

Tassellatura di Voronoj da primitive geometriche poligonali con un algoritmo *open source* e multiplatforma

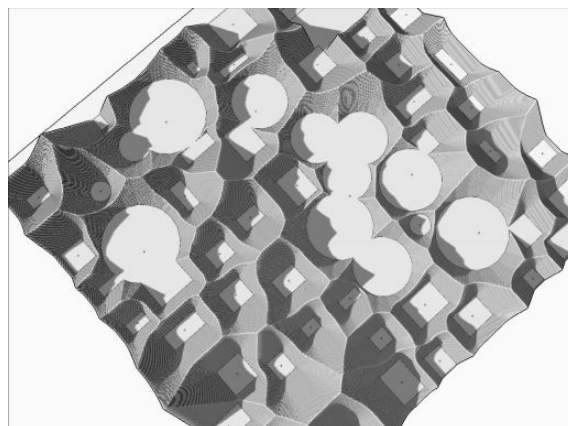
Amedeo Ganciu

Abstract

Le tecniche di ripartizione dello spazio, come il Voronoj, consentono di determinare una tassellatura rispetto ad una distribuzione iniziale di nuclei e trovano applicazioni in tanti ambiti di ricerca: come area clinica, ingegneria, mineralogia e astrofisica, architettura e design. In modo molto sintetico, tassellare uno spazio significa misurare una regione di appartenenza rispetto ad almeno due elementi. In molte esperienze rintracciabili in letteratura le tassellature sono solitamente generate partendo da primitive geometriche di tipo puntuale e in qualche caso attribuendo loro un criterio di peso o importanza. Inoltre, le applicazioni informatiche utilizzate per il loro sviluppo non consentono la migrazione dei dati e risultati verso altre piattaforme. In questa direzione, la ricerca presenta i risultati ottenuti da un algoritmo sviluppato dall'Autore che editato in linguaggio Python consente innanzitutto la migrazione tra piattaforme differenti come GIS e Blender o altre ancora. Inoltre, consente di sviluppare la tassellatura a partire da forme poligonali regolari e non regolari e modellizzare il risultato tridimensionalmente, anche se opera ancora su un piano bi-dimensionale. Le sue applicazioni, come per i numerosi casi ritrovati in letteratura, possono interessare molteplici campi di ricerca; tuttavia, anche se sono stati fatti significativi sviluppi, il suo sviluppo deve considerarsi ancora ad una fase iniziale.

Parole chiave

Ripartizione dello spazio, Voronoj, Algoritmi, Modellizzazione



Modellizzazione della tassellatura di Voronoj a partire da forme poligonali. Elaborazione dell'Autore.

Introduzione sulle tassellature e più recenti applicazioni

Nella terza parte del trattato *Principia Philosophiae*, scritto da Descartes e pubblicato prima in latino nel 1644 e poi tradotto in francese nel 1647, si descrive una struttura cosmica basata su una sorta di "vortici", la cui forma e dimensione dipendeva dalla posizione della stella contenuta al loro interno. Attraverso la descrizione e rappresentazione dei "vortici cartesiani", (fig. 1) si sosteneva l'impossibilità dell'esistenza di uno spazio vuoto perché in conflitto con l'idea stessa di materia che presupponeva per la sua stessa esistenza la necessità di una sua estensione fisica; quindi, sempre secondo questa teoria il "vuoto" era da considerarsi comunque "pieno" però di una forma di materia non osservabile o comprensibile che Descartes chiamava "materia sottile" [Descartes 1644].

Sebbene la teoria cartesiana sull'assenza di vuoto fu confutata quasi immediatamente dall'esperimento di Torricelli svoltosi nella primavera del 1644 a Firenze, l'idea di una ripartizione dello spazio in regioni di appartenenza o dipendenza riuscì comunque ad attecchire per poi essere perfezionata nei secoli successivi.

La prima formalizzazione moderna del concetto di regione di appartenenza si può far risalire al XIX secolo quando il matematico tedesco Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet, dimostrò la possibilità di suddividere un piano bidimensionale rispetto ad una distribuzione di elementi puntuali attraverso criteri di vicinanza; successivamente, il matematico ucraino Georgij Feodosevič Voronoi studiando le forme quadratiche dimostrò la possibilità di estendere il lavoro di Dirichlet allo spazio multidimensionale [Okabe et al. 2009, p. 6].

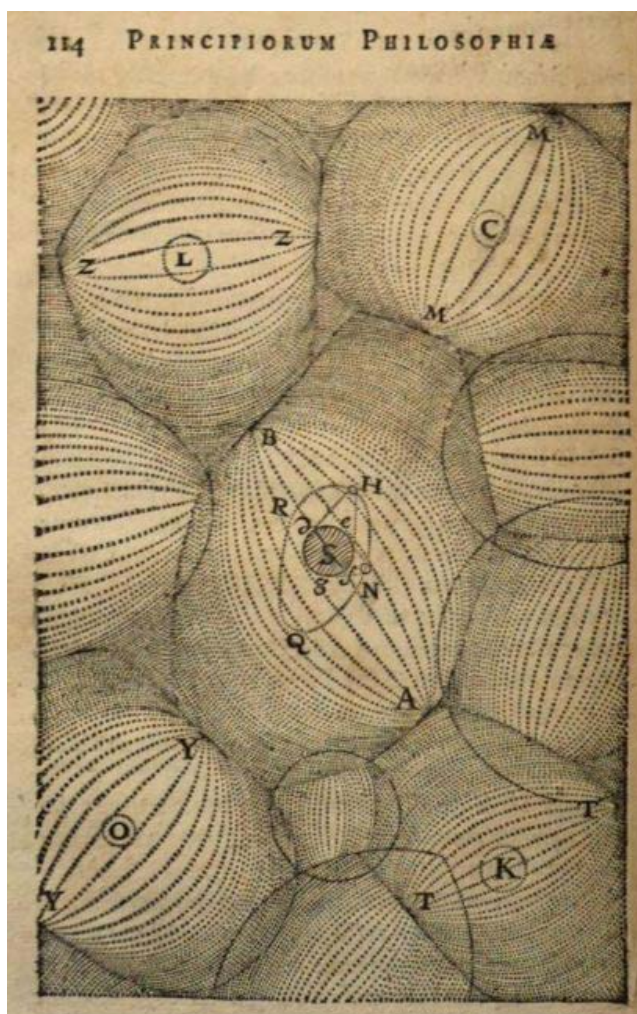


Fig. 1. Illustrazione eseguita da Descartes che rappresenta i "vortici" alla base della struttura dell'universo per sostenere la sua teoria riguardante l'assenza di vuoto [Descartes 1644, parte III, p. 114].

I postulati sulla ripartizione dello spazio definiti da Dirichlet e Voronoi trovano attualmente applicazioni in molti settori disciplinari: dalle scienze mediche a quelle geologiche, dalle applicazioni nei processi di animazione tridimensionale, all'architettura e alla comunicazione del patrimonio culturale. Per esempio, in neurologia Duyckaerts e Godefroy [Duyckaerts, Godefroy 2000] utilizzano Voronoi per studiare la distribuzione e la tipologia degli ammassi neuronali e dei grovigli neurofibrillari nel cervello umano, calcolando la "densità numerica" di una cellula come il volume del poliedro convesso che la contiene, ossia la regione di spazio del cervello più vicina ad una cellula che a qualsiasi altra. Sempre nel campo della biologia, prima Poupon [Poupon 2004] e poi Deok-Soo [2005], utilizza i poliedri di Voronoi per modellizzare la struttura tridimensionale delle proteine per rispondere ad alcune questioni come il volume degli atomi, interazioni e legami biochimici. Rimanendo sul piano infinitesimale [Wunderlich 2003] utilizza Voronoi per determinare la differenza nella disposizione degli atomi nei materiali amorfi o liquidi rispetto alla disposizione regolare nelle strutture cristalline consentendo di simulare la dinamica molecolare nello spazio reale e reciproco delle particelle. Passando ad un livello osservabile ad occhio nudo, Voronoi trova diverse applicazioni nell'ingegneria e nel settore manifatturiero: dalla robotica applicata alla pulizia domestica [Oh et al. 2004], al monitoraggio dell'ambiente e la sicurezza delle aree urbane [Murray et al. 2007], fino al controllo di droni per la ricognizione e la successiva modellizzazione del territorio tridimensionale [Torres et al., 2016]. Infine, considerando l'infinitamente grande [Paranjape, Alam 2020] utilizza Voronoi per calcolare il volume degli ammassi stellari a supporto delle più recenti teorie cosmologiche sull'evoluzione delle galassie (fig. 2). Muovendosi dal reale al piano metafisico, Voronoi ha trovato ampia applicazione nel settore

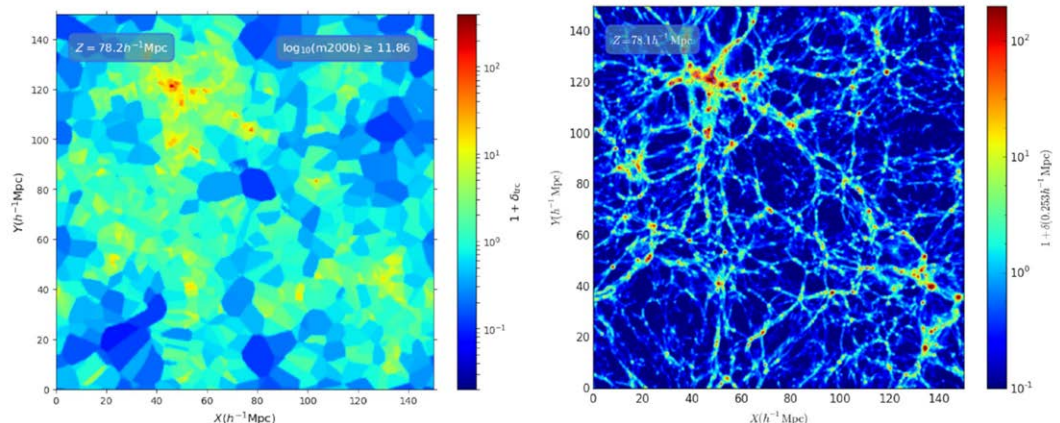
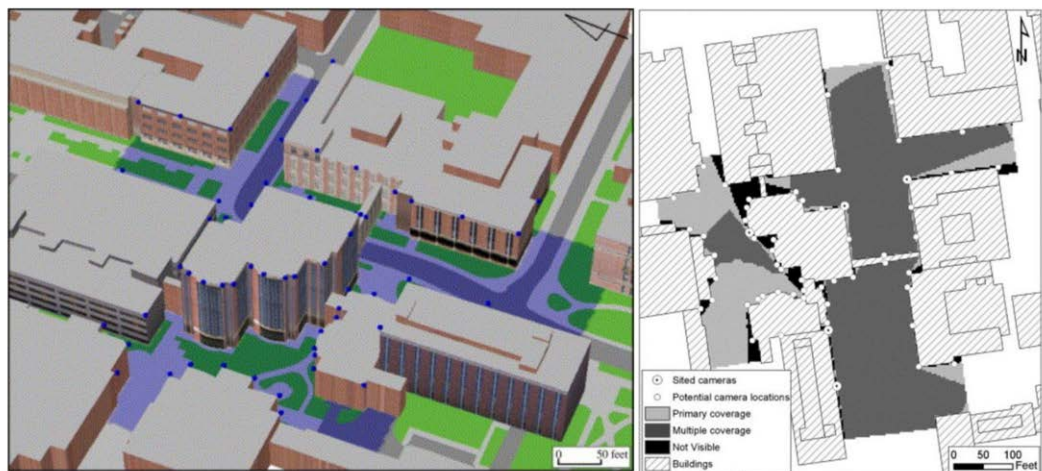


Fig. 2. In alto: applicazione di Voronoi per l'ottimizzazione della videosorveglianza presso l'Ohio State University Campus [Murray et al. 2007, p. 141]. In basso: visualizzazione della distribuzione delle masse cosmiche attraverso Voronoi [Paranjape, Alam 2020, p. 3237].

dell'animazione per bambini (fig. 3); per esempio, sono celebri le scene in cui personaggi animati come *Tom and Jerry* durante le loro avventure sono responsabili di numerosi disastri edilizi; in questo caso Voronoi è alla base della modellizzazione della frattura di muri, porte, tavoli ecc. Voronoi trova inoltre applicazione nella visualizzazione dei dati gerarchici (fig. 4), in associazione con le mappe ad albero o *TreeMap*, supportando efficacemente l'utilizzatore dell'informazione nella percezione delle gerarchie tra gli elementi [Balzer, Deussen 2005].

