

Mara Capone

Dal piano alla superficie

Strumenti e metodi per costruire forme complesse

FORME DEL DISEGNO

FrancoAngeli 

FORME DEL DISEGNO

Collana diretta da Elena Ippoliti, Michela Rossi, Edoardo Dotto

La collana FORME DEL DISEGNO si propone come occasione per la condivisione di riflessioni sul disegno quale linguaggio antropologicamente naturale, al tempo stesso culturale e universale, e che indica contemporaneamente la concezione e l'esecuzione dei suoi oggetti.

In particolare raccoglie opere e saggi sul disegno e sulla rappresentazione nell'ambito dell'architettura, dell'ingegneria e del design in un'ottica sia di approfondimento sia di divulgazione scientifica.

La collana si articola in tre sezioni: PUNTO, che raccoglie contributi più prettamente teorici su tematiche puntuali, LINEA, che ospita contributi tesi alla sistematizzazione delle conoscenze intorno ad argomenti specifici, SUPERFICIE, che presenta pratiche ed attività sperimentali su casi studio o argomenti peculiari.

Comitato editoriale - indirizzo scientifico

Carlo Bianchini, Pedro Manuel Cabezas Bernal, Andrea Casale, Alessandra Cirafici, Paolo Clini, Edoardo Dotto, Pablo Lorenzo Eiroa, Fabrizio Gay, Elena Ippoliti, Leonardo Paris, Sandro Parrinello, Fabio Quici, Michela Rossi, Andrew Saunders, Graziano Mario Valenti

Comitato editoriale - coordinamento

Andrea Casale, Elena Ippoliti, Leonardo Paris, Fabio Quici, Graziano Mario Valenti

Progetto grafico

Andrea Casale



Il presente volume è pubblicato in open access, ossia il file dell'intero lavoro è liberamente scaricabile dalla piattaforma **FrancoAngeli Open Access** (<http://bit.ly/francoangeli-oa>).

FrancoAngeli Open Access è la piattaforma per pubblicare articoli e monografie, rispettando gli standard etici e qualitativi e la messa a disposizione dei contenuti ad accesso aperto. Oltre a garantire il deposito nei maggiori archivi e repository internazionali OA, la sua integrazione con tutto il ricco catalogo di riviste e collane FrancoAngeli massimizza la visibilità, favorisce facilità di ricerca per l'utente e possibilità di impatto per l'autore.

Per saperne di più: [Pubblica con noi](#)

I lettori che desiderano informarsi sui libri e le riviste da noi pubblicati possono consultare il nostro sito Internet: www.francoangeli.it e iscriversi nella home page al servizio "[Informatemi](#)" per ricevere via e-mail le segnalazioni delle novità.

Mara Capone

Dal piano alla superficie

Strumenti e metodi per costruire forme complesse

FORME DEL DISEGNO

Sezione

PUNTO

FrancoAngeli 

Le immagini presenti nel testo sono state elaborate dall'autore, salvo diversa indicazione. L'autore e l'editore ringraziano i proprietari delle immagini riprodotte nel presente volume per la concessione dei diritti di riproduzione. Si scusano per eventuali omissioni o errori e si dichiarano a disposizione degli aventi diritto laddove non sia stato possibile rintracciarli.



Universidade Federal da Paraíba
UFPB (Brasile)

Ringraziamenti:

A Graziano Mario Valenti e a Leonardo Paris per le osservazioni puntuali contenute nelle prefazioni che hanno dedicato a questo testo.

Hanno contribuito alla realizzazione di questo saggio:

Carlos Alejandro Nome, Natália de Queiroz Nome (UFPB - Brasile), Gianluca Barile e Angela Cicala per l'elaborazione degli algoritmi del capitolo "Applicazioni" tangenziali: elicoide.

In copertina: Pattern Y per la costruzione di superfici a doppia curvatura.

Isbn
9788835166993

Copyright © 2024 by FrancoAngeli s.r.l., Milano, Italy.

Pubblicato con licenza Creative Commons Attribuzione-Non Commerciale-Non opere derivate
4.0 Internazionale (CC-BY-NC-ND 4.0)

L'opera, comprese tutte le sue parti, è tutelata dalla legge sul diritto d'autore. L'Utente nel momento in cui effettua il download dell'opera accetta tutte le condizioni della licenza d'uso dell'opera previste e comunicate sul sito

<https://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/deed.it>

Indice

Prefazione di Graziano Mario Valenti	9
Prefazione di Leonardo Paris	13
	17
Introduzione	23
1. Il controllo delle superfici	23
Principi_Metodi_Strumenti	26
Superfici	30
Superfici di rivoluzione	35
Superfici di traslazione	38
Superfici elicoidali	41
Superfici rigate	44
Superfici interpolate	47
2. La classificazione differenziale delle superfici	49
Curvatura gaussiana	53
Curvatura gaussiana costante	54
Curvatura media nulla: superfici minime	

3. Le superfici sviluppabili	59
Costruzione e controllo delle tangenziali	63
Generazione dello spigolo di regresso	66
Curve luogo geometrico	66
Linee su superfici	68
Intersezioni	72
Linee grafiche	77
4. Sviluppo e “spianamento” approssimato delle superfici	81
Superfici sviluppabili	81
Sviluppata di una tangenziale generica	83
Metodo 1	84
Metodo 2	86
Casi notevoli: l’elicoide sviluppabile	90
Generazione dell’elicoide_metodo analitico	91
Sviluppata di un elicoide tangenziale	95
Involuta_Metodo descrittivo	97
Involuta_Metodo matematico	99
Dalla sviluppata alla superficie	102
Superfici non sviluppabili	104
Strisce sviluppabili	105
“Spianamento” approssimato	106
Rigate non sviluppabili	106
Superfici a curvatura variabile	108
5. Tecniche	109
<i>Kerfing</i>	114
Tipologie di taglio	115
Tagli su un solo lato	116
Tagli su entrambi i lati	118
Tagli passanti	119
Pattern di taglio	122
Pattern lineare	124
Distribuzione del pattern lineare	127
Tecniche sperimentali	133
6. Applicazioni	135
Rigate sviluppabili	140

Superfici cilindriche	143
Superfici coniche	146
Tangenziale: elicoide	152
Prototipo 1_geometria	154
Prototipo 1.1_polipropilene	155
Prototipo 1.2_multistrato	157
Prototipo 1.3_polipropilene e multistrato	161
Prototipo 1.4_alluminio	165
Prototipo 2_geometria	166
Prototipo 2.1_alluminio	169
Prototipo 2.2_legno	170
Prototipo 2.3_polipropilene	177
Tangenziale: spigolo di regresso intersezione	178
Prototipo 1_alluminio	180
Prototipo 2_polipropilene	182
Prototipo 3_PLA stampa su tessuto	184
Tangenziale: spigolo di regresso linea grafica	188
Prototipo 1_cartoncino	192
Superfici non sviluppabili	196
Rigate non sviluppabili: paraboloidi iperbolici	202

7. Conclusioni e sviluppi 209

Bibliografia 213

Prefazione

Graziano Mario Valenti

L'ideazione, le mutue relazioni e l'espressione delle forme geometriche hanno sempre ricoperto un ruolo fondamentale, direi cruciale, nel processo progettuale, dell'architettura, del design e dell'opera di ingegneria. Le capacità progettuali e costruttive, necessarie ad operare rigorosamente con la forma, si acquisiscono durante un lento processo di studio e maturazione critica, un percorso guidato dalla teoria, che poggia ogni passo sul lastricato delle numerose ed eterogenee applicazioni, che conducono alla costruzione dei modelli.

La natura di questi modelli è oggi particolarmente varia e un progetto davvero integrato, che aspiri alla gestione della complessità, se ne può avvalere in sinergia, operando con rigore scientifico e procedendo con relativa semplicità.

Il libro di Mara Capone "Dal piano alla superficie" agevola proprio questo percorso, esplorando e approfondendo il tema del progetto e della rappresentazione della forma, con un approccio metodologico consapevole e replicabile, che integra teoria e pratica, focalizzando in particolare la modellazione algoritmica e le tecniche di fabbricazione digitale.

Oggetto centrale del libro e di studio specifico nell'ambito della geometria descrittiva sono il progetto e la rappresentazione di superfici sviluppabili o di superfici a doppia curvatura - quindi non sviluppabili - alle prime riducibili mediante apposita discretizzazione.

Dal piano alla superficie

Un'operazione, quest'ultima, la cui natura varia in relazione alla scala e agli aspetti funzionali della superficie.

Fra le superfici sviluppabili, particolare interesse è dedicato alle superfici tangenziali: rigate sviluppabili, definite dall'insieme delle tangenti appartenenti ad una curva sghemba, cui ci si riferisce con il termine di spigolo di regresso.

In linea con le più evolute strategie di ricerca, Mara Capone sperimenta e collauda soluzioni di ausilio al progetto e alla rappresentazione delle superfici, realizzando algoritmi di modellazione indiretta, sviluppati con procedure descritte in Visual Programming Language.

La ricerca della soluzione ottimale avviene così in un ambiente parametrizzato dinamico, consentendo di individuare la migliore configurazione, fra le infinite costruibili, all'interno delle due condizioni della superficie considerate limite e denominate l'una di sviluppo piano e l'altra di equilibrio tridimensionale.

Fra le possibili classificazioni delle superfici, nel libro è prediletta quella differenziale, che evidenzia le proprietà della curvatura e consente di comprendere se una superficie può essere sviluppata o meno.

Le procedure di modellazione indiretta, originali e appositamente realizzate, sperimentano sia l'approccio geometrico descrittivo, sia quello matematico analitico, evidenziando così le potenzialità e le criticità offerte dai due percorsi.

Il capitolo quarto, in particolare, esemplifica il confronto fra i metodi, utilizzando il caso notevole di sviluppo dell'elicoide.

Le procedure, sempre descritte in modo puntuale, sono via via presentate nelle pagine del libro; questa accortezza è naturalmente utile per far comprendere al lettore i fondamenti teorici e le loro possibili applicazioni, ma è altrettanto utile per trasmettergli, nei modi consueti della disseminazione scientifica, i principi ispiratori e procedurali delle soluzioni geometriche, così che possa egli stesso ideare e sviluppare nuove e diverse soluzioni personali.

Altrettanto utile alle esemplificazioni teoriche e pratiche relative alle superfici sviluppabili, risultano le indicazioni di metodo e procedurali per affrontare la discretizzazione e/o lo spianamento con deformazioni contenute, di superfici non sviluppabili.

Dopo avere posto nei primi capitoli, con chiarezza e ricchezza di apparato iconografico, i fondamenti teorici dello sviluppo delle superfici, nel quinto e sesto capitolo Mara Capone entra nel merito delle applicazioni e in particolare della loro prototipazione.

Un'attenzione particolare è dedicata alla tecnica del kerfing, che consiste nel praticare tagli su pannelli piani per aumentarne la flessibilità. Questa tecnica, che viene analizzata e sperimentata in diverse applicazioni, permette di trasfor-

mare materiali rigidi in geometrie complesse, offrendo soluzioni innovative per la costruzione di superfici sviluppabili e non sviluppabili.

Il testo propone una classificazione dei diversi pattern di taglio in relazione alla curvatura e allo spessore del materiale, illustrando i principi e i metodi per la loro applicazione in funzione delle caratteristiche geometriche delle superfici di progetto .

Le applicazioni presentate nel testo non sono semplici appendici, ma rappresentano una parte essenziale della ricerca.

Attraverso esempi concreti, si dimostra il ruolo fondamentale della conoscenza geometrica nei processi costruttivi, in linea con l'area di ricerca internazionale nota come Architectural Geometry, che si colloca all'intersezione tra architettura, geometria applicata, progettazione computazionale, matematica e produzione. Le sperimentazioni descritte mirano a controllare il processo di trasformazione dal piano alla superficie complessa, utilizzando sia approcci descrittivi che matematici per simulare il movimento e descrivere le infinite configurazioni possibili .

