736) and the texts on differential (1755) and integral (1768-70) calculus, in addition to his recognition by the Paris Academy (1738 and 1740) which led him to assume a wide reputation in all European academic circles.

[2] The formula $\chi = V-S+F$ (V =vertices; S =edges; F =faces), which takes the name of Euler-Poincaré characteristic, allows among other things to identify the 5 Platonic polyhedra ($\chi = 2$) as the only regular convex polyhedra.

[3] The city (Latin name Regiomons/Regiomonte) has been annexed to Russia since 1945 and called Kaliningrad; since 2023 it has been renamed Królewiec by Poland.

[4] Christiaan Huygens, *Œuvres complètes*, 22 vols. Vol 8, La Haye: Société Hollandaise des sciences, 1888, pp. 214-218.

[5] Among the analyses that can be integrated with that of graphs we can mention the isovist [Càndito, Meloni 2022].

[6] Built inside the Palazzo della Pilotta at the behest of Ranuccio Farnese, the theatre was supposed to be the space for the welcoming party of a visit by Cosimo II which did not occur. Although completed in 1619, the building was inaugurated on the occasion of Odoardo Farnese's wedding in 1628; it suffered serious damage from the bombings of 1944 and was rebuilt in 1965.

[7] See unconventional methods of orientation for people with visual impairments [Papadopoulos, Koustriava, Barouti 2017] which are being tested in the present research to introduce new methods for communicating spatial qualities.

References

- Agostini, A. (1932), Voce Euler, Leonhard. In *Enciclopedia Treccani* https://www.treccani.it/enciclopedia/leonhard-euler_%28Enciclopedia-Italiana%29/. Accessed 17 Dec. 2023
- Alexanderson, G. L. (2006). About the cover: Euler and Königsberg's Bridges: A historical view. In *Bulletin (New Series) of the American Mathematical Society*, 43(4), 567–574. <<https://doi.org/10.1090/S0273-0979-06-01130-X>>
- Calinger, R.S. *Leonhard Euler: Mathematical Genius in the Enlightenment*. Princeton University Press, 2016. JSTOR, <https://doi.org/10.2307/j.ctv7h0smb>. Accessed 17 Dec. 2023.
- Càndito C., Meloni A. (2022), Development of a 3d Isovist Tool: the visibility of the architectural space of the University Palace in Genoa using panoramic photography. *SCIRES-IT. SClentific RESearch and Information Technology Ricerca Scientifica e Tecnologie dell'Informazione*, Vol 12, n. 2 (2022), pp. 15-28
- Clemente, S. (2022). *Reconstructing Theatre Architecture: The Developing Process of the Modern Space for the Show*. Cham: Springer International Publishing. <<https://doi.org/10.1007/978-3-030-89968-4>>
- Cochez, M., et al. (2021). *Graph Structures for Knowledge Representation and Reasoning: 6th International Workshop, GKR 2020, Virtual Event, September 5, 2020, Revised Selected Papers*. Cham: Springer Nature.
- Euler, L. (1736), *Solutio Problematis ad Geometriam Situs Pertinentis*. In *Commentarii. Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae*, n. 8, Petropoli: Typis Academiae, pp. 128-140.
- Hillier B., Hanson J. (1984), *The Social Logic of Space*. Cambridge: Cambridge University Press.
- Krenz K. (2022). Developments in Space Syntax: Past, Present and Future. In *Urban Design*, vol. 4 , n. 42, pp. 80–96.
- Papadopoulos, K., Koustriava, E., Barouti, M. (2017). Cognitive maps of individuals with blindness for familiar and unfamiliar spaces: Construction through audio-tactile maps and walked experience. In *Computers in Human Behavior*, 75, pp. 376–384.
- Pevsner, Nikolaus (1986). *Storia e caratteri degli edifici*; edizione italiana a cura di Achille M. Ippolito, Roma: Palombi.
- Serra M., Hillier B. (2019). Angular and Metric Distance in Road Network Analysis: A nationwide correlation study. In *Computers, Environment and Urban Systems*, n. 74, pp. 194–207. <<https://doi.org/10.1016/j.compenvurbsys.2018.11.003> >
- Tafuri M. (1987), Il luogo teatrale. In Cruciani F., Seragnoli D., *Il teatro italiano nel Rinascimento*. Bologna: Il Mulino, pp. 53-66.
- Zerlenga O. (2020). Teatri napoletani. Fonti iconografiche e realtà costituite a confronto. In *Disegno*, n. 6, pp. 81-94.

Author
Cristina Cándito, Università di Genova, cristina.candito@unige.it

To cite this chapter: Cristina Cándito (2024). Topologia, o delle qualità immanenti delle forme. Dai grafi di Eulero alla rappresentazione semplificata e accessibile dell'architettura/Topology, or the immanent qualities of forms. From Euler graphs to the simplified and accessible representation of architecture. In Bergamo F., Calandriello A., Ciammaichella M., Friso I., Gay F., Liva G., Monteleone C. (Eds.), *Misura / Dismisura. Atti del 45° Convegno Internazionale dei Docenti delle Discipline della Rappresentazione/Measure / Out of Measure. Transitions. Proceedings of the 45th International Conference of Representation Disciplines Teachers*. Milano: FrancoAngeli, pp. 1097-1118.

Copyright © 2024 by FrancoAngeli s.r.l. Milano, Italy

Isbn 9788835166948