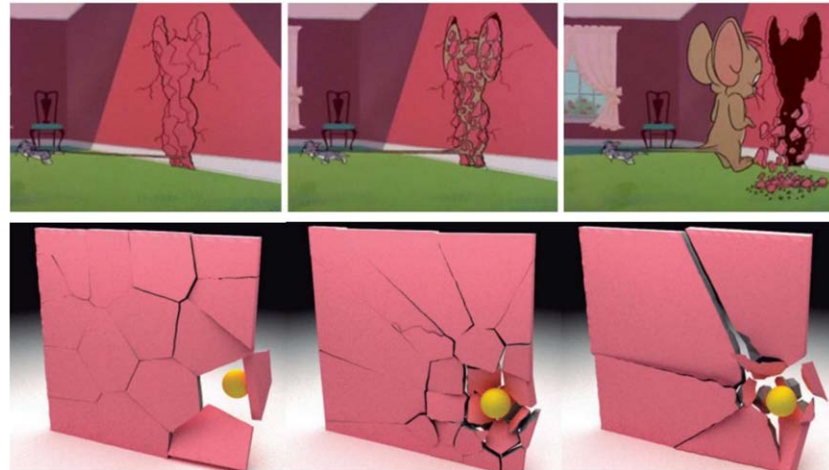


Fig. 3. In alto: fotogramma della celebre serie animata per bambini nel quale si può osservare la frantumazione di un muro secondo la regola di Voronoi [Liao, Yu 2012]. In basso: la frattura di un muro colpito da una biglia con diversi livelli di energia [Schvartzman, Otaduy 2014].

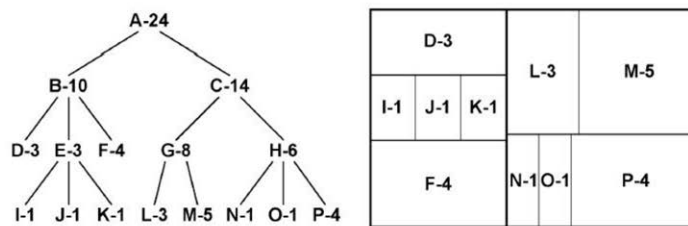


Fig. 4. In alto: schema esplicativo di una rappresentazione di dati gerarchici attraverso la tecnica del *TreeMap*, in cui i dati sono rappresentati da nodi e le relazioni di dipendenza da link che li connettono. Elaborazione dell'autore. In basso: rappresentazione attraverso un *Voronoi-TreeMap* composto da 4075 nodi organizzati in 10 livelli gerarchici, il colore più chiaro indica un livello gerarchico inferiore [Balzer, Deussen 2005, p. 55].

Voronoi ha anche trovato diverse applicazioni nello sviluppo di ambienti digitali per l'educazione all'arte e al patrimonio culturale (fig. 5). Per esempio, nel filone di ricerca sullo sviluppo delle tecnologie digitali per la modellizzazione di ambienti virtuali in cui è possibile imparare facendo esperienze individuali o di gruppo con partecipazione resa attiva dall'entusiasmo e della motivazione [Ippoliti, Casale 2018, p. 128], alcune esperienze significative basate sullo sviluppo di algoritmi generativi hanno mostrato la possibilità offerte da Voronoi, o meglio in questo caso dal suo duale ossia la triangolazione di Delaunay, di creare spazi espositivi virtuali, dinamici, multidimensionali, adattabili in tempo reale al processo di apprendimento del visitatore [Valenti, Feriozzi 2016].



Fig. 5. Elaborazione digitale di un museo virtuale [Valenti, Feriozzi 2016].

Formalizzazione geometrico-matematica della tassellazione di Voronoi

Nella sua accezione più semplice la tassellazione di Voronoi rappresenta una soluzione grafico analitica per determinare la distribuzione degli elementi nello spazio e alcune delle proprietà che li caratterizzano come ad esempio densità, velocità, altre proprietà. Concettualmente, la tassellazione si può definire come una partizione dello spazio in un determinato numero di tasselli o celle, dove il perimetro di ciascuna di queste rappresenta la porzione di spazio più "vicina" ad un punto prestabilito, indicato come nucleo del tassello, rispetto a tutti gli altri. Dal punto di vista geometrico, definita una distribuzione di nuclei nello spazio R^n , con n che rappresenta il numero di dimensioni e nella forma più semplice pari a grado 2, la costruzione della tassellazione si basa sostanzialmente sulla triangolazione dei nuclei, la determinazione delle bisettrici dei lati dei triangoli, l'estensione delle bisettrici fino alla loro

intersezione per definire quindi i bordi del tassello (fig. 6). Dal punto di vista più formale della matematica, la tassellazione di Voronoi, associata a una distribuzione di nuclei si definisce come una partizione dello spazio in celle Ω_i , dove l'*i*-esima cella contiene lo spazio più vicino al corrispondente nucleo *i* rispetto a tutti gli altri nuclei [Aurenhammer 1991]:

$$\Omega_i = \{ \vec{x} \in R^n \mid d(\vec{x}, \vec{x}_i) < d(\vec{x}, \vec{x}_j) \mid \forall i \neq j \}$$

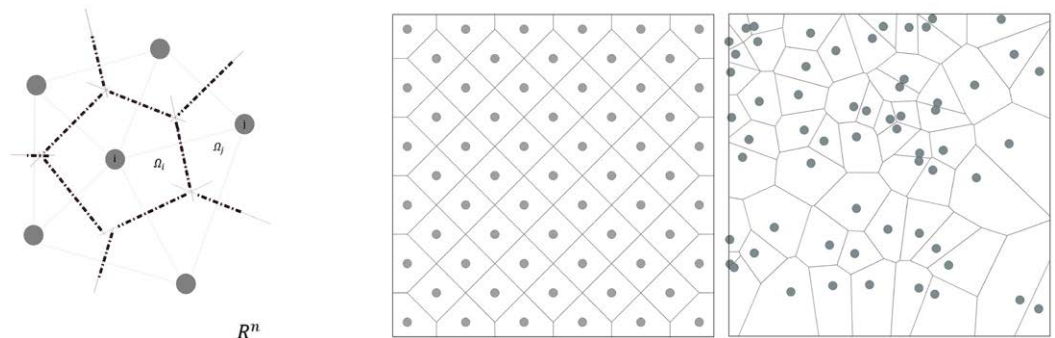
con *d* che in questo caso esprime la distanza euclidea, \vec{x}_i rappresenta il vettore tra un punto dello spazio R^n e l'*i*-esimo nucleo. L'esistenza di una tassellazione di Voronoi, rispetto ad un dato insieme di nuclei è condizionato dal verificarsi di altre tre condizioni, le prime due prevedono che tutte le celle della tassellazione siano disgiunte tra loro, la seconda che l'unione di tutte le celle riproduca lo spazio R^n iniziale:

$$\Omega_i \cap \Omega_j = \emptyset \quad \forall i \neq j$$

$$\sum_{i=1}^n \Omega_i = R^n$$

infine, la terza condizione prevede che la tassellazione sia composta da un numero finito di elementi. Sulla base dei precedenti presupposti, si può intuire facilmente e anche dimostrare che una distribuzione uniforme dei nuclei genera poligoni regolari, viceversa altre tipologie di distribuzione dei nuclei come pattern casuali o a cluster generano poligoni irregolari, ossia non equilateri e non equiangoli. Tuttavia, rispetto alla precedente considerazione, nell'approfondire la relazione tra il pattern dei nuclei e le caratteristiche geometriche dei tasselli, è possibile osservare un caso particolare generato da una distribuzione dei nuclei secondo la costante di Fibonacci (fig. 7). Infatti, generando una successione di forme rettangolari auree, e poi estraendo da ciascuna di queste il proprio centroide geometrico ossia il loro baricentro, si ottiene una distribuzione dei nuclei che non può essere definita né random ma neanche cluster; tuttavia, il processo di tassellazione generato a partire da questa distribuzione produce delle forme poligonali convesse, simili tra di loro, ma comunque non regolari. Considerando uno spazio tridimensionale R^3 , le celle di Voronoi diventano dei poliedri convessi contenenti un solo nucleo *i*-esimo; nella tassellazione si possono allora distinguere muri, spigoli e vertici. I muri di una cella sono poligoni giacenti sul piano equidistante da due nuclei, gli spigoli si ottengono dall'intersezione di due muri, infine i vertici sono dati dall'intersezione di tre spigoli (fig. 8). Utilizzando una semplice rappresentazione esplicativa composta da quattro parallelepipedi si individua per esempio un *muro* di colore rosso, che poggia sul *muro* blu, dall'intersezione di questi si ottiene il relativo spigolo, così come si definiscono gli spigoli dall'intersezione dei *muri* rosso e giallo e giallo e blu. L'intersezione di questi tre spigoli determina il *vertice*, il quale è un elemento di notevole importanza perché la loro posizione è una diretta conseguenza della distribuzione dei nuclei nello spazio tridimensionale.

Fig. 6. A sinistra: schema esplicativo della costruzione geometrica della tassellazione di Voronoi in uno spazio bi-dimensionale (n=2). Elaborazione dell'autore. A destra: risultato di una tassellazione basata a partire da nuclei disposti secondo un pattern a maglia regolare (m x m), sulla destra risultato della tassellazione sullo stesso numero di nuclei ma distribuiti secondo un pattern casuale. Elaborazione dell'autore.



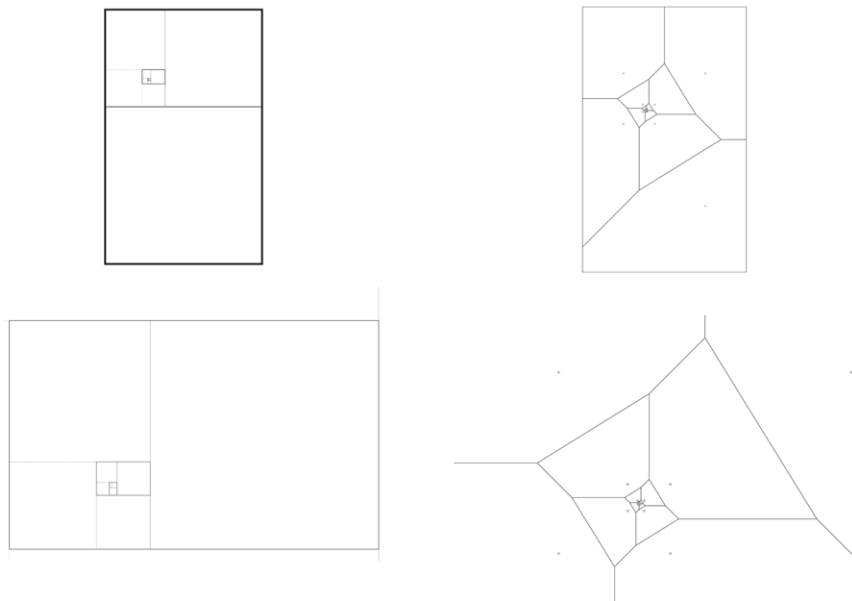


Fig. 7. In alto: a sinistra, il totale dei rettangoli aurei utilizzati in questa sperimentazione, a destra la relativa tassellatura sviluppata a partire dai nuclei calcolati come centri dei rettangoli aurei. In basso: particolare dello sviluppo aureo e della tassellatura dei primi elementi della successione di Fibonacci. Elaborazioni dell'autore.