Il metodo di lavoro impiegato è fondato sull'osservazione critica dei prototipi, che fungono da dimostrazione delle ipotesi e da base per la definizione di ulteriori approfondimenti teorici e sperimentali.

La realizzazione dei prototipi fisici rappresenta una fase essenziale del processo, fornendo feedback critici per perfezionare e modificare gli script utilizzati. Questo approccio iterativo consente di passare dall'analisi critica del prototipo alla costruzione di script applicabili in diversi contesti, basati sugli stessi principi fondamentali.

Mara Capone, nelle conclusioni del libro, lancia con chiarezza una nuova sfida ponendo in evidenza alcuni argomenti chiave che potrebbero essere interpretati come fattori fondamentali per lo sviluppo della ricerca fin qui condotta.

Si pensi, ad esempio, al contributo che potrebbero fornire in fase di ottimizzazione delle superfici, le tecnologie di Intelligenza Artificiale e di Machine Learning; si immagini, ancora, la varietà applicativa e formale che potrebbero scaturire da un appropriato uso di materiali avanzati; si considerino, infine, i vantaggi che potrebbero derivare da un approfondito studio dei processi di robotica e automazione se finalizzati alla prototipazione delle superfici.

Una varietà di argomenti di grande interesse, intersecantisi tra loro, il cui studio richiede risorse altamente competenti in uno scenario necessariamente interdisciplinare. Emergono quindi delle esigenze che si configurano come un augurio affinché l'autrice possa presto trovare le opportunità per proseguire lo sviluppo della ricerca finora illustrata.

Dal piano alla superficie

A sostegno di questo auspicio, arrivi anche un plauso per questa opera, caratterizzata da un notevole contenuto teorico-scientifico, ma indubbiamente accessibile e utile a varie professionalità nel campo del progetto. Gli esperti potranno adottare il principio secondo cui la conoscenza della geometria è essenziale per il controllo del progetto e che la sperimentazione pratica, supportata dalla modellazione algoritmica e dalle tecniche di fabbricazione digitale, possa aprire nuove vie nella ricerca e nella pratica progettuale

Prefazione

Leonardo Paris

Il libro di Mara Capone è un testo che tratta di Geometria descrittiva approfondendone uno degli argomenti principali, quello sulle superfici curve, in continuità con quel filone di tradizione scientifica risalente alla fine del diciottesimo secolo ma già nota nei secoli precedenti.

Allo stesso tempo è anche un libro fortemente innovativo perché dimostra quanto sia attuale il processo di rinnovamento di questa disciplina in conseguenza della rivoluzione digitale e della modellazione informatica.

È quindi un contributo che declina in maniera esemplare quel binomio “tradizione/innovazione” che ha contraddistinto (e che continua a caratterizzare) l’azione di rinnovamento portata avanti a partire dalla fine del secolo scorso da un gruppo di ricercatori sospinti, sostenuti e stimolati da Riccardo Migliari il cui obiettivo è stato quello di configurare una nuova scienza della rappresentazione fondata sull’unione del rigore logico alla potenza di calcolo e alla espressione informatica. Da questo punto di vista il presente contributo rispecchia appieno l’intendimento iniziale di Migliari.

Il contributo di Mara Capone dimostra inoltre, nel caso in cui ce ne fosse ancora bisogno, l’importanza di questa disciplina nel processo di formazione di architetti, ingegneri e designer. Disciplina che, anche grazie alla rivoluzione digitale, ha saputo rinnovarsi senza rinnegare l’inesauribile patrimonio storico-culturale

Dal piano alla superficie

che affonda le sue radici profonde nell'evoluzione stessa del pensiero geometrico.

La geometria, prima di essere astrazione logica, è l'essenza delle molteplici configurazioni formali del mondo fenomenico. Ne è quindi una condizione ontologica. La descrizione, e quindi la comprensione dei principi geometrici avviene indubbiamente attraverso la capacità di astrazione e di immaginazione del nostro pensiero ma occorre anche rimarcare l'importanza della componente visuale come veicolo principale attraverso il quale è possibile definire quelle relazioni che costituiscono il fondamento teorico di questa disciplina.

Anche se la Geometria analitica, sviluppata alla fine del diciassettesimo secolo, riesce ad affrontare le stesse problematiche di relazione fra gli elementi geometrici è solo attraverso l'elaborazione di modelli conformi che si riesce concretamente ad apprezzare le risultanze di quelle relazioni, anche - e soprattutto - da un punto di vista estetico progettuale.

Su questo specifico punto Mara Capone più volte ci tiene a sottolineare la stretta connessione tra le conoscenze teoriche di controllo e gestione delle proprietà geometriche della forma e l'abilità progettuale nel saper tradurre quelle proprietà in artefatti di design, di architettura, di ingegneria.

Il linguaggio utilizzato dall'autrice è al tempo stesso scientificamente rigoroso ma anche sufficientemente discorsivo richiamando alla memoria un dibattito già molto ricorrente a cavallo tra il diciassettesimo e il diciottesimo secolo nel periodo di maggiore divulgazione dei primi trattati scientifici ritenuti da alcuni troppo ostici e da altri eccessivamente discorsivi.

Il tema specifico affrontato da Mara Capone è quello del rapporto tra superfici curve e loro sviluppo su un piano.

Due sono le questioni affrontate dall'autrice. La prima è quella di agganciare la specificità del tema ai principi teorici riguardanti la classificazione delle superfici curve. Tema molto complesso non tanto per l'articolazione delle definizioni ma per il fatto che in molti casi le superfici possono soddisfare criteri e logiche di genesi della forma fra loro sovrapponibili e/o interscambiabili ai quali corrispondono anche differenti modelli descrittivi.

Su quest'ultimo punto molto efficace è la distinzione che viene fatta tra modello tradizionale, ibrido e computazionale. L'altro aspetto è quello legato alle potenzialità descrittive della modellazione digitale in grado di far comprendere con apparente semplicità anche le relazioni geometriche più complesse.

I metodi per così dire tradizionali della Geometria descrittiva - come, per esempio, le doppie proiezioni ortogonali - hanno sempre evidenziato una forte criticità nella rappresentazione delle relazioni geometriche di superfici curve.

Un'esperienza personale emblematica di questa criticità è stata quella riguardante lo studio della teoria geometrica degli ingranaggi e la classificazione delle cosiddette superfici coniugate in cui le tavole grafiche a corredo delle trattazioni scientifiche di fine diciannovesimo e primi anni del ventesimo secolo, benché esemplari e rigorose, non erano in alcuni casi di facile comprensione.

Mara Capone dimostra come l'interazione tra visualizzazione del modello risultante e visualizzazione dell'algoritmo generativo (Visual Programming Language) sia una delle modalità di rappresentazione più efficaci e stimolanti anche in relazione alla gestione della dinamicità e dei gradi di infinità di modificazione della forma.

La parte del libro sicuramente più innovativa e accattivante soprattutto per chi ha interesse a comprendere i processi di conformazione, deformazione e genesi della forma partendo da superfici materiche piane è quello dedicato alle tecniche e alle applicazioni. I presupposti teorici sono quelli relativi allo sviluppo e "spianamento" approssimato delle superfici, in cui si evidenzia prima di tutto la non biunivocità nella relazione tra superficie sviluppabile e sua sviluppata e, a seguire, la condizione direi ossimorica di sviluppo "approssimato" di una superficie non sviluppabile.

Mara Capone evidenzia, anche in questo caso in maniera esemplare, la relazione tra modelli - mentale, digitale, fisico - in una logica di conoscenza e di progettualità iterativa e biunivoca sfruttando le enormi possibilità simulative dei Digital Twins.

In conclusione, vorrei proporre un ulteriore spunto di riflessione scaturito dalla lettura del libro di Mara Capone che riguarda il rapporto - in particolare in questa disciplina scientifica, ma comune a molte altre - tra didattica e ricerca. In entrambi questi fronti la Geometria descrittiva del ventunesimo secolo ha aperto numerosi fronti di indagine.

Ma, al tempo stesso, i tempi formativi delle diverse discipline nelle scuole di Architettura, Ingegneria e Design si sono in molti casi compressi. L'insegnamento della Geometria descrittiva include spesso anche attività di alfabetizzazione informatica in cui il problema principale è insegnare come rappresentare, non cosa. Sta alla scelta di ogni singolo docente cercare di spremere il restante corpus disciplinare in relazione ai diversi progetti formativi in cui si colloca.

La conoscenza della Geometria solida, che dovrebbe essere il vero focus per l'aspirante Architetto, Ingegnere e Designer, viene a volte sacrificata o, nel migliore dei casi, relegata a corsi opzionali o a percorsi finali di tesi.

Nell'ottica di quello che oramai appare come un processo irreversibile di rinnovamento chiunque rivesta ruoli didattici si trova nella condizione di dover

Dal piano alla superficie

definire le priorità di conoscenza geometrica e valutare i metodi più efficaci di comunicazione e di apprendimento utili alla formazione degli Architetti, Ingegneri e Designer.

La ricerca, in questo senso, ha aperto scenari molto interessanti nel settore della Geometria solida applicata, specie in un momento in cui l'analisi e la produzione si manifestano attraverso forme sempre più complesse.

Si sta delineando uno specifico campo di ricerca sulla geometria che ha come fine quello di analizzarne le risposte a determinate azioni, interne e/o esterne.

Una geometria per sua natura dinamica e responsiva.

In questo senso la forma che scaturisce da queste geometrie si carica di significati multipli, materiali ed immateriali.

Si potrebbe quindi parlare di una Geometria prestazionale, quella cioè in cui i processi generativi di costruzione della forma sono pensati ed assoggettati a regole in funzione di precisi input e conseguenti output.

Il libro di Mara Capone ne è una chiara dimostrazione.

Introduzione

Il tema della costruzione di una forma a partire da una superficie piana è un argomento storicamente ricorrente ed è alla base delle sperimentazioni che hanno come obiettivo la ricerca di soluzioni ottimizzate fondate sulla geometria applicata. Il punto di partenza di tutte le sperimentazioni è legato ai diversi metodi utilizzati per discretizzare la superficie soprattutto in funzione della scala e della natura della superficie stessa. Due sono in questo ambito gli approcci prevalenti: da un lato la divisione della superficie continua in pannelli, *paneling*¹, e dall'altro la definizione di un'unica superficie piana che, messa in forma, configura quella continua di progetto.

Ampia e varia è la letteratura per quanto riguarda la tecnica del *paneling*, numerosissimi sono gli studi che nell'ultimo decennio tendono ad offrire soluzioni sempre più prestanti basate su specifici algoritmi di ottimizzazione per la costruzione di superfici *free form*². Queste soluzioni sono tutte legate ad un approccio che si può definire statico, in cui la costruzione della superficie di progetto si realizza tramite l'assemblaggio di pannelli, piani o curvi, su un'eventuale struttura di supporto.

Obiettivo di questo testo è, invece, quello di approfondire il secondo approccio, basato su un processo dinamico, che implica la definizione delle due configurazioni limite: quella piana e quella tridimensionale in equilibrio.

Dal piano alla superficie

In questo processo entrano in gioco una serie di componenti legate, ovviamente, alla natura della superficie, alla scala, ma soprattutto alle caratteristiche fisiche del materiale che implica un'accurata progettazione dei vincoli.