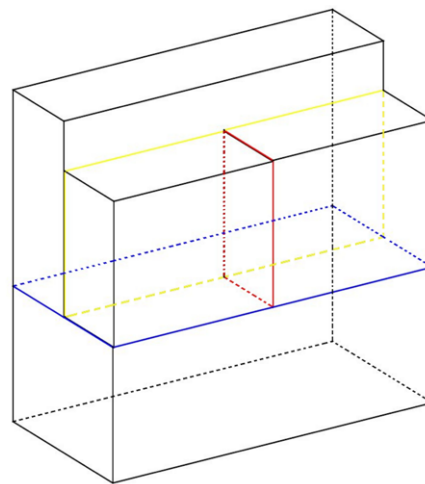


Fig. 8. Schema esplicativo di una tassellatura di Voronoi nello spazio tridimensionale ($n=3$), per agevolare l'esplicitazione della relativa tassonomia degli elementi "muro", "spigolo" e "vertice". Elaborazione dell'autore.

Metodologia e risultati

Le mesh poligonali digitali consentono di approssimare le superfici attraverso delle "facce" di forma, dimensioni e curvatura variabili ottenute attraverso l'implementazione di algoritmi generativi intesi come una sequenza algoritmica di istruzioni digitali. Questi algoritmi applicati nella modellizzazione tridimensionali sono spesso indicati in letteratura come modellizzazione algoritmica o modellizzazione generativa [Ciammaichella 2017]. La modellizzazione attraverso le mesh è stata una dei principali settori di sviluppo della computer grafica (fig. 9) a partire dall'inizio del nuovo secolo con la diffusione delle tecnologie digitali nell'industria del cinema e dell'intrattenimento come i videogiochi [Wang et al. 2024]. Ovviamente il settore dell'animazione è solo il più conosciuto per le ovvie ragioni; tuttavia, la grafica digitale ha attualmente raggiunto una diffusione pervasiva in molti altri ambiti della ricerca e pratica professionale, dai videogiochi all'architettura, dallo sviluppo manifatturiero e industriale ai settori medico-sanitari e lo studio delle strutture biologiche, fino alla rappresentazione delle dinamiche territoriali [Ciammaichella 2012]. Come documentato in precedenza la tassellatura di Voronoi ha trovato molte applicazioni in tanti settori disciplinari, basti pensare che [Okabe et al. 2009] hanno già determinato 22 campi di applicazione ed

è plausibile che la lista sia anche più ampia. Tuttavia, le attuali metodologie e gli algoritmi, mostrano ancora alcuni elementi di debolezza o aspetti poco indagati. In particolare, alcuni elementi si possono ritenere cruciali per un ulteriore sviluppo delle applicazioni, in modo particolare nel mondo delle scienze territoriali, del paesaggio e del GIS. Molte tecnologie non consentono una facile integrazione o migrazione dei risultati tra diverse piattaforme per la gestione informatizzata dell'informazione spaziale e di modellizzazione; in diverse

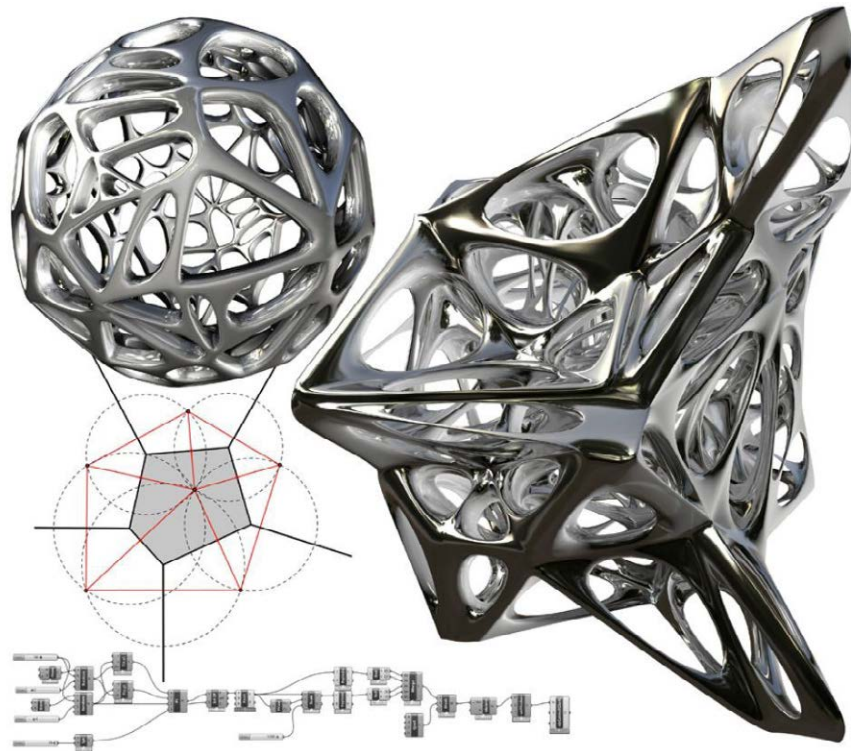


Fig. 9. Esempio di modellizzazione di "sfera" e "scheletro" di Voronoi [Ciammaichella 2012].

applicazioni la georeferenziazione dei nuclei non è il solo fattore determinante ma sarebbe opportuno determinare anche un criterio di importanza secondo cui discretizzare e modificare l'algoritmo; infine, la maggior parte degli algoritmi sviluppano la relativa tassellatura a partire da primitive geometriche di tipo puntuale, non considerando geometrie poligonali o lineari [Dong 2008]. Sulla base delle precedenti considerazioni in questa ricerca si sviluppa una metodologia di tassellatura che cerca di superare alcune delle problematiche esposte in precedenza, in particolare migliorare la capacità di migrazione dati tra diverse piattaforme e la capacità di sviluppare tassellature a partire da forme geometriche poligonali anche non regolari. Il primo obiettivo è stato raggiunto editando il codice del nuovo algoritmo in linguaggio Python che per sua natura trova ampia applicazione in molte piattaforme GIS (da QGIS ai prodotti della ESRI) e di modellizzazione avanzata come Blender, Rhino e molte altre, attraverso le relative API (*Application Programming Interface*). Il secondo obiettivo è stato raggiunto strutturando il codice in modo tale che la tassellatura sia costruita a partire dal perimetro di forme poligonali; quindi, i tasselli generati rappresenteranno le porzioni di piano più prossime al perimetro di una geometria e non più rispetto al suo centroide; allo stato attuale di sviluppo il codice lavora su un dominio *bi-dimensionale*, futuri sviluppi consentiranno di operare nelle tre dimensioni spaziali per generare i poliedri di Voronoi rispetto alle facce di elementi solidi. L'algoritmo, attualmente composto da circa 500 linee di codice, si può riassumere brevemente nel modo che segue: acquisisce le forme poligonali rispetto al quale creare la tassellatura e sulla base di queste determina l'estensione massima all'interno del quale calcolare i tasselli. L'area di massima estensione dell'analisi è determi-

nata come differenza assoluta tra le coordinate Est_{max} e Est_{min} per le ascisse, e la differenza assoluta tra le coordinate $Nord_{max}$ e $Nord_{min}$ per le ordinate delle figure acquisite nella fase precedente. Nello step successivo la superficie di analisi è discretizzata in elementi finiti di forma quadrangolare q_i regolare e di dimensioni infinitesimali in proporzione alla superficie complessiva. Per ciascuno di questi elementi q_i si calcola la distanza minima che lo separa dal bordo a lui più prossimo, ossia si determina per ciascuno q_i quale bordo e quale figura siano più vicine, in altre parole, determinare a quale regione di spazio (tassello) appartengano. Anche se esistono diverse modalità di misurare una distanza: Euclidea, Manhattan, Chessboard [Tian et al. 2015], in questa prima fase di sviluppo la distanza è da intendere esclusivamente nel suo significato euclideo, lo sviluppo futuro prevede di implementare ulteriori soluzioni di calcolo considerano altre "forme" di distanza. La somma di tutti i q_i più prossimi ad una figura permette di ottenere il tassello di Voronoi generato considerando i bordi di quella figura (fig. 10). Per lo sviluppo e le successive fasi di debug dell'algoritmo si è deciso di utilizzare come caso studio 50 geometrie poligonali, regolari e non regolari, di dimensioni differenti, e disposte nel piano secondo uno schema randomico. Queste figure hanno un'estensione complessiva di circa 30 km², mentre la relativa area di analisi che le ricopre interamente ha

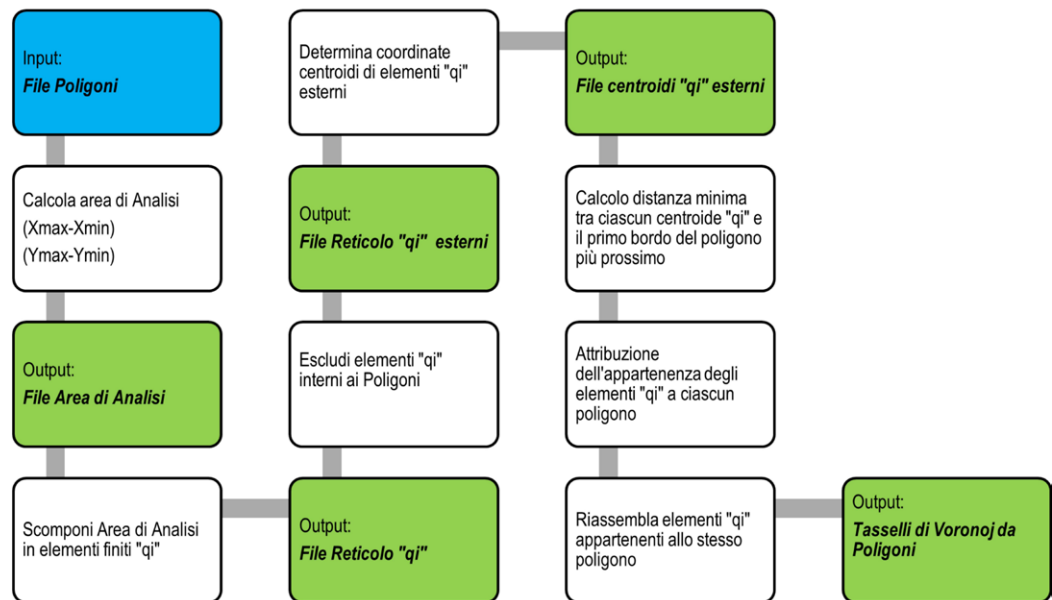


Fig. 10. Schema di funzionamento dell'algoritmo. Elaborazione dell'autore.

un'estensione poco superiore ai 100 km², come illustrato nell'immagine (fig. 11). Successivamente, come indicato in precedenza, l'area di analisi è stata discretizzata in elementi finiti di forma quadrangolare q_i regolare e di dimensioni infinitesimali in proporzione alla superficie totale. Nello specifico ciascuno di questi quadrati ha una risoluzione di 10m x 10m; quindi, la superficie di ciascuno di questi rappresenta lo 0,0001% dell'intera superficie di analisi. Complessivamente si sono ottenute 750.352 elementi q_i , escludendo ovviamente quelli che ricadevano già all'interno del perimetro dei poligoni. Facendo calcolare per ciascuno di questi la distanza minima che lo separa dal bordo di un poligono più prossimo si determina in automatico la sua "appartenenza" a quel poligono. La successiva somma e fusione di tutti i q_i più prossimi ad una figura ha permesso di ottenere la tassellatura basata sui bordi dei poligoni (fig. 11). Alle funzioni precedentemente esposte l'algoritmo implementa inoltre la possibilità di una visualizzazione dei risultati tridimensionale. Infatti, trasformando ciascun q_i in un solido regolare (un parallelepipedo) di superficie già determinata in precedenza ma di altezza pari alla distanza che lo separa dal bordo del poligono di appartenenza si ottiene un paesaggio virtuale con le linee di cresta in corrispondenza dei bordi dei tasselli ma di altezza pari alla loro distanza dal poligono (fig. 12).

Conclusioni

Il settore della computer grafica ha mostrato un rapido e significativo sviluppo a partire dal 1995 con la realizzazione del noto film d'animazione *Toy Story*, realizzato esclusivamente con tecnologie digitali per la gestione di modelli geometrici superficiali ad elevata complessità solitamente chiamati mesh poligonali. Ovviamente il settore dell'animazione è solo il più conosciuto per le ovvie ragioni; tuttavia, la grafica digitale ha attualmente raggiunto una diffusione pervasiva in molti altri ambiti della ricerca e pratica professionale, dai videogiochi all'architettura, dallo sviluppo manifatturiero e industriale ai settori medico-sanitari, fino alla rappresentazione delle dinamiche territoriali. Le mesh poligonali digitali consentono di approssimare le superfici attraverso delle "facce" di forma, dimensioni e curvatura variabili ottenute attraverso l'implementazione di algoritmi generativi intesi come una sequenza al-

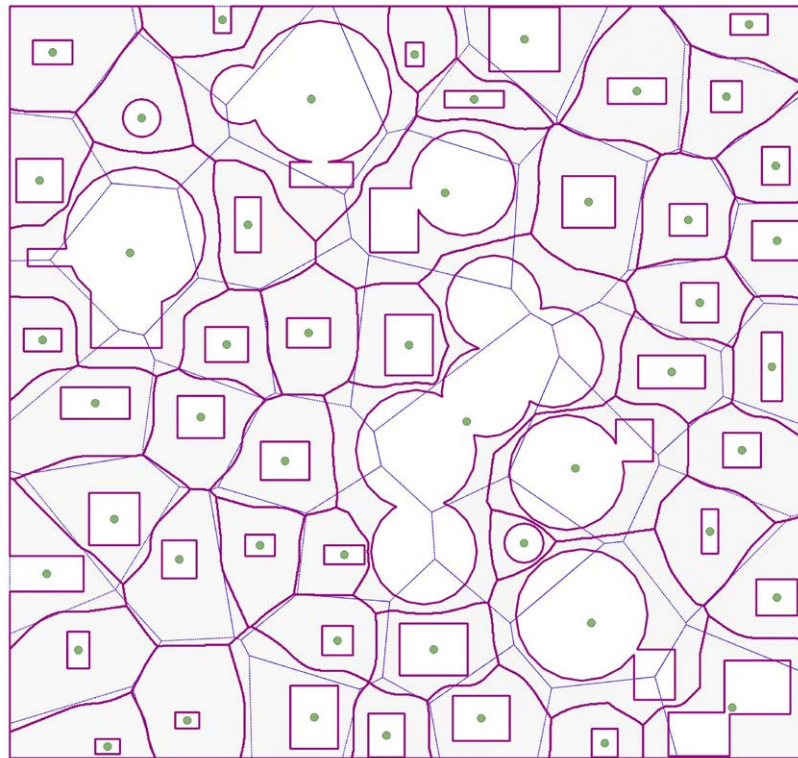


Fig. 11. Risultato dell'algoritmo a confronto: in colore blu fine tratteggiato la tassellatura "classica" basata su elementi puntuali ottenuti calcolando i centroidi dei poligoni, in colore verde; mentre in magenta spesso la tassellatura ottenuta considerando i bordi dei poligoni. Elaborazione dell'autore.

goritmica di istruzioni digitali. Questi algoritmi applicati nella modellizzazione tridimensionali sono spesso indicati in letteratura come modellizzazione algoritmica o modellizzazione generativa [Ciammaichella 2017]. Lungo questo percorso, la ricerca ha sviluppato alcune tecnologie digitali utili per il controllo parametrico dello spazio, in particolare, si è dimostrato come la tassellatura di Voronoi trova applicazioni in numerosi settori di ricerca e applicazioni e dall'infinitamente piccolo all'infinitamente grande. Le esperienze più frequenti rintracciate in letteratura si riferiscono quasi sempre a tassellature generate nel piano bi o tridimensionale a partire da una distribuzione di elementi puntuali, mentre sono decisamente più rari i casi di tassellatura sviluppata da forme lineari o poligonali anche "pesate". La ricerca colma alcuni aspetti ancora poco sviluppati, come la necessità di avere algoritmi multipiattaforma che consentano di operare in e tra ambienti di sviluppo differenti, come GIS e programmi di modellizzazione e render, per fornire soluzioni nei diversi ambiti di ricerca e sviluppo. Per questa prima criticità si è pensato di sviluppare l'algoritmo editando il suo codice in linguaggio Python, che considerata la sua diffusione e caratteristiche consente una sua applicabilità quasi universale all'interno dei programmi attraverso le rispettive *Application Program Inter-*

face (API). Inoltre, come dimostrato l'algorithmo opera a partire dai bordi di forme poligonali regolari e non regolari, consentendo di considerare nella tassellatura aspetti come l'estensione e la forma che non potrebbero essere valutati con una tassellatura classica puntuale. Esistono comunque numerosi aspetti che saranno sviluppati nella futura evoluzione della ricerca. Primo, la possibilità di generare tassellatura anche da dati di input non omogenei, cioè, costituiti da mix di primitive geometriche puntuali, lineari e poligonali. Si deve inoltre considerare la possibilità che forme anche uguali per tipologia o dimensione possiedano poi importanza differente per altri attributi. Inoltre, allo stato attuale di sviluppo, l'algorithmo lavora esclusivamente con la distanza euclidea, in futuro dovrà essere garantita la possibilità di scegliere altri "modi" di misurare una distanza: Manhattan, Chessboard e altri ancora. Infine, anche se la tassellatura presentata come caso studio ha avuto una sua forma di rappresentazione tridimensionale con i render modellizzati nella fase finale, si deve sempre considerare che l'attuale spazio di lavoro è bidimensionale, mentre molti dei problemi in cui Voronoi trova applicazione si sviluppano nelle tre dimensioni o anche in domini multidimensionali. In questa direzione lo sviluppo sarà indirizzato nella capacità di considerare la distribuzione dei nuclei o altre primitive geometriche di partenza in spazi a molteplici dimensioni.

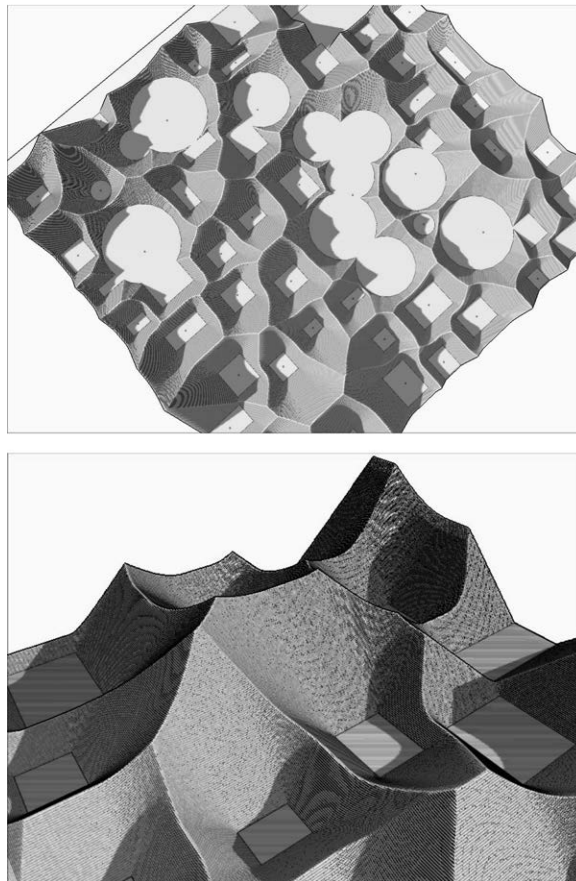


Fig. 12. In alto: risultato della trasformazione dei q piani in solidi regolari con altezza pari alla distanza che li separa dal bordo del poligono di appartenenza. Elaborazione dell'autore. In basso: particolare del paesaggio virtuale creato nell'ultima fase. Elaborazione dell'autore.

Riferimenti bibliografici

Aurenhammer F. (1991). Voronoi diagrams—a survey of a fundamental geometric data structure. In *ACM Computing Surveys (CSUR)*, vol. 23, n. 3, pp. 345-405.

Balzer M., Deussen O. (2005). Voronoi treemaps. In *INFOVIS '05. Proceedings of the Proceedings of the 2005 IEEE Symposium on Information Visualization*. Minneapolis (MN, USA), 23-25 October 2005, pp. 49-56. Piscataway: IEEE.

Ciammaichella M. (2017) Animation of Represented Bodies, Between Science and Design Practises. In *diségno*, n. 1, <<https://doi.org/10.26375/diseagno.1.2017.9>> (consultato il 19 luglio 2024).

- Ciammaichella M. (2012). Artefatti in evoluzione. La rappresentazione matematica fra design generativo e pratiche numeriche. In *DISEGNARECON*, vol. 5, n. 9. <10.6092/issn.1828-5961/3179> (consultato il 19 luglio 2024).
- Descartes R. (1644). *Principia philosophiae*, risorsa online: <https://www.google.it/books/edition/Principia_philosophiae/OPH-v7apPDawC?hl=it&gbpv=1&pg=PA114&printsec=frontcover> (consultato il 8 febbraio 2024)
- Dong P. (2008). Generating and updating multiplicatively weighted Voronoi diagrams for point, line and polygon features in GIS. In *Computers & Geosciences*, vol. 34, n. 4, pp. 411-421.
- Duyckaerts C., Godefroy G. (2000). Voronoi tessellation to study the numerical density and the spatial distribution of neurones. In *Journal of chemical neuroanatomy*, vol. 20, n. 1, pp. 83-92.
- Ippoliti E., Casale A. (2018). Rappresentare, comunicare, narrare. Spazi e musei virtuali tra riflessioni e ricerche. In A. Luigini, C. Panciroli (a cura di), *Ambienti digitali per l'educazione all'arte e al patrimonio*, pp. 128-150. Milano: FrancoAngeli.
- Deok-Soo K. et al. (2005). Euclidean Voronoi diagrams of 3D spheres and applications to protein structure analysis. In *Japan Journal of Industrial and Applied Mathematics*, n. 22, pp. 251-265.
- Klein R. (1988). Abstract Voronoi diagrams and their applications. In *Workshop on Computational Geometry*, pp. 148-157. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg.
- Liao J., Yu J. (2012). Procedural models for cartoon cracks and fractures animations. In *The Visual Computer*, n. 28, pp. 869-875.
- Murray A.T. et al. (2007). Coverage optimization to support security monitoring. In *Computers, environment and urban systems*, vol. 31, n. 2, pp. 133-147.
- Oh J.S., Choi Y.H., Park J.B., Zheng Y.F. (2004). Complete coverage navigation of cleaning robots using triangular-cell-based map. In *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, vol. 51, n. 3, pp. 718-726.
- Okabe A., Boots B., Sugihara K., Chiu S. N. (2009). *Spatial tessellations: concepts and applications of Voronoi diagrams*. Chichester: John Wiley & Sons.
- Paranjape A., Alam S. (2020). Voronoi volume function: A new probe of cosmology and galaxy evolution. In *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, vol. 495, n. 3, pp. 3233-3251.
- Poupon A. (2004). Voronoi and Voronoi-related tessellations in studies of protein structure and interaction. In *Current opinion in structural biology*, vol. 14, n. 2, pp. 233-241.
- Schwartzman S. C., Otaduy M.A. (2014). Fracture animation based on high-dimensional voronoi diagrams. In *Proceedings of the 18th Meeting of the ACM SIGGRAPH Symposium on Interactive 3D Graphics and Games*. Montreal, 15-18 May 2018. New York: Association for Computing Machinery, pp. 15-22.
- Tian S., Cui X., Gong Y. (2015). An approach to generate spatial Voronoi Treemaps for points, lines, and polygons. In *Journal of Electrical and Computer Engineering*, pp. 41-41.
- Torres M., Pelta D.A., Verdegay J. L., Torres J. C. (2016). Coverage path planning with unmanned aerial vehicles for 3D terrain reconstruction. In *Expert Systems with Applications*, 55, pp. 441-451.
- Valenti G.M., Feriozzi R. (2016). Procedure parametriche per la conformazione di musei virtuali pluridimensionali. In *DISEGNARECON*, vol. 17, n. 9, pp. 131-139. <<https://hdl.handle.net/11573/976705>> (consultato il 19 luglio 2024).
- Wang X., Zhong W. (2024). Evolution and innovations in animation: A comprehensive review and future directions. In *Concurrency and Computation: Practice and Experience*, vol. 36, n. 2, e7904.
- Wunderlich W. (2003). Voronoi Construction for Improving Numerical Calculations of Particles. In *arXiv preprint cond-mat/0305030*. <<https://doi.org/10.48550/arXiv.cond-mat/0305030>> (consultato il 19 luglio 2024).