L'attività di ricerca parte dallo studio della geometria e dalle potenzialità offerte dall'utilizzo degli strumenti computazionali e tende a sviluppare soluzioni generali teoricamente applicabili nell'ambito del design, dell'ingegneria e dell'architettura. Centrale diventa la possibilità di simulare e rappresentare il movimento che consente alla superficie piana di assumere le infinite configurazioni tra le due posizioni limite. L'utilizzo degli strumenti di modellazione algoritmico generativa consente di affrontare il problema in tutta la sua complessità, aprendo nuovi ambiti di sperimentazione e di ricerca basati su antichi principi, la cui verifica è sempre meglio supportata dalla diffusione delle tecniche di fabbricazione digitale. La modellazione in VPL, *Visual Programming Language*, nonostante si sia ampiamente diffusa nell'ultimo decennio, appare ancora come un campo aperto che offre molteplici opportunità di ricerca. Questi strumenti, pur essendo spesso accolti con estrema diffidenza, possono e devono entrare in modo più strutturato nel percorso formativo dell'architetto e del designer per non restare appannaggio di pochi, talvolta inconsapevoli, sperimentatori. Uno degli obiettivi principali di questo lavoro è proprio quello di contribuire a definire approcci consapevoli e metodologie replicabili. Pertanto, i casi di studio, oltre ad essere degli specifici approfondimenti, sono un pretesto per aprire nuovi orizzonti, favorire l'ibridazione di competenze al fine di stimolare lo sviluppo di soluzioni progettuali ottimizzate. Punto di partenza è il confronto critico delle diverse possibili modalità di generazione e di gestione delle superfici, così come classificate secondo il tradizionale criterio descrittivo³, a cui consegue la definizione di tre tipologie di modelli: il *modello digitale tradizionale*, il *modello ibrido* e il *modello computazionale*⁴. Per *modello digitale tradizionale* si può generalmente intendere, un modello generato utilizzando gli strumenti comunemente presenti nei diversi software per la modellazione 3D, mentre per *modello ibrido* si intende un modello realizzato in ambiente VPL, in cui alcune delle geometrie sono importate e, quindi, non controllate parametricamente. Il *modello computazionale* è, invece, un modello integralmente concepito in ambiente VPL⁵ e, quindi, controllabile e gestibile parametricamente.

La classificazione differenziale delle superfici è il presupposto teorico per definire alcuni casi studio fondamentali legati alle diverse famiglie di superfici: le superfici sviluppabili, le superfici rigate non sviluppabili, le superfici minime e le superfici a curvatura variabile. Da un punto di vista metodologico la scelta di casi studio esemplificativi ha consentito di sperimentare approcci integrati

in cui teoria e prassi sono complementari e costituiscono la base per costruire specifici *script* utilizzabili in diverse applicazioni. In particolare, la modellazione in ambiente VPL ha reso possibile un confronto immediato tra il tradizionale approccio geometrico descrittivo e quello matematico, aprendo nuovi scenari in cui la contaminazione dei saperi può favorire la ricerca di soluzioni innovative. In relazione al tema specifico, è stato affrontato prima il problema legato alla generazione della superficie e successivamente quello della determinazione della forma piana da poter utilizzare per la sua costruzione. L'obiettivo è quello di evidenziare come la conoscenza delle proprietà geometriche possa guidare il progettista nella ricerca di soluzioni in grado di semplificare i metodi costruttivi e ridurre i costi di produzione.

La possibilità di costruire un modello fisico di studio utilizzando un materiale flessibile come la carta è da sempre un metodo fondamentale per verificare le ipotesi progettuali. Si può sempre costruire un modello di carta se l'oggetto è composto da facce piane, oppure se è composto da una particolare famiglia di superfici, le *svilupppabili*, che hanno la caratteristica di poter essere distese su un piano con un movimento rigido, cioè senza strappi o deformazioni.

La generazione e il controllo delle superfici svilupppabili è, quindi, uno degli argomenti centrali del testo che esplora in particolare il caso delle superfici *tangenziali*, descrivendo l'approccio metodologico utilizzato per costruire alcuni script basati sui principi della geometria differenziale. Le superfici svilupppabili sono superfici rigate a curvatura gaussiana nulla, tra cui si possono distinguere tre famiglie: le *superfici coniche* e le *superfici cilindriche*, generate conducendo da un punto proprio o improprio le rette generatrici ad una curva direttrice, e le *tangenziali*, ottenute conducendo le tangenti ad una qualsiasi curva sghemba. Da un punto di vista metodologico per progettare una forma utilizzando queste particolari superfici è fondamentale conoscere la genesi geometrica per definire i parametri che ne consentono il controllo. Per quanto riguarda le superfici coniche e le superfici cilindriche i parametri sono la configurazione della curva direttrice e la posizione del centro, mentre le più complesse e meno note superfici tangenziali dipendono solo dalla curva direttrice, detta *spigolo di regresso*, poiché la tangente in un punto ad una curva è sempre univocamente determinata. Questa premessa consente di chiarire i principi geometrici e di definire le possibilità di controllo delle superfici *tangenziali* in relazione alla diversa natura della direttrice o *spigolo di regresso*⁶. Si individuano, quindi, i casi fondamentali a cui è possibile ricondurre sempre il problema in relazione alla natura della direttrice, che può essere una curva luogo geometrico, una linea su superficie, un'intersezione di due superfici o una linea grafica.

Dal piano alla superficie

Generata la *svilupabile* si deve affrontare il problema della determinazione della *svilupata*, la forma piana da tagliare per poter costruire un modello di carta. Il problema si risolve immediatamente in ambiente digitale per le superfici coniche e le superfici cilindriche, mentre risulta molto più complesso nel caso delle superfici tangenziali generiche. Dall'esigenza di risolvere questo specifico problema sono stati sviluppati alcuni *script* con l'obiettivo di costruire uno strumento di computazione utilizzabile per determinare la forma piana di una tangenziale qualsiasi. Si ritiene che l'illustrazione di questo processo sia utile non solo per la costruzione dello specifico *tool* ma che sia fondamentale per rendere esplicite alcune delle potenzialità legate proprio all'approccio computazionale: consentire la costruzione di un *script* personalizzato, quindi costruito per risolvere un problema specifico, basato su regole geometriche e utilizzabile da chi lo ha definito, ma non solo. Nel caso specifico, partendo dal concetto di svilupabilità, così come storicamente formulato in relazione ai principi della geometria differenziale, nel testo si illustra dettagliatamente il processo metodologico utilizzato per definire due diversi *script* che consentono di determinare la svilupata di una tangenziale qualsiasi. Il confronto tra due metodi diversi è un'ulteriore occasione per sottolineare la possibilità di definire sempre nuove soluzioni connesse all'approccio computazionale. DEVELOPABLE è l'algoritmo che è stato costruito e che rappresenta un avanzamento significativo di un algoritmo precedentemente definito⁷. Il processo, illustrato nel dettaglio in modo da poter essere replicato, è stato testato per la progettazione e la costruzione dei diversi prototipi descritti nel testo.

Dal caso delle superfici svilupabili il campo di indagine si estende alle problematiche connesse alla costruzione delle superfici a doppia curvatura, quindi non svilupabili, e delle possibili strategie, tecniche e materiali utilizzabili per costruire alcune di queste superfici a partire da una forma piana.

Da un punto di vista teorico è sempre possibile realizzare una superficie svilupabile tagliando la svilupata e utilizzando materiali flessibili e non deformabili, mentre si possono realizzare superfici a doppia curvatura positiva o negativa solo se il materiale oltre ad essere flessibile è anche "deformabile". Infatti, in questo caso, per passare dalla configurazione piana alla sua configurazione tridimensionale è necessario prevedere tagli, *kerfing* o pieghe *bending*, ma in ogni caso è indispensabile individuare la strategia più adatta al caso, per generare tale configurazione piana. Pertanto, sono state individuate alcune possibili procedure per determinare quello che è stato definito "spianamento approssimato" di alcune superfici non svilupabili, proprio con l'obiettivo di definire il necessario supporto teorico alle diverse applicazioni presentate.

Sono proprio le applicazioni a sollecitare gli approfondimenti su alcune specifiche tecniche, mentre la descrizione del processo per la progettazione e la costruzione dei diversi prototipi ha l'obiettivo di rendere sempre più esplicito il legame esistente tra teoria e prassi.

Partendo dal caso più semplice, quello delle superfici sviluppabili, si affronta la prima questione fondamentale connessa alle caratteristiche fisiche dei materiali ed in particolare ai concetti di flessibilità, di elasticità e di deformabilità. Infatti, per costruire una superficie sviluppabile, una volta risolto il problema geometrico e definita la sviluppata, si deve utilizzare un materiale flessibile come la carta, oppure utilizzare una tecnica per renderlo flessibile.

La questione dei materiali è l'occasione per indagare le potenzialità di alcune tecniche che consentono di modificare le caratteristiche originarie dei materiali basate sull'applicazione di specifici *pattern* di taglio, ed in particolare la tecnica del *kerfing*. Questa tecnica, che consente di trasformare pannelli piani in geometrie complesse, può essere una fonte di ispirazione per studi e applicazioni in diversi ambiti e alle diverse scale. Presupposto fondamentale per la sperimentazione e l'esplorazione delle potenzialità è la comprensione del comportamento meccanico del materiale a seguito dell'applicazione del *pattern* di taglio.

Per definire un processo replicabile si illustrano i principi e i metodi per applicare le diverse tecniche con l'obiettivo di fornire un indirizzo per l'utilizzo di tali tecniche in funzione della natura delle superfici e, quindi, della curvatura. Anche in questo caso l'obiettivo è soprattutto metodologico, i test non sono esaustivi ma esemplificativi e lasciano aperto il campo ad altre possibili sperimentazioni.

La maggior parte dei prototipi realizzati si basa sull'applicazione della tecnica del *kerfing* utilizzata per aumentare la flessibilità dei materiali. Questa tecnica consiste nel praticare tagli nel pannello piano in modo da renderlo flessibile in funzione della curvatura della superficie di progetto. Alcune tipologie di taglio consentono di aumentare la deformabilità del materiale e, quindi, di costruire anche superfici non sviluppabili. Si propone una classificazione dei diversi *patterns* di taglio in relazione alla curvatura e allo spessore del materiale e si descrive il processo per la definizione degli algoritmi utilizzati per gestire l'applicazione di tali *patterns* in funzione delle caratteristiche geometriche delle superfici di progetto.

Le applicazioni sono la parte fondamentale del testo, non una semplice appendice, esse hanno lo scopo di dimostrare con esempi concreti il ruolo fondamentale che la conoscenza della geometria può assumere nei processi costruttivi, in linea con un ambito di ricerca internazionale noto come *Architectural Geometry* al confine tra architettura, geometria applicata, progettazione computazionale,

Dal piano alla superficie

matematica e produzione. Attraverso le applicazioni si esplora la base di alcune metodologie utilizzabili per passare dal piano alla forma di progetto, applicando forze e progettando vincoli in funzione delle caratteristiche fisiche del materiale. Si mostrano i risultati di alcune sperimentazioni realizzate per controllare il processo in ambiente VPL, basate su due diversi approcci, quello geometrico descrittivo e quello matematico, con l'obiettivo di simulare il movimento e quindi di descrivere tutte le infinite configurazioni che la superficie assume tra le due posizioni limite: quella piana e quella di progetto. La simulazione fisica del processo cinetico, che trasforma la forma planare in una superficie complessa in equilibrio, è un ulteriore spunto per definire un approccio metodologico su cui basare la progettazione dei dettagli costruttivi. La sperimentazione consiste, in questo caso, nell'utilizzo della rappresentazione del movimento, del disegno dei tracciati di alcuni punti notevoli della struttura per la progettazione del sistema meccanico.

In generale il metodo di lavoro impiegato è fondato sull'osservazione critica dei prototipi come dimostrazione di ipotesi, come base per la definizione di approfondimenti teorici più ampi e, soprattutto, per la definizione di nuovi progetti sperimentali. Le applicazioni sono, dunque, il momento di sintesi dell'intero processo, un test sull'utilità degli *script* definiti, una verifica delle ipotesi progettuali simulate digitalmente e un metodo per meglio definire i dettagli costruttivi. La realizzazione dei prototipi è soprattutto l'occasione per ottimizzare le soluzioni e definire nuovi percorsi di ricerca come gli approfondimenti su altre tecniche analoghe, come la tecnica del *kirigami*, e la sperimentazione di tecniche ibride, come la stampa in PLA su tessuto.