Autore

Amedeo Ganciu, Università degli Studi di Sassari, aganciu@uniss.it

Per citare questo capitolo: Amedeo Ganciu (2024). Tassellatura di Voronoi da primitive geometriche poligonali con un algoritmo opensource e multiplatforma/ Voronoi tessellation from polygonal geometric primitives with an opensource, cross-platform algorithm. In Bergamo F., Calandriello A., Ciammaichella M., Friso I., Gay F., Liva G., Monteleone C. (a cura di), *Misura / Dismisura. Atti del 45° Convegno Internazionale dei Docenti delle Discipline della Rappresentazione / Measure / Out of Measure. Transitions. Proceedings of the 45th International Conference of Representation Disciplines Teachers*. Milano: FrancoAngeli, pp. 1425-1448.

Voronoi tessellation from polygonal geometric primitives with an open source, cross-platform algorithm

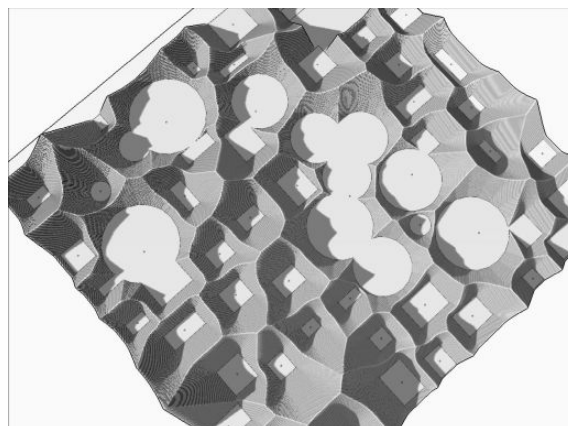
Amedeo Ganciu

Abstract

Space partitioning techniques, such as Voronoi, allow a tessellation to be determined with respect to an initial distribution of cores and have applications in so many areas of research: such as clinical area, engineering, mineralogy and astrophysics, architecture and design. In a very concise way, tessellating a space means measuring a region of belonging with respect to at least two elements. In many experiments traceable in the literature, tessellations are usually generated from point-type geometric primitives and in some cases by assigning them a criterion of weight or importance. In addition, the computer applications used for their development do not allow the migration of data and results to other platforms. In this direction, the research presents the results obtained from an algorithm developed by the Author that edited in Python language allows first of all the migration between different platforms such as GIS and Blender or others. It also allows tessellation to be developed from regular and non-regular polygonal shapes and model the result three-dimensionally, although it still operates on a two-dimensional plane. Its applications, as per the numerous cases found in the literature, may involve multiple fields of research; however, although significant developments have been made, its development must still be considered to be at an early stage.

Keywords

Space partitioning, Voronoi, Algorithms, Modeling



Model of the Voronoi tessellation from polygonal shapes. Elaboration by the author.

Introduction on tessellations and more recent applications

The third part of the treatise *Principia Philosophiae*, written by Descartes and published first in Latin in 1644 and then translated into French in 1647, described a cosmic structure based on a kind of 'vortices', whose shape and size depended on the position of the star contained within them. Through the description and representation of the 'Cartesian vortices', (fig. 1) the impossibility of the existence of empty space was argued because it conflicted with the very idea of matter; which presupposed for its very existence the necessity of its physical extension; therefore, again according to this theory, the 'vacuum' was still to be considered 'full', however, of a form of matter that was not observable or comprehensible, which Descartes called 'subtle matter' [Descartes 1644].

Although the Cartesian theory of the absence of a vacuum was refuted almost immediately by Torricelli's experiment held in the spring of 1644 in Florence, the idea of a division of space into regions of belonging or dependence nevertheless managed to take root and was refined over the following centuries. The first modern formalization of the concept of a region of belonging can be traced back to the 19th century when the German mathematician Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet, demonstrated the possibility of subdividing a two-dimensional plane with respect to a distribution of point elements by means of proximity criteria; later, the Ukrainian mathematician Georgij Feodosevič Voronoi studying quadratic forms demonstrated the possibility of extending Dirichlet's work to multidimensional space [Okabe et al. 2009, p. 6]. The space distribution postulates defined by Dirichlet and Voronoi

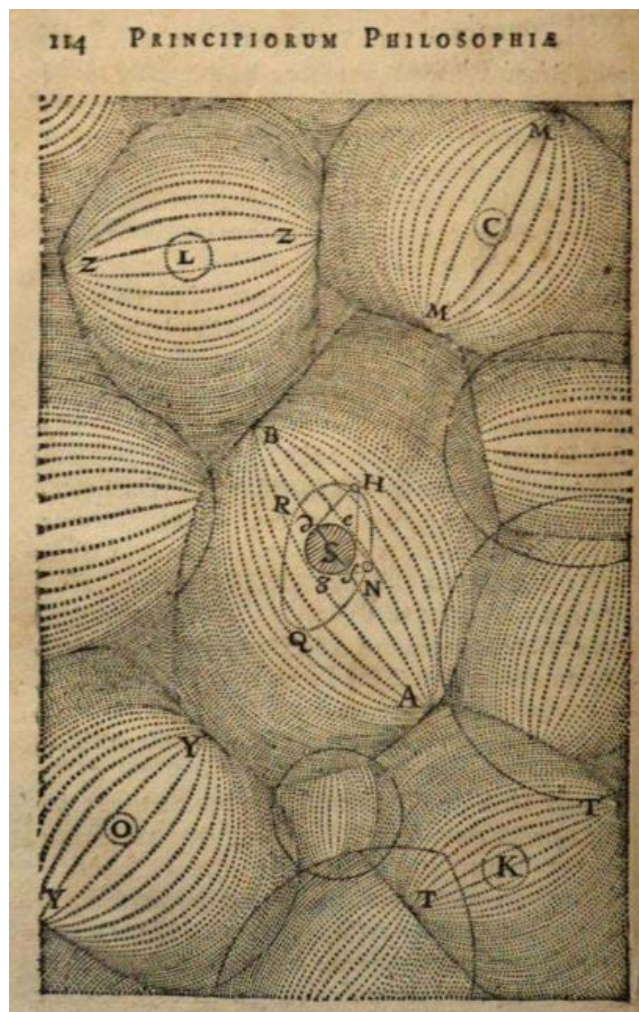


Fig. 1. Illustration made by Descartes depicting the 'vortices' underlying the structure of the universe to support his theory regarding the absence of vacuum [Descartes 1644, part III, p. 114].

currently find applications in many disciplinary fields: from medical sciences to geological sciences, from applications in three-dimensional animation processes to architecture and cultural heritage communication. For example, in neurology [Duyckaerts, Godefroy 2000] use Voronoy to study the distribution and typology of neuronal clusters and neurofibrillary tangles in the human brain, calculating the 'number density' of a cell as the volume of the convex polyhedron containing it, i.e., the region of brain space closer to a cell than to any other. Also in the field of biology, first Poupon [Poupon 2004] and then Kim [Kim et al. 2005], uses Voronoy polyhedra to model the three-dimensional structure of proteins to answer certain questions such as the volume of atoms, interactions and biochemical bonds. Remaining on the infinitesimal plane [Wunderlich 2003] uses Voronoy to determine the difference in the arrangement of atoms in amorphous or liquid materials compared to the regular arrangement in crystalline structures allowing to simulate molecular dynamics in real and reciprocal particle space. Moving to a level observable to the naked eye, Voronoy has several applications in engineering and manufacturing: from robotics applied to domestic cleaning [Oh et al. 2004], to environmental monitoring and security of urban areas [Murray et al. 2007], to the control of drones for reconnaissance and subsequent modeling of three-dimensional territory [Torres et al. 2016].

Finally, considering the infinitely large [Paranjape, Alam 2020] using Voronoy to calculate the volume of star clusters to support the latest cosmological theories of galaxy evolution (fig. 2). Moving from the real to the metaphysical plane, Voronoy has found wide application in the field of children's animation (fig. 3); for example, scenes in which animated characters such as *Tom and Jerry* during their adventures are responsible for numerous building disas-

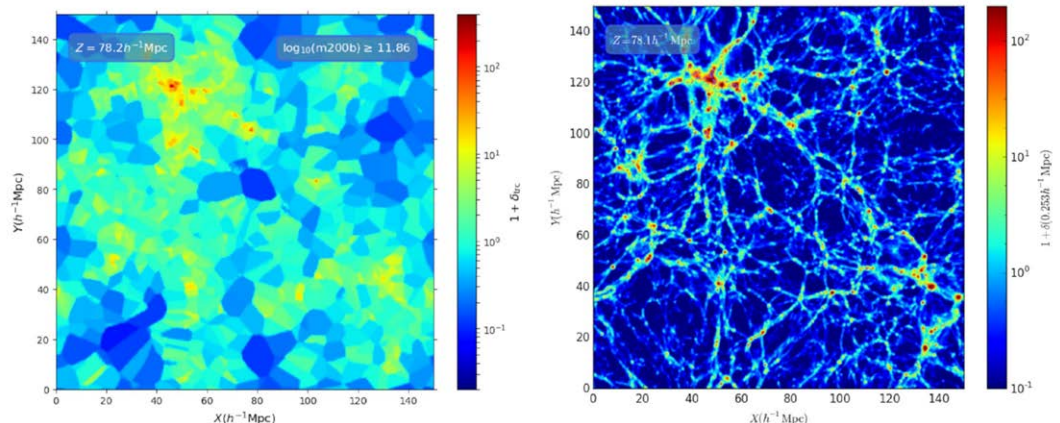
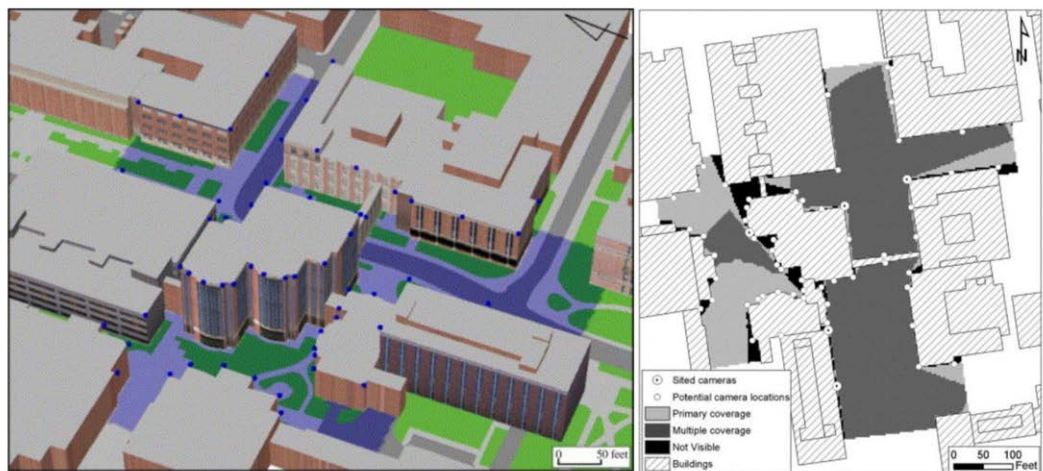