Anche in questo caso le applicazioni sono un pretesto per testare una metodologia in cui i principi teorici fondamentali si visualizzano grazie all'interfaccia VPL che rende esplicita la matematica e consente di materializzarla attraverso la costruzione di prototipi, la cui realizzazione testimonia la validità di un processo ibridato basato sul *learning by doing*.

¹ Lanzara E. 2019.

² Pottmann H. 2017.

³ Migliari R. 2009, p.144.

⁴ Sul concetto di modello vedi Migliari R. e Valenti M.G. 2009.

⁵ Tutte le applicazioni contenute in questo testo sono state realizzate utilizzando *Rhino* e il *tool* per la modellazione algoritmica *Grasshopper*.

⁶ Le *tangenziali* sono particolari sviluppabili ottenute conducendo le tangenti ad una qualsiasi curva gobba detta *spigolo di regresso*.

⁷ Capone M. 2018.

1 Il controllo delle superfici

Principi_Metodi_Strumenti

La conoscenza della geometria è la base fondamentale per il controllo della forma alle diverse scale, dal design all'architettura, dal conteso urbano a quello paesaggistico. Il progettista utilizza da sempre la geometria per visualizzare, misurare e costruire la forma ideata.

Nel 1794, in *Leçons données aux Écoles Normales*, Gaspard Monge, fondatore della prestigiosa École Polytechnique di Parigi, struttura il corpus di regole empiricamente utilizzate fondando una disciplina autonoma che prende il nome di *Géométrie Descriptive*¹.

Come lo stesso Monge sostiene, oltre alla funzione di rappresentare sul piano oggetti che hanno tre dimensioni e definire le regole per la costruzione delle forme nello spazio, la GD² è un mezzo di ricerca della verità che partecipa attivamente ai processi creativi, consente di passare dall'intuizione

¹ Monge G. 1798.

² Migliari R. 2009.

alla definizione della forma, dall'ignoto al noto e viceversa, consente di scoprire proprietà nascoste tracciando nuovi percorsi dal noto all'ignoto.

In questo ambito si collocano le sperimentazioni presentate in questo testo, fortemente ancorate ai fondamenti della disciplina con l'obiettivo di dimostrare come i principi teorici definiti da Monge svolgano ancora oggi un ruolo determinante per definire applicazioni basate sull'utilizzo di strumenti in grado di rendere l'approccio matematico computazionale esplicito³.

Il carattere innovativo di questi strumenti risiede soprattutto nella possibilità di controllare con consapevolezza forme complesse, di progettare *tools* in grado di risolvere problemi e di generare soluzioni alternative basate sulla conoscenza dei principi teorici della geometria e della matematica.

Il processo di ideazione è, da sempre, fortemente condizionato dagli strumenti e dai metodi con cui la forma si rappresenta e si genera.

Grazie alla diffusione di interfacce grafiche *user friendly* per la programmazione visuale, l'approccio computazionale sta diventando parte integrante del processo.

La modellazione VPL, *Visual Programming Language*⁴, consente di ampliare il repertorio di strumenti che il progettista ha a sua disposizione. Andando oltre gli algoritmi che si utilizzano implicitamente nella modellazione digitale tradizionale⁵ è possibile definire *tools* personalizzati in relazione a specifiche esigenze.

La progettazione algoritmica, o *Algorithmic Design* (AD), è un processo per la generazione della forma che parte da regole logiche espresse per mezzo di linguaggi di programmazione e codici⁶. Le interfacce VPL offrono la possibilità di incorporare la complessità computazionale all'interno del flusso creativo, consentendo all'utente di progettare

³ Calvano M. 2019.

⁴ Le applicazioni contenute nel testo sono tutte realizzate in VPL con *Rhino\Grashoper*.

⁵ Calvano M. 2019.

⁶ Terzidis K. 2004.

direttamente attraverso la manipolazione del codice, quindi, riducendo le limitazioni connesse all'utilizzo di strumenti per la modellazione digitale di tipo tradizionale⁷. In altri termini, l'AD è un approccio processuale che consente un controllo della forma che può essere personalizzato dall'utente tramite lo *script*⁸ e può essere inteso come la codifica di istruzioni esplicite per generare moduli digitali⁹. L'AD è un paradigma di progettazione basato su strumenti per creare geometrie complesse utilizzando regole e relazioni relativamente semplici che consentono di passare dal "noto all'ignoto" e viceversa.

Se l'obiettivo principale della modellazione digitale è quello di definire una determinata forma, attraverso la modellazione computazionale si definisce, invece, un processo in grado di generare infinite forme in funzione dei parametri impostati. Il progettista definisce lo *script* attraverso il quale genera diverse alternative e sceglie la soluzione che ritiene più adeguata e la soluzione "ottimizzata" in relazione a specifici parametri assunti come riferimento.

Da un punto di vista metodologico, per esplorare alcune delle potenzialità offerte dalla modellazione computazionale si è ritenuto fondamentale confrontare tre diversi approcci individuati per la generazione e il controllo delle superfici: la modellazione digitale tradizionale, la modellazione ibrida e la modellazione computazionale. Inoltre, l'utilizzo del *Visual Programming Language* ha offerto l'opportunità di esplorare le potenzialità della rappresentazione matematica esplicita per alcuni casi notevoli, in cui siano note le equazioni parametriche, e di dimostrare come questo approccio possa essere complementare nella gestione della complessità¹⁰.

Principale obiettivo è, quindi, quello di dimostrare con applicazioni esemplificative un approccio metodologico che tende all'integrazione degli strumenti e dei saperi¹¹.

⁷ Caetano I. et al. 2020.

⁸ Humppi H. e Österlund T. 2015.

⁹ Oxman R. 2017.

¹⁰ Ciarloni R. 2009, p. 5.

¹¹ Per approfondimenti sul concetto di Modello e Modello Integrato si veda Migliari R. 2004 e Valenti G.M. 2022, p. 34.

In particolare, l'approfondimento sulle superfici sviluppabili è anche un'occasione per definire una metodologia replicabile in cui l'approccio computazionale, basato sul pensiero logico/analitico, ha consentito di costruire uno script personalizzato, DEVELOPABLE, in grado di risolvere un problema altrimenti difficilmente risolvibile: sviluppare una tangenziale generica.

DEVELOPABLE è, quindi, uno strumento costruito per risolvere uno specifico problema, basato su principi teorici e matematici, utilizzato per realizzare applicazioni diverse e potenzialmente utilizzabile da altri utenti per altri usi.

Andando oltre il caso particolare, l'obiettivo è quello di definire una metodologia replicabile, ripercorrendo il processo per la costruzione di uno strumento che, partendo dai principi teorici, consente di fornire soluzioni per la progettazione e la costruzione di forme basate su tali principi.

Superfici

La costruzione di un modello, che sia digitale, analogico o computazionale, si fonda sempre sulla definizione degli elementi geometrici fondamentali: il punto, la linea e la superficie. Questi elementi costituiscono il linguaggio universale della geometria e vengono utilizzati per rappresentare e manipolare forme e strutture in una vasta gamma di contesti. In particolare le superfici svolgono un ruolo determinante nel processo ideativo sia quando sono utilizzate nella loro forma ideale, quindi continua, sia quando costituiscono la base per progettare sistemi discreti.

I molteplici criteri utilizzati per la classificazione delle superfici si basano sulle diverse proprietà che le superfici hanno in comune. Nell'ambito della Geometria Descrittiva, intesa come disciplina che si occupa della generazione delle forme nello spazio, le

superfici sono classificate seguendo un criterio definito "sintetico"¹², mentre da un punto di vista matematico sono classificate secondo criteri "analitici", "differenziali" o "topologici".

I principali criteri di classificazione sono generalmente sintetizzati in:

1. *classificazione geometrica*;
2. *classificazione differenziale*;
3. *classificazione analitica*;
4. *classificazione topologica*.

Come è noto, secondo la *classificazione geometrica*, le superfici possono essere considerate come generate da una linea retta o curva, detta *generatrice*, che si muove nello spazio secondo una determinata legge di moto, o che si appoggia ad una o più linee dette *direttrici*¹³. Tradizionalmente la classificazione descrittiva delle superfici si basa sulle più semplici leggi di moto, sulla natura delle generatrici o delle direttrici e comprende¹⁴:

- le superfici di rivoluzione;
- le superfici di traslazione;
- le superfici elicoidali;
- le superfici rigate.

Alcune di queste superfici possono ovviamente appartenere contemporaneamente a classi diverse: ad esempio un cilindro circolare retto è una rigata perché la generatrice è una retta, è una superficie di rivoluzione in quanto generata dalla rivoluzione di una retta intorno ad un asse ad essa parallelo ed è una superficie di traslazione, ottenuta dalla traslazione di una circonferenza nella direzione ortogonale al piano a cui appartiene. Come per il cilindro circolare retto esistono molte altre superfici, anche più complesse, che appartengono contemporaneamente a più classi.

A queste superfici generate dal moto di una generatrice rigida, che non si deforma, si può aggiungere un'ulteriore classe di superfici generate da mo-

¹² Nell'ambito del testo sono richiamati alcuni dei principi fondamentali della Geometria Descrittiva, funzionali alle applicazioni e ai casi studio esemplificativi. Per approfondimenti si veda Migliari R. 2009.

¹³ Migliari R. 2009, p.144.

¹⁴ Migliari R. 2009, p.146.

Dal piano alla superficie

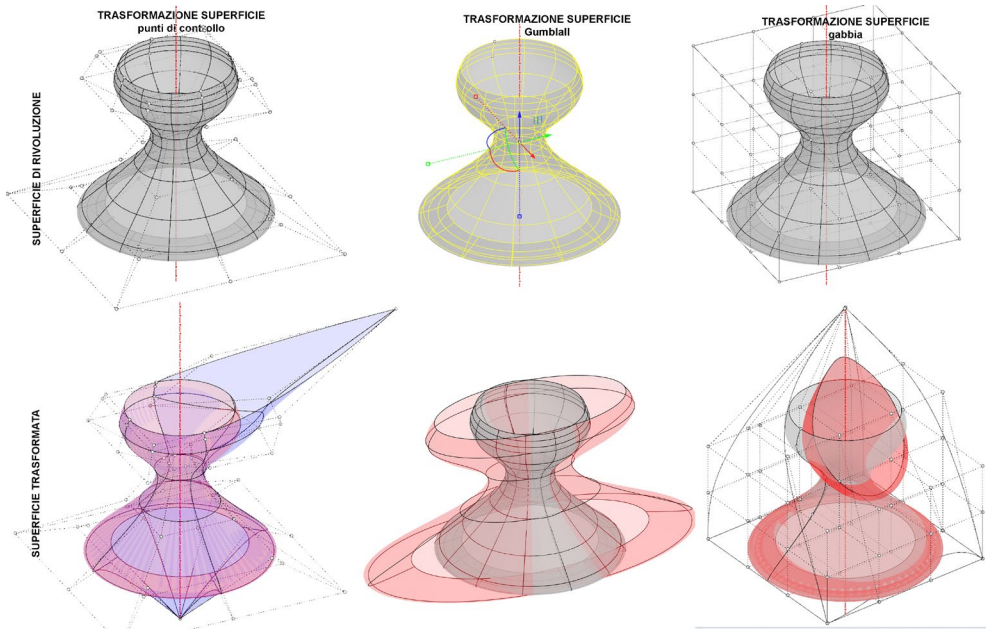


Fig. 1/ *Modello digitale tradizionale*: le diverse possibilità per gestire la trasformazione della superficie possono anche determinare una modifica sostanziale della natura della superficie.