Fig. 2. Top: application of Voronoi for video surveillance optimization at the Ohio State University Campus. Image taken [Murray et al., 2007, p. 141]. Bottom: visualization of cosmic mass distribution through Voronoi [Paranjape, Alam 2020 p. 3237].

ters are famous; in this case Voronoi is the basis for modeling the fracture of walls, doors, tables, etc. Voronoi also finds application in hierarchical data visualization (fig. 4), in association with 'tree maps' or 'TreeMaps', effectively supporting the information user in perceiving hierarchies between elements [Balzer; Deussen 2005].

Voronoi has also found several applications in the development of digital environments for art and heritage education (fig. 5). For example, in the strand of research on the develop-

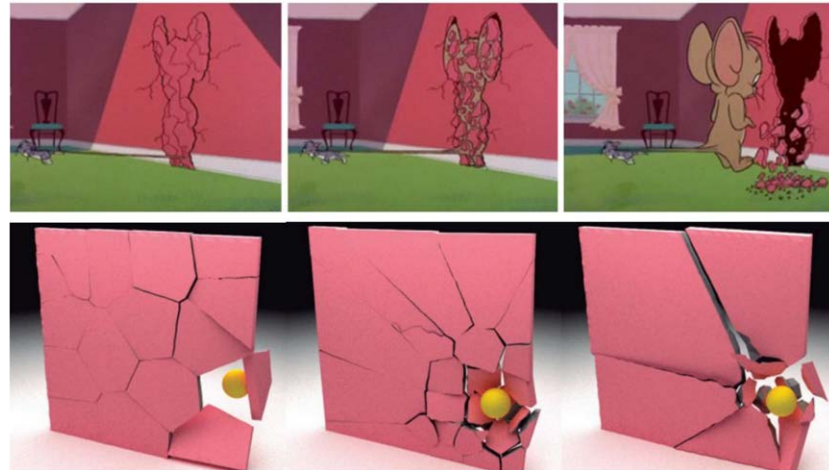


Fig. 3. Top: a frame of the famous children's animated series in which the shattering of a wall according to Voronoi's rule can be observed [Liao, Yu 2012]. Bottom: the fracture of a wall hit by a marble with different energy levels is always illustrated [Schvartzman, Otaduy 2014].

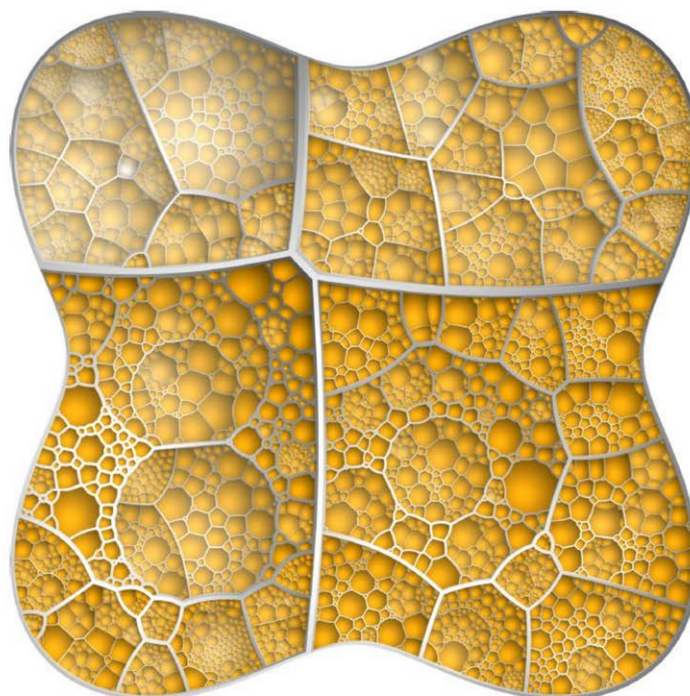
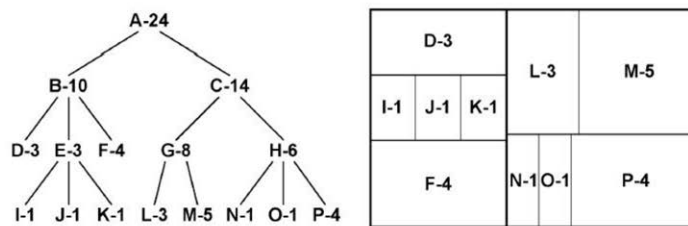


Fig. 4. Top: explanatory diagram of a hierarchical data representation through the *TreeMap* technique, in which data are represented by nodes and dependency relationships by links connecting them. Elaboration by the author. Bottom: representation through a *Voronoi-Tree-Map* consisting of 4075 nodes organized in 10 hierarchical levels, the lighter color indicates a lower hierarchical level [Balzer; Deussen 2005 p. 55].

ment of digital technologies for modeling virtual environments in which it is possible to learn by doing individual or group experiences with participation made active by enthusiasm and motivation [Ippoliti, Casale 2018, p. 128], some significant experiences based on the development of generative algorithms have shown the possibility offered by Voronoi, or rather in this case by its dual i.e., Delaunay's triangulation, to create virtual, dynamic, multidimensional exhibition spaces that can be adapted in real time to the visitor's learning process [Valenti, Feriozzi 2016].



Fig. 5. Digital processing of a virtual museum [Valenti, Feriozzi 2016].

Geometric-mathematical formalization of Voronoi's tessellation

In its simplest sense, Voronoi tessellation represents an analytical graphical solution to determine the distribution of elements in space and some of their properties such as density, velocity, other properties. Conceptually, tessellation can be defined as a partition of space into a given number of tessellations or cells, where the perimeter of each of these represents the portion of space that is 'closest' to a predetermined point, referred to as the core of the tessellation, relative to all others. From the geometrical point of view, having defined a distribution of cores in the space R^n , with n representing the number of dimensions and in the simplest form equal to degree 2, the construction of the tessellation is basically based on triangulating the cores, determining the bisectors of the sides of the triangles, extending the bisectors to their intersection to then define the edges of the tessellation (fig. 6). From the more formal point of view of mathematics, Voronoi tessellation, associated with a distribution of cores is defined as a partition of space into cells " Ω_i ", where the i -th cell contains

the closest space to the corresponding i core compared to all other cores [Aurenhammer 1991]:

$$\Omega_{i=} = \{ \vec{x} \in R^n \mid d(\vec{x}, \vec{x}_i) < d(\vec{x}, \vec{x}_j) \mid \forall i \neq j \}$$

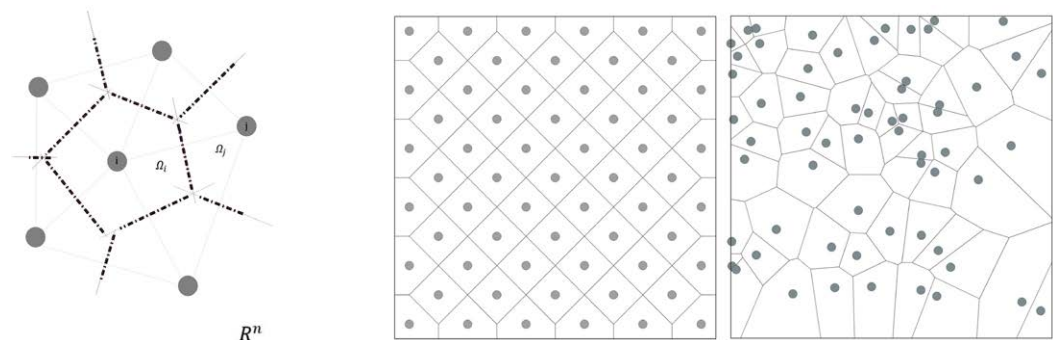
with d expressing in this case the Euclidean distance, \vec{x}_i representing the vector between a point in the space R^n and the i -th nucleus. The existence of a Voronoi tessellation, with respect to a given set of nuclei is conditional on the occurrence of three other conditions, the first two requiring that all cells in the tessellation be disjoint from each other, the second that the union of all cells reproduce the initial R^n space:

$$\Omega_i \cap \Omega_j = \emptyset \quad \forall i \neq j$$

$$\sum_{i=1}^n \Omega_i = R^n$$

Finally, the third condition is that the tessellation consists of a finite number of elements. Based on the previous assumptions, it can be easily guessed and even demonstrated that a uniform distribution of cores generates regular polygons, conversely other types of core distribution such as random or clustered patterns generate irregular polygons, i.e., nonequilateral and nonequiangular. However, with respect to the previous consideration, in further investigating the relationship between the pattern of cores and the geometric characteristics of the tiles, a special case generated by a distribution of cores according to the Fibonacci constant can be observed (fig. 7). In fact, by generating a succession of rectangular golden shapes, and then extracting from each of them its geometric centroid i.e., their barycenter, one obtains a distribution of cores that can neither be called random nor clustered; however, the process of tessellation generated from this distribution produces convex polygonal shapes, similar to each other, but still not regular. Considering a three-dimensional space R^3 , Voronoi cells become convex polyhedra containing a single i -th nucleus; in tessellation one can then distinguish walls, edges and vertices. The walls of a cell are polygons lying on the plane equidistant from two cores, the edges are obtained from the intersection of two walls, and finally the vertices are given by the intersection of three edges (fig. 8). Using a simple explanatory representation consisting of four parallelepipeds, for example, one identifies a wall of red color, which rests on the blue wall, from the intersection of these one obtains the relative edge, just as one defines the edges from the intersection of the red and yellow and yellow and blue walls. The intersection of these three edges determines the vertex, which is an element of considerable importance because their position is a direct consequence of the distribution of cores in three-dimensional space.

Fig. 6. Left: explanatory diagram of the geometric construction of Voronoi tessellation in a two-dimensional space ($n=2$). Elaboration by the author. Right: result of tessellation based from cores arranged according to a regular mesh pattern ($m \times m$), on the right result of tessellation on the same number of cores but distributed according to a random pattern. Elaboration by the author.