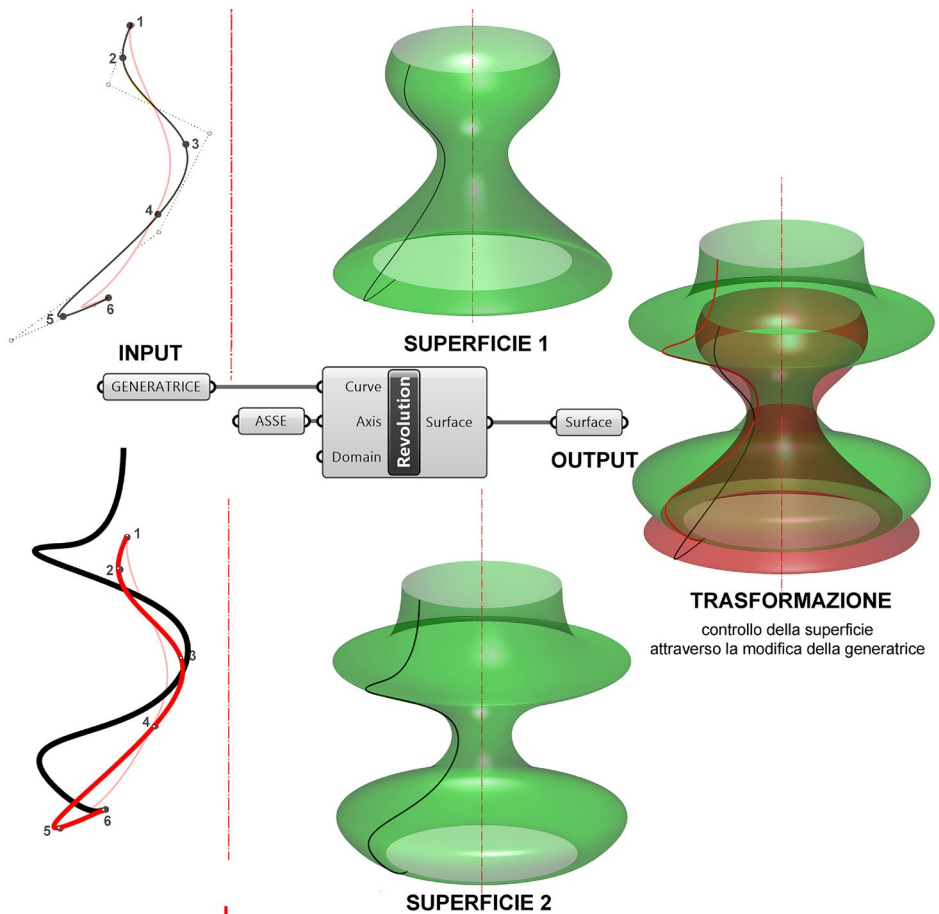
vimenti “non rigidi”, come ad esempio il moto di una linea, *generatrice*, che si muove su due binari, *direttrici*, e che per adattarsi deve necessariamente deformarsi, o di una serie di direttrici, sezioni della superficie, che può essere generata per interpolazione a partire da queste. La gestione di queste *superfici interpolate*¹⁵, estremamente complessa con gli strumenti analogici tradizionali, si semplifica notevolmente in ambiente digitale. Inoltre, l’utilizzo di strumenti algoritmico generativi ne ha favorito la larga diffusione grazie alla possibilità offerta da questi strumenti di un continuo controllo nel processo di generazione della forma. A differenza della modellazione digitale tradizionale¹⁶, la modellazione algoritmico-generativa consente di controllare la forma in base a parametri scelti come input di riferimento.

I casi riportati rappresentano esempi di metodologie replicabili utilizzando questo approccio, soprattutto nella fase di progettazione. Questo evidenzia una

¹⁵ Migliari R. 2009, p.145.

¹⁶ Capone M. 2010.

1. Il controllo delle superfici



delle principali caratteristiche della modellazione computazionale: la flessibilità. Grazie alla capacità di regolare parametri specifici, i progettisti possono esplorare una vasta gamma di configurazioni e iterazioni per ottenere risultati ottimali e adattarsi alle esigenze specifiche del progetto attraverso un processo che consente di generare infinite forme basate sulla stessa regola, utilizzando lo stesso *script*. Sono stati definiti tre diversi approcci per la modellazione e il controllo delle superfici basati sulle diverse tipologie di modelli definiti.

Modello digitale tradizionale: le geometrie sono generate utilizzando gli strumenti comunemente

Fig. 2/ *Modello ibrido*. La superficie è generata utilizzando una generatrice costruita con strumenti digitali tradizionali importata in ambiente VPL. In questo caso si stabilisce una relazione tra il *modello parametrico* e il *modello digitale tradizionale*: la superficie si modifica agendo sui punti di controllo della curva

disponibili in ambiente CAD. Questo è un metodo che si basa su strumenti standard di modellazione tridimensionale per creare e manipolare le superfici (Fig.1).

Modello ibrido: alcune delle geometrie generate in ambiente CAD sono integrate nel processo algoritmico generativo. In questo modo, vengono combinati elementi della modellazione tradizionale con approcci più avanzati basati sull'utilizzo degli algoritmi che consentono maggiore flessibilità e controllo nella generazione delle superfici (Fig. 2).

Modello computazionale: tutte le geometrie sono costruite parametricamente utilizzando tecniche computazionali. Questo significa che le superfici sono definite attraverso equazioni parametriche o algoritmi generativi, consentendo un controllo completo e dinamico sulla forma e sulle caratteristiche delle superfici (Fig.3).

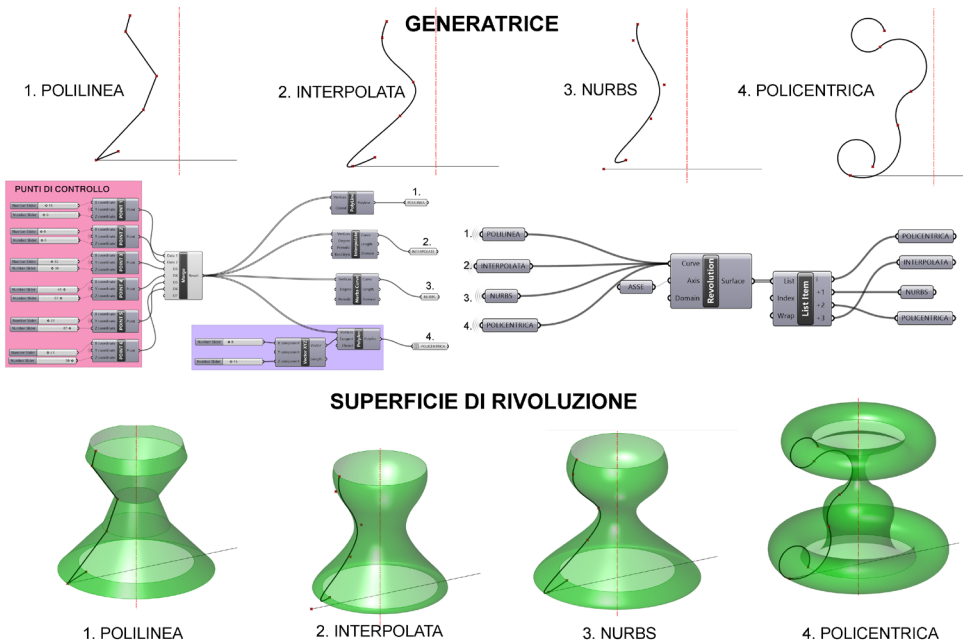
Ognuno di questi approcci offre vantaggi e limitazioni specifiche e può essere scelto in base alle esigenze del progetto e alle competenze disponibili.

La modellazione di alcune delle superfici geometricamente definite ha offerto l'opportunità di confrontare i diversi approcci per esplorare i limiti e le potenzialità di ciascuno in modo da orientare il progettista nella scelta consapevole dell'approccio più adatto alle proprie esigenze. Basandosi sull'analisi dei risultati ottenuti con i diversi metodi di modellazione, il progettista può prendere decisioni informate e selezionare l'approccio che meglio si adatta agli obiettivi del progetto. Questo aiuta a ottimizzare il processo di progettazione e a garantire risultati efficaci.

Superfici di rivoluzione

Le superfici di rivoluzione sono generate dal moto di una linea piana, retta o curva, intorno ad un asse. Esse, quindi, dipendono dalla natura della *generatrice*

1. Il controllo delle superfici



e dalla posizione di questa linea rispetto all'asse. Queste superfici godono di alcune caratteristiche geometriche la cui conoscenza è fondamentale per scegliere il metodo di modellazione più adatto in relazione al progetto. Le sezioni con piani ortogonali all'asse sono tutti cerchi, detti *paralleli*, mentre le sezioni con piani passanti per l'asse sono tutte uguali e sono detti *meridiani*¹⁷.

La geometria della superficie può, pertanto, essere definita attraverso la forma della generatrice oppure considerando n sezioni circolari (Figg. 2 e 3).

La *generatrice* è una linea che può essere un *luogo geometrico*, dove per luogo geometrico si intende l'insieme di tutti e solo i punti dello spazio che godono di una determinata proprietà¹⁸, oppure una forma libera¹⁹ o *linea grafica*.

Se la generatrice è un *luogo geometrico* la superficie si specializza, ad esempio: se è una retta la superficie è una *rigata*, se è una circonferenza la superficie è un *toro* o una *sfera*, se è una conica che ruota

Fig. 3/ Modello computazionale: la superficie si modifica trasformando la generatrice costruita parametricamente.

¹⁷ Migliari R. 2009, p.224.

¹⁸ Per approfondimenti sul concetto di linea grafica e linea luogo geometrico si vedano: Valenti M.G. 2022, p.88, De Carlo L. 2009, p.97, Paris L. e De Carlo L. 2019, p.45.

¹⁹ Per approfondimenti sul controllo delle linee di forma libera cfr. Valenti M.V. 2022, p.105.

²⁰ Per approfondimenti sulla genesi delle superfici cfr. Migliari R. 2009, p.224 e p. 245.

Dal piano alla superficie

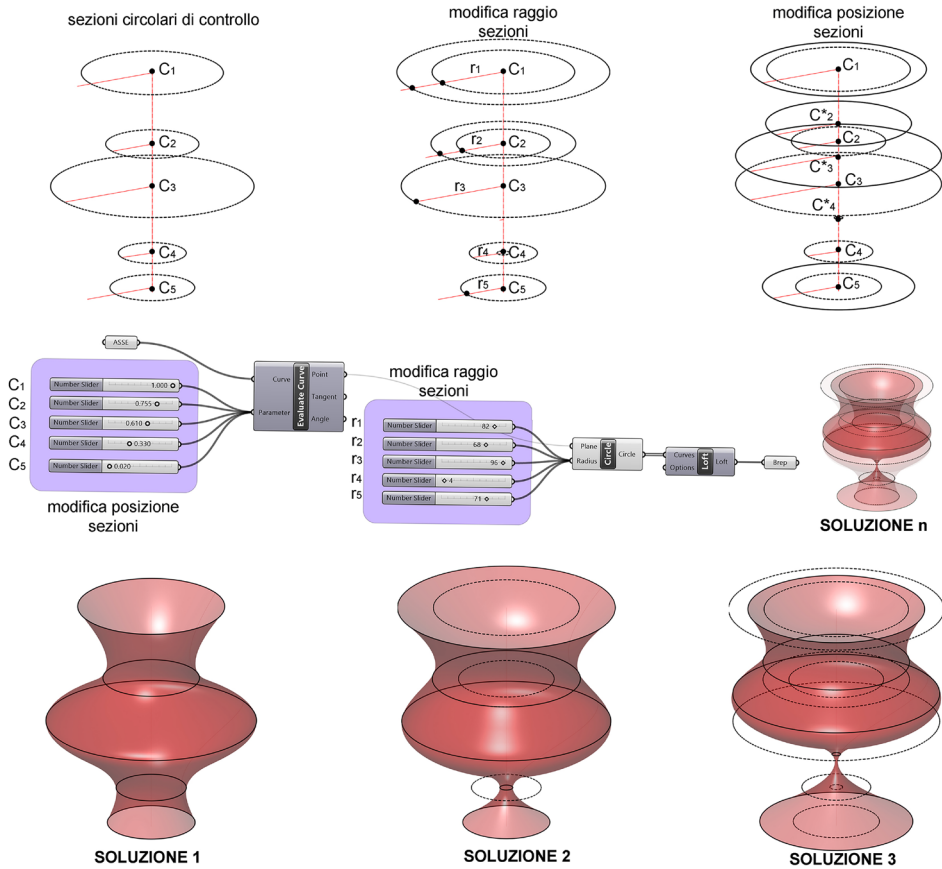


Fig. 4/ Modellazione in VPL: generazione e controllo della superficie attraverso la posizione e il raggio di n sezioni circolari

intorno ad uno dei suoi assi è una *quadrica di rotazione*²⁰.