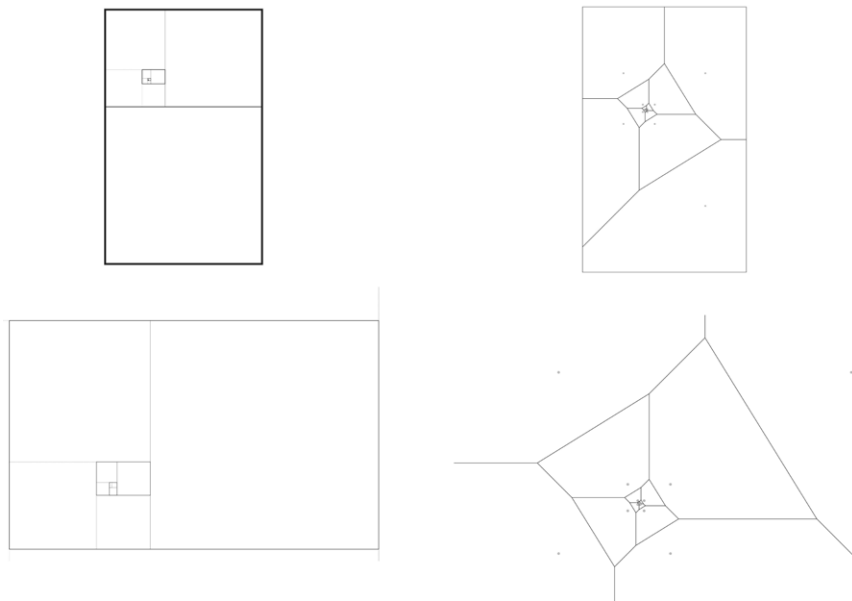


Fig. 7. Top: on the left the total number of golden rectangles used in this experimentation, and on the right the relative tessellation developed from the cores calculated as centroids of the golden rectangles. Bottom: detail of the golden development and tessellation of the first elements of the Fibonacci succession. Elaboration by the author.

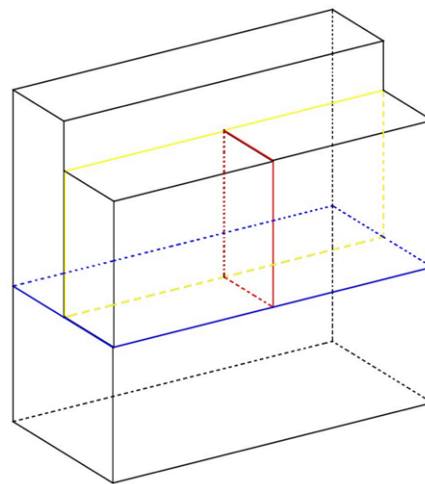


Fig. 8. Explanatory diagram of a Voronoi tessellation in three-dimensional space ($n=3$), to facilitate the explication of the relative taxonomy of the elements 'wall', 'corner', and 'vertex'. Elaboration by the author.

Methodology and results

Digital polygonal meshes allow surfaces to be approximated by 'faces' of varying shape, size and curvature obtained through the implementation of Generative Algorithms understood as an algorithmic sequence of digital instructions. These algorithms applied in three-dimensional modeling are often referred to in the literature as algorithmic modeling or generative modeling [Ciammaichella 2017]. Modeling through meshes has been a major area of development in computer graphics (fig. 9) since the beginning of the new century with the spread of digital technologies in the film and entertainment industry such as video games [Wang, Zhong 2024].

Obviously, the field of animation is only the best known for the obvious reasons; however, digital graphics has currently achieved pervasive deployment in many other areas of research and professional practice, from video games to architecture, from manufacturing and industrial development to the medical and health sectors and the study of biological structures, to the representation of spatial dynamics [Ciammaichella 2012]. As documented earlier Voronoi tessellation has found many applications in so many disciplinary fields, suffice it to say that [Okabe et al. 2009] have already determined 22 fields of application and it

is plausible that the list is even wider. However, current methodologies and algorithms, still show some weaknesses or under-investigated aspects. In particular, some elements can be considered crucial for further development of applications, especially in the world of spatial sciences, landscape and GIS. Many technologies do not allow for easy integration or migration of results between different platforms for computerized spatial information management and modeling; in several applications, georeferencing of cores is not the only

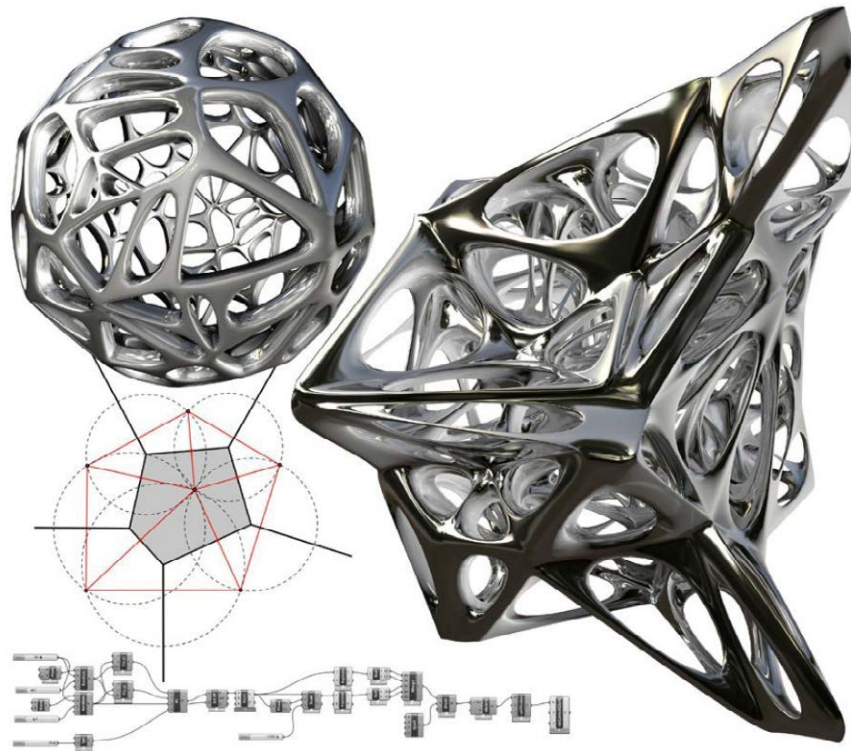


Fig. 9. Modeling example of Voronoi 'sphere' and 'skeleton' [Ciammaichella, 2012].

determining factor but it would also be appropriate to determine an importance criterion according to which to discretize and modify the algorithm; finally, most algorithms develop the relevant tessellation from point-type geometric primitives, not considering polygonal or linear geometries [Dong 2008].

Based on the previous considerations in this research, a tessellation methodology is developed that seeks to overcome some of the problems outlined above, in particular improving the ability to migrate data between different platforms and the ability to develop tessellation from even non-regular polygonal geometric shapes.

The first objective was achieved by editing the code of the new algorithm in the Python language, which by its nature finds wide application in many GIS (from QGIS to ESRI products) and advanced modeling platforms such as Blender, Rhino, and many others, through their APIs (Application Programming Interfaces). The second objective was achieved by structuring the code so that tessellation is built from the perimeter of polygonal shapes; thus, the generated tessellations will represent the portions of the plane closest to the perimeter of a geometry and no longer with respect to its centroid; at the current state of development the code works on a two-dimensional domain, future developments will allow it to operate in three spatial dimensions to generate Voronoi polyhedra with respect to the faces of solid elements.

The algorithm, currently consisting of about 500 lines of code, can be briefly summarized as follows: it acquires polygonal shapes with respect to which to create tessellation and based on these determines the maximum extent within which to compute tessellations. The area

of maximum extension of the analysis is determined as the absolute difference between the coordinates Est_{max} and Est_{min} for the abscissas, and the absolute difference between the coordinates $Nord_{max}$ and $Nord_{min}$ for the ordinates of the figures acquired in the previous step. In the next step, the analysis surface is discretized into finite elements of regular square q_i shape and infinitesimal size in proportion to the total surface area. For each of these q_i elements, the minimum distance separating it from the edge closest to it is calculated, i.e., it is determined for each q_i which edge and which figure are closest, in other words, determine to which region of space (tessellation) they belong.

Although there are different ways of measuring a distance: Euclidean, Manhattan, Chessboard [Tian et al. 2015], at this early stage of development distance is to be understood exclusively in its Euclidean meaning, future development plans to implement further computational solutions consider other 'forms' of distance. The sum of all the q_i closest to a figure yields the Voronoi tessellation generated considering the edges of that figure (fig. 10). For the development and subsequent debugging stages of the algorithm, it was decided to use as a case study 50 polygonal geometries, regular and non-regular, of different sizes, and arranged in the plane according to a random pattern. These figures have a total area of about

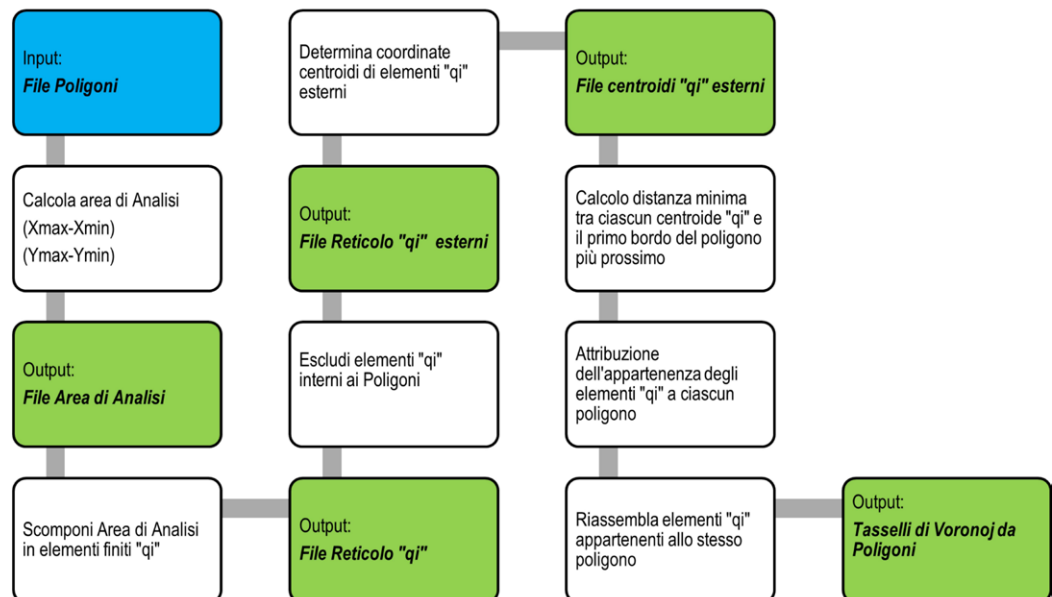


Fig. 10. Schematic operation of the algorithm. Elaboration by the author.

30 km², while the corresponding analysis area covering them entirely has an area of slightly more than 100 km², as shown in figure 11, below. Next, as indicated above, the analysis area was discretized into finite elements of regular q_i square shape and infinitesimal size in proportion to the total area. Specifically, each of these squares has a resolution of 10m x 10m; thus, the area of each of these represents 0.0001% of the entire analysis surface area. A total of 750.352 q_i elements were obtained, obviously excluding those that already fell within the perimeter of the polygons.

By having the minimum distance separating it from the edge of a nearest polygon calculated for each of these, its 'membership' in that polygon is automatically determined. Subsequent summation and merging of all the q_i closest to a figure enabled tessellation based on the edges of polygons (fig. 11). To the previously exposed functions, the algorithm also implements the possibility of a three-dimensional visualization of the results. In fact, by transforming each q_i into a regular solid (a parallelepiped) of previously determined surface area but of height equal to the distance separating it from the edge of the polygon to which it belongs, a virtual landscape is obtained with the ridge lines at the edges of the tessellations but of height equal to their distance from the polygon (fig. 12).