Nel caso di una superficie di rivoluzione generica, la generatrice è una *linea grafica*, pertanto, la forma della superficie dipenderà dalla scelta del tipo di curva e soprattutto dalle diverse modalità di controllo di questa curva. La costruzione di una *linea grafica* in ambito digitale si basa sui metodi matematici e descrittivi elaborati a partire dalla fine degli anni '50 in poi da Bézier, da de Casteljaou e da Hermite che determinarono la definizione delle curve *NURBS*, *Non Uniform Razional B-Spline*²¹.

Se ad esempio si considerano n punti di controllo si possono definire diverse tipologie di curve, dalle più

²¹ Per approfondimenti sull'evoluzione delle diverse modalità di approssimazione delle linee grafiche Cfr. Valenti M.V. 2022, p.91.

semplici come la polilinea e la policentrica, a curve più complesse come le *Bézier* e le *nurbs*, (fig. 3) la forma dipenderà dalla tipologia di curva, dal numero di punti e dalla loro posizione.

Partendo da queste fondamentali premesse si possono definire diverse possibilità di generare una superficie di rivoluzione generica e diverse modalità di controllo in relazione ai possibili approcci definiti in precedenza: modellazione digitale tradizionale, modellazione ibrida e modellazione computazionale.

Le differenze tra i diversi approcci sono connesse alle diverse modalità di modificare interattivamente la superficie e di generare n soluzioni che il progettista potrà valutare in relazione alle specifiche esigenze legate al progetto.

Nel *modello digitale tradizionale* sia la generatrice che la superficie sono costruite con gli strumenti comunemente disponibili in ambiente digitale, ad esempio utilizzando un qualsiasi software di modellazione. In questo caso la forma può essere trasformata sia localmente che globalmente utilizzando i punti di controllo, oppure appositi strumenti che consentono la deformazione rispetto agli assi scelti come riferimento (*Gumball*) o *una gabbia di punti di controllo* opportunamente definita. In questo caso esemplificativo la trasformazione comporta una sostanziale modifica della natura della superficie (Fig.1): la superficie modificata non è più una superficie di rivoluzione.

Nel *modello ibrido* la superficie si costruisce in ambiente VPL utilizzando come input la geometria definita in CAD stabilendo così una relazione tra il *modello digitale tradizionale* e il *modello computazionale*. In questo caso deformando la curva generatrice si trasforma la superficie senza modificarne la natura.

La superficie resta una superficie di rivoluzione e la forma può essere modificata interattivamente agen-

Dal piano alla superficie

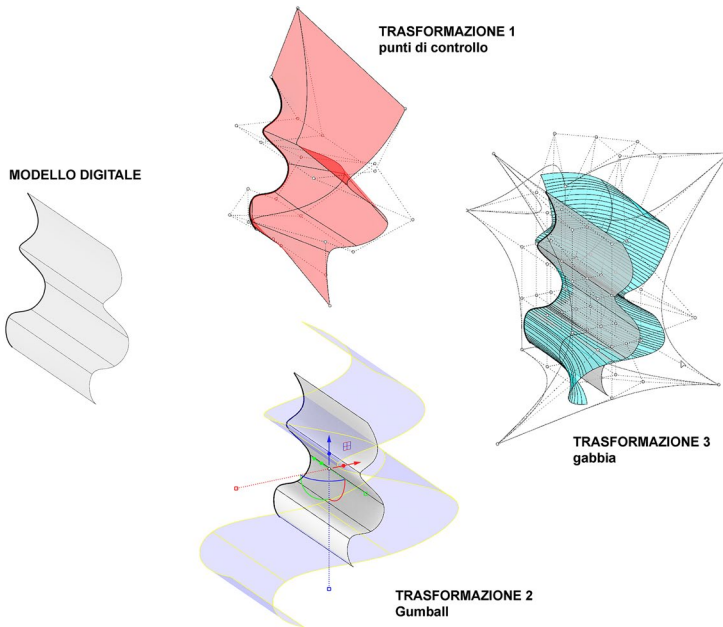


Fig. 5/ *Modello digitale tradizionale.* Superficie di traslazione generata dal moto di una generatrice in una direzione. Modalità di controllo della superficie utilizzando strumenti quali *Gumball* o gabbia di punti di controllo.

do sui punti di controllo della generatrice tracciata con gli strumenti digitali tradizionali (Fig. 2).

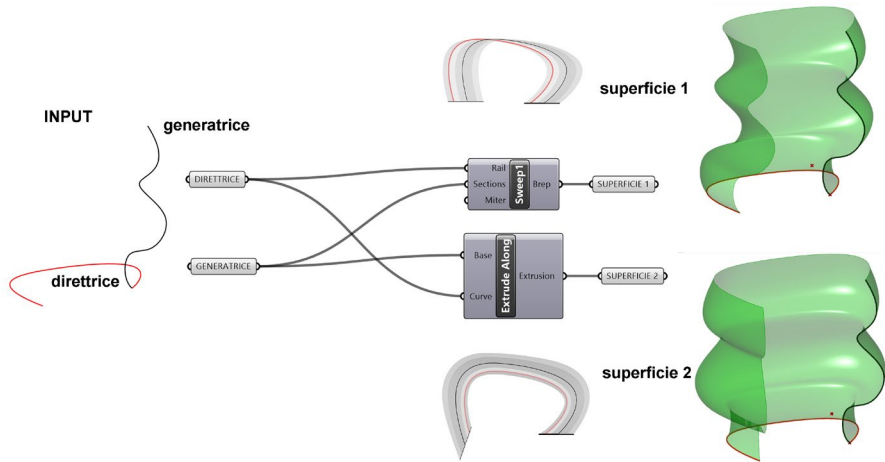
Nel *modello computazionale* sia la generatrice che la superficie si definiscono in ambiente VPL.

Il *modello computazionale* offre una maggiore flessibilità e consente di generare infinite possibili alternative agendo su diversi parametri. Si potranno, ad esempio, variare il numero di punti che definiscono la linea generatrice, la loro posizione nel piano, la tipologia di curva e si potrà variare la posizione della curva rispetto all'asse di rivoluzione.

La scelta del processo dipende sempre dall'obiettivo, il progettista dovrà definire il percorso più adatto a seconda dei casi e dei contesti. I parametri assunti come riferimento sono sempre legati alle caratteristiche geometriche della superficie e quindi la definizione della migliore strategia non è mai un'operazione acritica e dipende fortemente dalla conoscenza della geometria.

Ad esempio, in questo caso, poiché le sezioni di una superficie di rivoluzione con piani ortogonali all'asse

1. Il controllo delle superfici



sono tutte circonferenze, si può definire un percorso alternativo scegliendo come parametro di riferimento n paralleli e generando la superficie come una *loft*, ottenuta interpolando n sezioni circolari (Fig.4). Variando la posizione delle sezioni di controllo e il raggio si possono generare infinite alternative.

Nel primo caso la superficie dipende dalla definizione della generatrice come curva parametrica e quindi dalla scelta dei punti di controllo e dalla tipologia di curva (Fig. 3), mentre nel secondo caso dal raggio e dalla posizione delle sezioni circolari scelte per il controllo della forma (Fig.4) . Non esiste il processo migliore, i parametri e la strategia saranno opportunamente scelti in relazione alle necessità di progetto e potranno essere contestualizzati e/o integrati in altri processi.

Superfici di traslazione

Le superfici di traslazione si ottengono considerando il moto di una curva piana, detta *generatrice*, lungo un'altra curva, detta *direttrice*. Se la *direttrice* è una curva rettilinea, la *generatrice* trasla in una direzione, e ogni punto della curva descrive una traiettoria rettilinea: la superficie è, quindi, una *rigata* (Fig. 5).

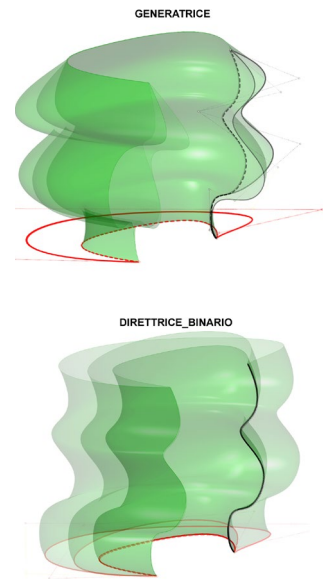


Fig. 6/ Modello ibrido. Superficie 1: la generatrice si muove in una direzione. Superficie 2: la generatrice si muove sulla direttrice restando parallela. Superficie 3: la generatrice si muove adattandosi alla curvatura della direttrice.

Fig. 7/ Modello ibrido. La generatrice e la direttrice sono importate nel software VPL. La superficie si può controllare modificando le due curve in ambiente digitale.

Dal piano alla superficie

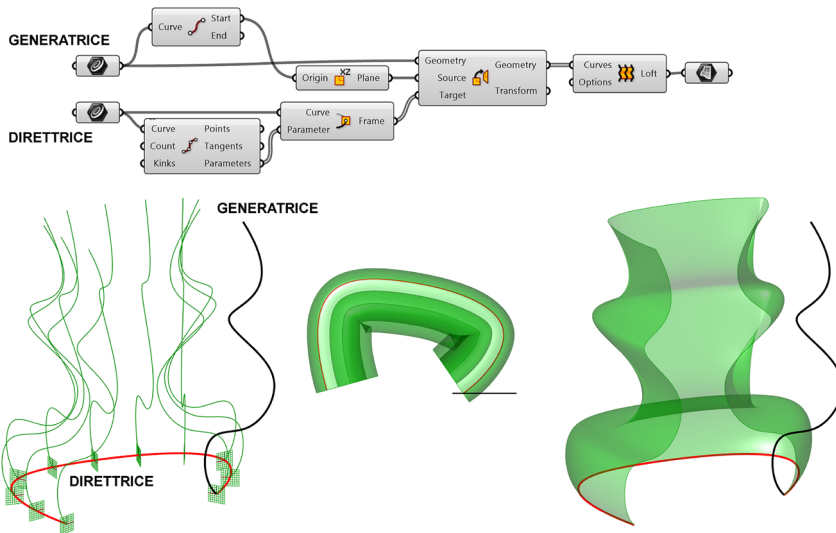


Fig. 8/ Superficie di traslazione: in questo caso la generatrice assegnata si muove lungo una direttrice curvilinea in modo che il piano sia sempre ortogonale ad essa.

Il concetto di superficie di traslazione può essere generalizzato considerando anche le superfici generate dal moto di una curva piana, *generatrice*, lungo un'altra curva piana, *direttrice* o binario non rettilineo (*rail*).