Conclusion

The field of computer graphics has shown rapid and significant development since 1995 with the making of the well-known animated film *Toy Story*, which was made exclusively with digital technologies for handling highly complex surface geometric models usually called polygon meshes. Of course, the animation sector is only the best known for the obvious reasons; however, digital graphics has currently achieved pervasive deployment in many other areas of research and professional practice, from video games to architecture, from manufacturing and industrial development to medical/health sectors, and even the representation of spatial dynamics. Digital polygon meshes allow surfaces to be approximated by 'faces' of varying shape, size and curvature obtained through the implementation of Generative Algorithms understood as an algorithmic sequence of digital instructions. These algorithms

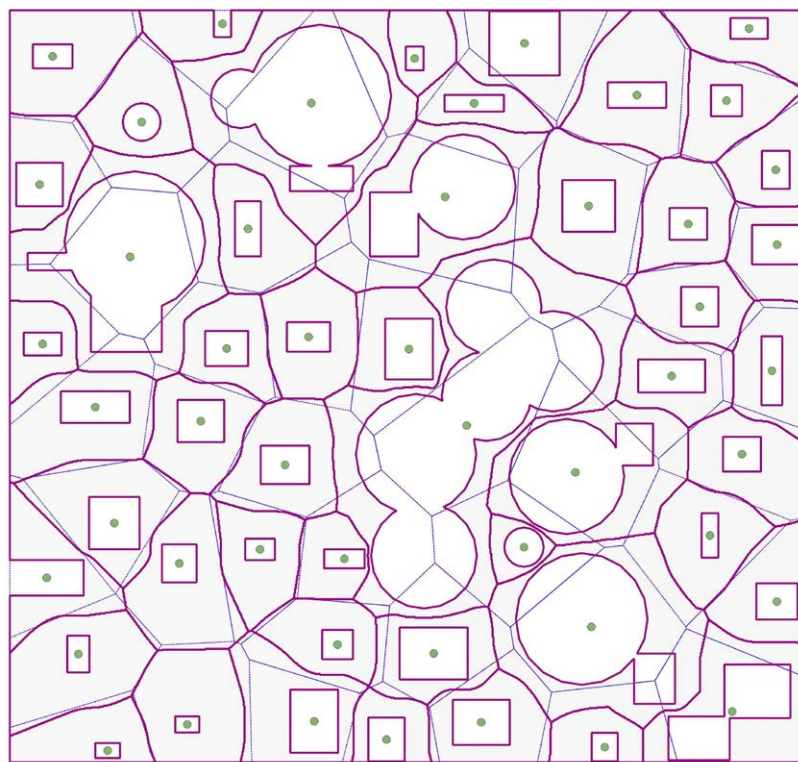


Fig. 11. Algorithm result compared: in fine blue dashed color the 'classical' tessellation based on point elements obtained by computing the centroids of polygons, in green color; while in thick magenta the tessellation obtained by considering the edges of polygons. Elaboration by the author.

applied in three-dimensional modeling are often referred to in the literature as algorithmic modeling or generative modeling [Ciammaichella 2017]. Along this path, research has developed some useful digital technologies for parametric control of space; in particular, it has been shown how Voronoi tessellation finds applications in numerous research areas and applications and from the infinitely small to the infinitely large. The most frequent experiments traced in the literature almost always refer to tessellations generated in the two- or three-dimensional plane from a distribution of point elements, while cases of tessellation developed from linear or polygonal shapes, even 'weighted' ones, are decidedly rarer. The research fills some still underdeveloped aspects, such as the need to have cross-platform algorithms that allow operating in and between different development environments, such as GIS and modeling and rendering programs, to provide solutions in different research and development areas. For this first critical issue, it was planned to develop the algorithm by editing its code in Python language, which given its widespread use and features allows its almost universal applicability within programs through their respective Application Program Interfaces (APIs). Furthermore, as demonstrated, the algorithm operates from the edges

of regular and nonregular polygonal shapes, allowing aspects such as extent and shape that could not be evaluated with classical point tessellation to be considered in tessellation. However, there are several aspects that will be developed in the future evolution of research. First, the possibility of generating tessellation even from inhomogeneous input data, i.e., consisting of mixes of point, linear and polygonal geometric primitives. One must also consider the possibility that shapes even equal in type or size then possess different importance for other attributes. In addition, in the current state of development, the algorithm works exclusively with Euclidean distance; in the future, the possibility of choosing other 'ways' of measuring a distance must be ensured: Manhattan, Chessboard and others. Finally, although the tessellation presented as a case study had its own form of three-dimensional representation with the renderings modeled in the final stage, one must always consider that the current workspace is two-dimensional, while many of the problems in which Voronoi finds application are developed in three dimensions or even in multidimensional domains. In this direction, development will be directed in the ability to consider the distribution of cores or other starting geometric primitives in multidimensional spaces.

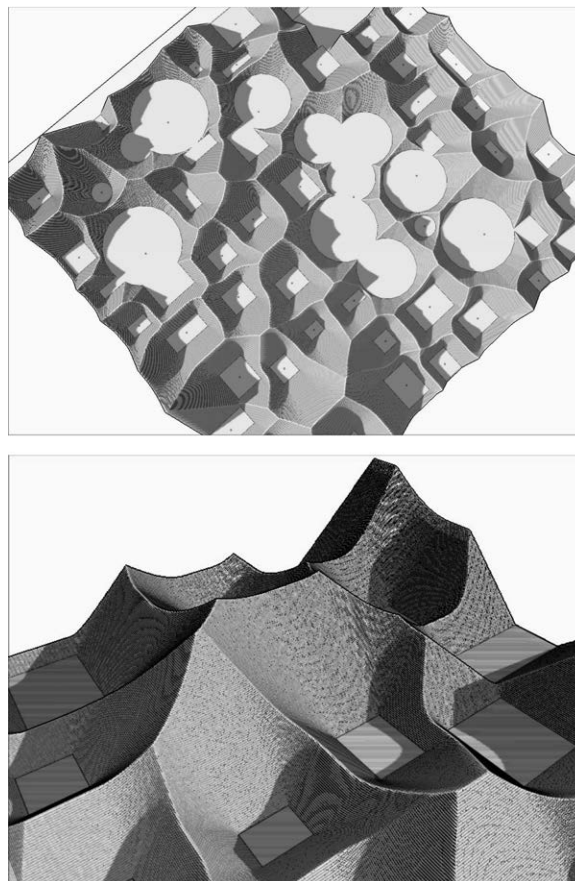


Fig. 12. Top: result of transforming flat q into regular solids with height equal to the distance separating them from the edge of the polygon they belong to. Elaboration by the author. Bottom: detail of the virtual landscape created in the last stage. Elaboration by the author.

References

- Aurenhammer F. (1991). Voronoi diagrams—a survey of a fundamental geometric data structure. In *ACM Computing Surveys (CSUR)*, vol. 23, n. 3, pp. 345-405.
- Balzer M., Deussen O. (2005). Voronoi treemaps. In *INFOVIS '05. Proceedings of the Proceedings of the 2005 IEEE Symposium on Information Visualization*. Minneapolis (MN, USA), 23-25 October 2005, pp. 49-56. Piscataway: IEEE.
- Ciammaichella M. (2017) Animation of Represented Bodies, Between Science and Design Practises. In *disegno*, n. 1, <<https://doi.org/10.26375/diseño.1.2017.9>> (accessed 19 July 2024).

- Ciammaichella M. (2012). Artefatti in evoluzione. La rappresentazione matematica fra design generativo e pratiche numeriche. In *DISEGNARECON*, vol. 5, n. 9. <10.6092/issn.1828-5961/3179> (accessed 19 July 2024).
- Descartes R. (1644). *Principia philosophiae*, risorsa online: <https://www.google.it/books/edition/Principia_philosophiae/OPH-v7apPDawC?hl=it&gbpv=1&pg=PA114&printsec=frontcover> (accessed 19 July 2024).
- Dong P. (2008). Generating and updating multiplicatively weighted Voronoi diagrams for point, line and polygon features in GIS. In *Computers & Geosciences*, vol. 34, n. 4, pp. 411-421.
- Duyckaerts C., Godefroy G. (2000). Voronoi tessellation to study the numerical density and the spatial distribution of neurones. In *Journal of chemical neuroanatomy*, vol. 20, n. 1, pp. 83-92.
- Ippoliti E., Casale A. (2018). Rappresentare, comunicare, narrare. Spazi e musei virtuali tra riflessioni e ricerche. In A. Luigini, C. Panciroli (a cura di), *Ambienti digitali per l'educazione all'arte e al patrimonio*, pp. 128-150. Milano: FrancoAngeli.
- Deok-Soo K. et al. (2005). Euclidean Voronoi diagrams of 3D spheres and applications to protein structure analysis. In *Japan Journal of Industrial and Applied Mathematics*, n. 22, pp. 251-265.
- Klein R. (1988). Abstract Voronoi diagrams and their applications. In *Workshop on Computational Geometry*, pp. 148-157. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg.
- Liao J., Yu J. (2012). Procedural models for cartoon cracks and fractures animations. In *The Visual Computer*, n. 28, pp. 869-875.
- Murray A.T. et al. (2007). Coverage optimization to support security monitoring. In *Computers, environment and urban systems*, vol. 31, n. 2, pp. 133-147.
- Oh J.S., Choi Y.H., Park J.B., Zheng Y.F. (2004). Complete coverage navigation of cleaning robots using triangular-cell-based map. In *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, vol. 51, n. 3, pp. 718-726.
- Okabe A., Boots B., Sugihara K., Chiu S. N. (2009). *Spatial tessellations: concepts and applications of Voronoi diagrams*. Chichester: John Wiley & Sons.
- Paranjape A., Alam S. (2020). Voronoi volume function: A new probe of cosmology and galaxy evolution. In *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, vol. 495, n. 3, pp. 3233-3251.
- Poupon A. (2004). Voronoi and Voronoi-related tessellations in studies of protein structure and interaction. In *Current opinion in structural biology*, vol. 14, n. 2, pp. 233-241.
- Schwartzman S. C., Otaduy M.A. (2014). Fracture animation based on high-dimensional voronoi diagrams. In *Proceedings of the 18th Meeting of the ACM SIGGRAPH Symposium on Interactive 3D Graphics and Games*, Montreal, 15-18 May 2018. New York: Association for Computing Machinery, pp. 15-22.
- Tian S., Cui X., Gong Y. (2015). An approach to generate spatial Voronoi Treemaps for points, lines, and polygons. In *Journal of Electrical and Computer Engineering*, pp. 41-41.
- Torres M., Pelta D.A., Verdegay J. L., Torres J. C. (2016). Coverage path planning with unmanned aerial vehicles for 3D terrain reconstruction. In *Expert Systems with Applications*, 55, pp. 441-451.
- Valenti G.M., Feriozzi R. (2016). Procedure parametriche per la conformazione di musei virtuali pluridimensionali. In *DISEGNARECON*, vol. 17, n. 9, pp. 131-139. <<https://hdl.handle.net/11573/976705>> (accessed 19 July 2024).
- Wang X., Zhong W. (2024). Evolution and innovations in animation: A comprehensive review and future directions. In *Concurrency and Computation: Practice and Experience*, vol. 36, n. 2, e7904.
- Wunderlich W. (2003). Voronoi Construction for Improving Numerical Calculations of Particles. In *arXiv preprint cond-mat/0305030*. <<https://doi.org/10.48550/arXiv.cond-mat/0305030>> (accessed 19 July 2024).

Authors

Amedeo Ganciu, University of Sassari, aganciu@uniss.it

To cite this chapter: Amedeo Ganciu (2024). Tassellatura di Voronoi da primitive geometriche poligonali con un algoritmo opensource e multiplatforma/ Voronoi tessellation from polygonal geometric primitives with an opensource, cross-platform algorithm. In Bergamo F., Calandriello A., Ciammaichella M., Friso I., Gay F., Liva G., Monteleone C. (Eds.). *Misura / Dismisura. Atti del 45° Convegno Internazionale dei Docenti delle Discipline della Rappresentazione/Measure / Out of Measure. Transitions. Proceedings of the 45th International Conference of Representation Disciplines Teachers*. Milano: FrancoAngeli, pp. 1425-1448.