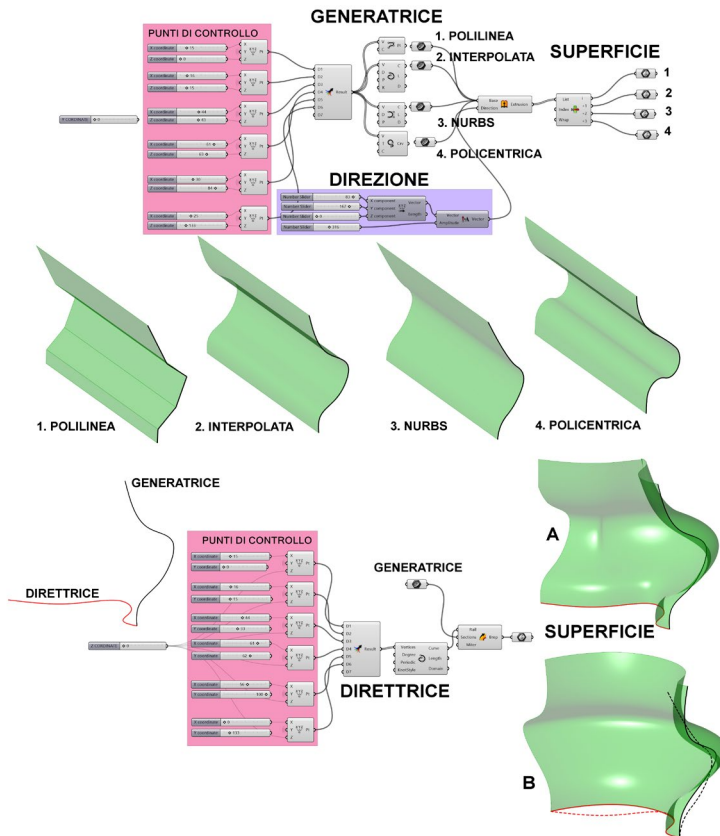
Sulla base di queste premesse si possono generare *modelli digitali tradizionali*, *modelli ibridi* e *modelli computazionali*.

In ambiente digitale il modello si può ottenere come estrusione della curva generatrice in una direzione o anche come traslazione lungo un binario rettilineo. Anche in questo caso il *modello digitale tradizionale* è modificabile utilizzando i *punti di controllo*, o una *gabbia*. Come sottolineato in precedenza, queste trasformazioni possono anche modificare sostanzialmente la superficie tanto da alterarne le proprietà originarie (Fig. 5).

Analogamente il *modello ibrido* si può ottenere importando la geometria della curva generatrice in ambiente VPL e assegnando parametricamente il vettore che definisce la direzione, oppure importando la direttrice non rettilinea.

La forma si può, quindi gestire, modificando le ge-

1. Il controllo delle superfici



ometrie importate attraverso i punti di controllo (Fig.6 e 7).

Il *modello computazionale* si ottiene parametrizzando sia la *generatrice* che il vettore che definisce la direzione o la *direttrice curvilinea*.

Nel modello algoritmico generativo la *generatrice* è una curva piana gestita parametricamente e la direzione è un vettore variabile, lo *script* consente di generare infinite superfici di traslazione variando la forma della *generatrice* e la direzione (o la forma del binario, *direttrice curvilinea*) (Fig. 9).

Esistono anche altre possibilità per controllare le variazioni di una superficie generata dal moto di una *generatrice* in base in base all'inclinazione del piano della generatrice rispetto alla *curva direttrice*.

Fig. 9/ *Modello computazionale*. Diverse possibili modalità di gestione della superficie. La generatrice è una curva gestita parametricamente. La direttrice è un vettore oppure una curva che può essere gestita in modo analogo alla generatrice.

L'orientamento del piano a cui appartiene la *generatrice* rispetto alla *curva direttrice* può influenzare significativamente la forma e le caratteristiche della superficie generata. Esso può conservare sempre la stessa giacitura, indipendentemente dall'andamento della *curva direttrice*, oppure può orientarsi in modo da essere sempre perpendicolare mentre si muove lungo di essa. Ciò significa che il piano ruota costantemente per mantenere l'ortogonalità rispetto alla curva. Questo processo può essere utilizzato per applicazioni in cui è richiesto un controllo specifico della geometria della superficie.

La scelta dell'orientamento del piano dipende, ovviamente, dalle esigenze del progetto e dal risultato desiderato. In alcuni casi, potrebbe essere necessario mantenere una forma più uniforme e controllata, mentre in altri casi potrebbe essere preferibile ottenere variazioni più complesse e interessanti nella superficie.

Integrare questa variabile nello *script* o nel processo di modellazione consente di ottenere una maggiore flessibilità e controllo sul risultato finale, consentendo agli utenti di adattare la forma della superficie alle loro esigenze specifiche (Figg.8 e 9).

Superfici elicoidali

Le *superfici elicoidali*²² sono generate dal movimento di una linea, *generatrice*, lungo un'elica, *direttrice*. Se la *direttrice* è un'elica conica l'elicoide si definisce *conico* altrimenti è *cilindrico*. L'elicoide è generico se la generatrice è una *linea grafica* e non un *luogo geometrico* (Fig.10).

In particolare, le superfici elicoidali si specializzano in funzione della natura della generatrice: se la generatrice è rettilinea l'elicoide si definisce *rigato*, se la generatrice è circolare l'elicoide si definisce *cerchiato*.

Gli elicoidi si specializzano ulteriormente in funzione

22 Migliari R. 2009, p.229.

della posizione della generatrice rispetto all'asse, si definiscono *chiusi* se la generatrice interseca l'asse oppure *aperti* se la generatrice è sghemba.

Gli elicoidi rigati si possono ulteriormente classificare in relazione alla posizione della generatrice rispetto all'asse dell'elica in (Fig. 11):

- elicoidi a *cono direttore* se la generatrice interseca l'asse in un punto proprio;
- elicoidi a *piano direttore* se la generatrice è ortogonale all'asse;
- elicoide *rigato generico* se la generatrice è sghemba, quindi interseca l'asse in un punto improprio.

Il *modello digitale tradizionale* di una superficie elicoidale si ottiene estrudendo la generatrice lungo l'elica conica o cilindrica.

Il *modello ibrido* si può ottenere importando l'elica e l'asse, parametrizzando la *generatrice*, oppure viceversa utilizzando un'elica parametrizzata e importando la *generatrice*.

Anche in questo caso la superficie potrà essere controllata modificando la curva generatrice con le metodologie precedentemente illustrate.

Il *modello computazionale* si ottiene parametrizzando sia l'elica che la generatrice.

Per esempio, per costruire le diverse tipologie di elicoide rigato lo *script* si basa sulla regola geometrica: l'elicoide rigato è generico se la generatrice e l'asse sono sghembe, l'elicoide è a cono direttore se la generatrice è incidente ed in particolare è a piano direttore se è ortogonale all'asse (Fig. 11).

In questo caso è stato definito uno *script* che consente di variare la posizione della generatrice rispetto all'asse.

Analogo ragionamento può essere fatto per quanto riguarda gli elicoidi *cerchiati*, in questo caso i parametri scelti come riferimento consentono di variare la posizione della generatrice circolare ed in particolare si possono generare (Fig.12):

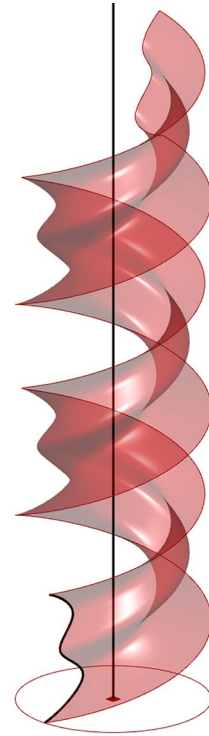


Fig. 10/ *Modello ibrido*. Elicoide generico: l'elica e l'asse sono le geometrie importate in ambiente VPL. Lo *script* consente di cambiare la forma della generatrice per ottenere infiniti elicoidi.

Dal piano alla superficie

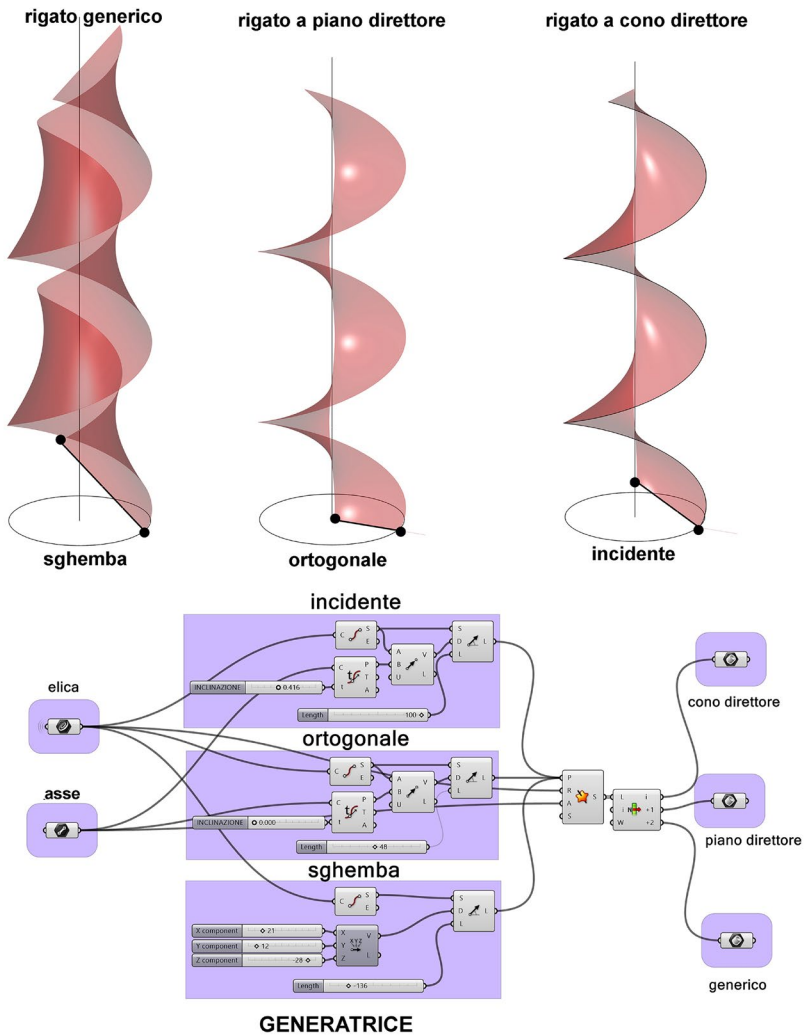
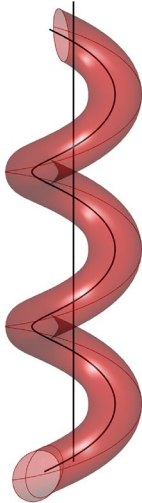


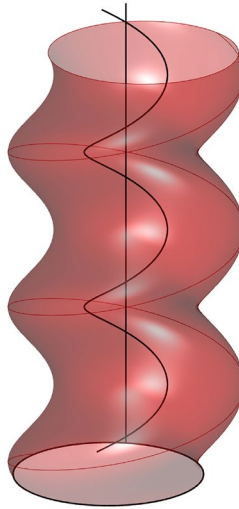
Fig. 11/ *Modello ibrido*. Elicoidi rigati.: l'elica e l'asse sono le geometrie importate in ambiente VPL. Lo script consente di cambiare la posizione della generatrice rispetto all'asse per ottenere i diversi elicoidi.

- la *colonna torsa*: la generatrice giace in un piano ortogonale all'asse;
 - la *vite di Saint-Gilles*: la generatrice è una circonferenza che scorre lungo l'elica e giace sempre su un piano passante per l'asse;
 - il *serpentino*: la generatrice circolare si muove lungo l'elica restando in un piano ortogonale all'elica.
- Anche in questo caso lo script consente di modificare il raggio della generatrice e tutti i parametri attraverso i quali si controlla la configurazione dell'elica.

vite di Saint-Gilles



colonna torsa



serpentino



Superfici rigate

Una particolare famiglia di superfici che trova molte applicazioni nell'ambito dell'architettura e del design è quella delle *rigate*, generate da una generatrice rettilinea che, nel caso più generale, si muove nello spazio appoggiandosi a tre curve²³.

Le infinite rette che definiscono la superficie si dicono generatrici, mentre si definisce direttrice una qualsiasi curva appartenente alla superficie che abbia in comune con ciascuna generatrice un solo punto. Teoricamente una rigata è univocamente assegnata quando siano assegnate tre direttrici sghembe. Nel caso generale le direttrici sono tre curve qualsiasi e la rigata si specializza in funzione della natura delle direttrici.

Nel suo trattato di Geometria Descrittiva Monge dimostra l'esistenza di una rigata²⁴ assegnate tre generiche curve sghembe indefinitamente estese nello spazio che sono assunte come *direttrici*.

Per costruire il modello utilizzando il metodo descrittivo, considerando le tre direttrici w_1 , w_2 e w_3 si

Fig. 12/ Elicoidi cerchiati. Il modello in VPL consente di modificare i parametri dell'elica e il diametro dei cerchi per ottenere gli infiniti elicoidi cerchiati.

²³ Per approfondimenti sulle rigate cfr. Fallavollita F. 2009, p.153.

²⁴ Monge G. 1798, p.130.

procede per approssimazione determinando n *generatrici*.

Dividendo in n parti la direttrice w_1 , si individuano i punti $P_1, P_2 \dots P_n$, si costruiscono le superfici coniche aventi per vertici i punti sulla direttrice w_1 e per direttrici le curve w_2 e w_3 (Fig.19). Ogni generatrice si determina come intersezione delle due superfici coniche²⁵.

La dimostrazione dell'esistenza della rigata generica risente dei limiti della rappresentazione grafica tradizionale. Monge si serve necessariamente delle proiezioni ortogonali per verificare le proprie ipotesi e quindi costruisce le tre *direttrici* in modo da trovare sempre una soluzione unica.

Costruendo il modello computazionale, in VPL, si mettono in evidenza i limiti del procedimento descrittivo tradizionale e si evidenzia la necessità di definire un processo generale. Il primo limite è rappresentato dalla natura delle *direttrici* che, pur essendo teoricamente indefinitamente estese nello spazio, sono assegnate come curve finite.

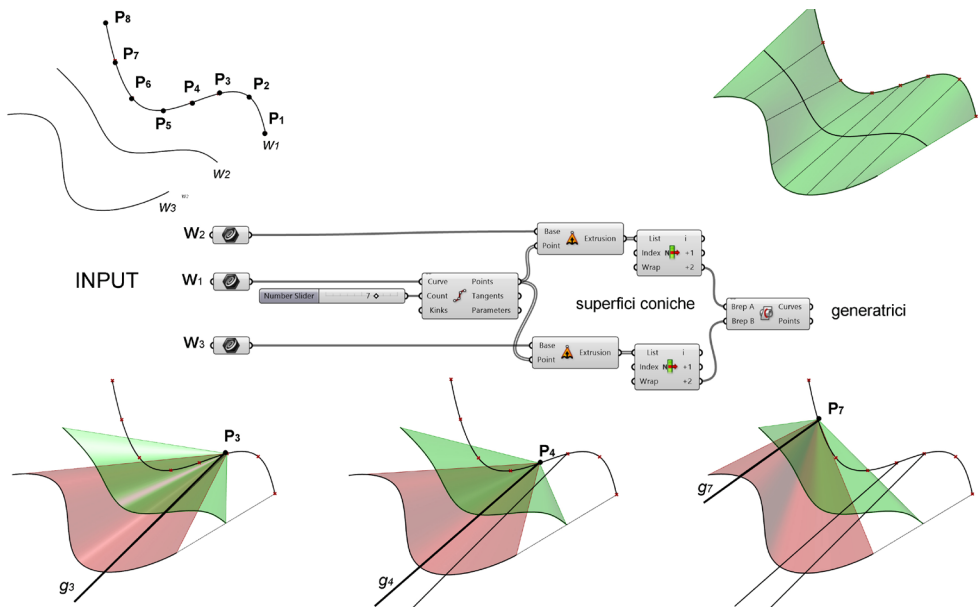
Inoltre, in alcuni casi, si individuano due intersezioni e quindi si deve definire quale delle due sia la generatrice che appartiene alla rigata. In generale si può affermare che assegnate due curve finite è sempre possibile costruire un'unica rigata ma ciò non è sempre possibile se si assegnano tre curve finite nello spazio. La soluzione dovrà in questo caso essere determinata analiticamente individuando il dominio di esistenza della rigata in funzione delle tre *direttrici* assegnate.

Questo è sicuramente possibile se le tre generatrici sono *curve luogo geometrico* mentre il problema potrebbe risultare indeterminato se le tre *direttrici* sono tre *linee grafiche* finite, arbitrariamente assegnate nello spazio.

Questo principio teorico può essere verificato in ambiente VPL assegnando tre *direttrici* qualsiasi. Con-

25 Fallavollita F. 2009, p.154.

1. Il controllo delle superfici



frontando le superfici generate con le diverse opzioni che offre l'algoritmo si possono ottenere (Fig. 14) due superfici rigate o una superficie interpolata passante per le tre curve

Analizzando il risultato ed in particolare le *isocurve* si può verificare che nel primo caso la superficie non è continua e si generano due rigate distinte mentre nel secondo caso la superficie è continua ma non esistono *isocurve* rettilinee (quindi la superficie non è una rigata).

La conoscenza di questi principi geometrici è, ancora una volta, una guida sicura per il progettista che intende controllare la generazione delle superfici di progetto con consapevolezza proprio per individuare la soluzione costruttiva più idonea.

Un'importante proprietà di alcune superfici rigate è, ad esempio, la "svilupparibilità".

Le superfici rigate *svilupparibili* possono essere distese su un piano senza subire deformazioni. Questa caratteristica le rende utilizzabili in molte applicazioni, soprattutto per i notevoli vantaggi

Fig. 13/ Rigata generica. *Modello ibrido*: le curve direttrici sono geometrie importate. Assegnate tre direttrici finite nello spazio non è sempre possibile determinare la rigata.

Dal piano alla superficie

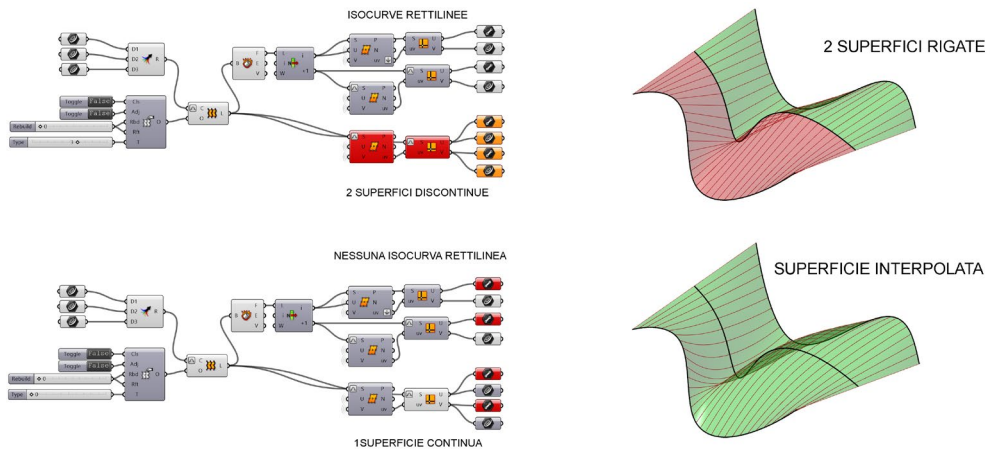


Fig. 14 / In ambiente VPL è possibile verificare le caratteristiche geometriche di una superficie. In questo caso lo *script* consente di verificare se la superficie è una rigata analizzando le isocurve.

che questa caratteristica offre dal punto di vista costruttivo.

Tuttavia, è importante notare che, anche le *rigate non sviluppabili*, nonostante la loro complessità geometrica, offrono comunque vantaggi significativi dal punto di vista costruttivo. Queste superfici sono state, infatti, molto utilizzate nell'ambito dell'architettura²⁶ e del design, proprio per la possibilità di poter essere discretizzate con elementi lineari. La scelta tra superfici rigate sviluppabili e non sviluppabili dipenderà, come sempre, dalle esigenze specifiche del progetto, da specifiche considerazioni estetiche, funzionali e costruttive.

Superfici interpolate

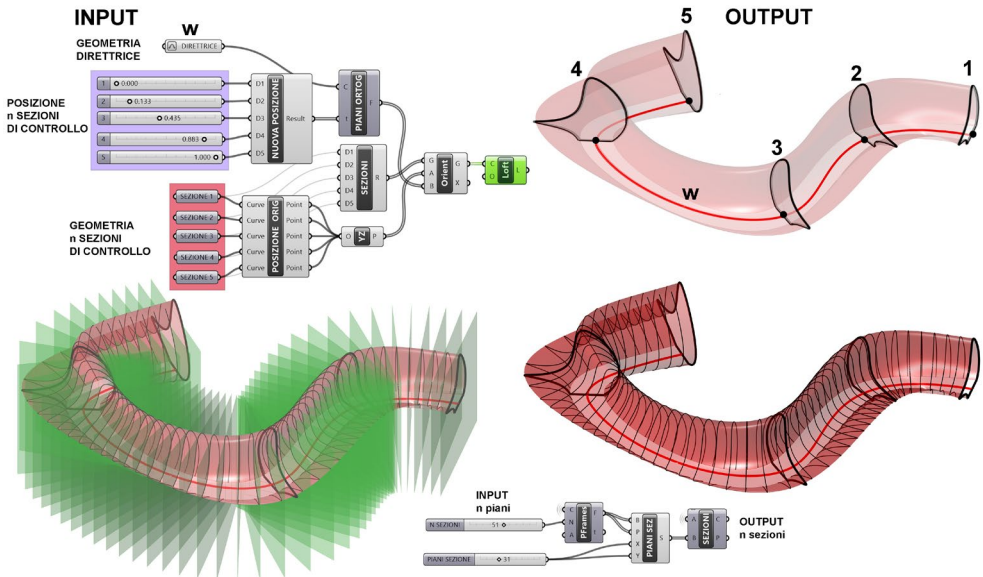
Le *superfici di interpolazione* rappresentano un'altra importante categoria di superfici generate da un moto non rigido, dove una *generatrice* si muove lungo una o più *direttrici* e si deforma durante il percorso.

Queste superfici possono essere costruite utilizzando algoritmi che interpolano dati specifici per generare la superficie.

Le principali tipologie di superfici di interpolazione includono le *loft* e le superfici generate dal moto di

²⁶ Capone M. 2012.

1. Il controllo delle superfici



una generatrice su due binari.

Le *loft* possono essere generate assegnando n sezioni notevoli generalmente posizionate in piani ortogonali alla direttrice.

Il *modello ibrido* si ottiene importando le sezioni e costruendo uno *script* che consente di spostare le sezioni lungo la direttrice in modo da generare diverse possibili soluzioni.

Il *modello ibrido* consente di controllare la forma della superficie attraverso step successivi, permettendo di ottenere ulteriori sezioni di controllo, sezionando la superficie con piani ortogonali alla direttrice.

Modificando queste sezioni in punti strategici, è possibile definire un processo iterativo che consente di migliorare ulteriormente la forma della superficie per soddisfare le esigenze del progetto (Fig. 15).

Il *modello computazionale*, dove sia le sezioni che il binario sono parametrici, offre il massimo grado di libertà.

Tuttavia, è importante notare che l'uso di un modello tutto parametrico può complicare il controllo

Fig. 15/ Superficie interpolata. Modello in VPL: la geometria si genera utilizzando n sezione di controllo. I parametri sono la forma della direttrice, la forma, il numero e la posizione delle curve sezione.

Dal piano alla superficie

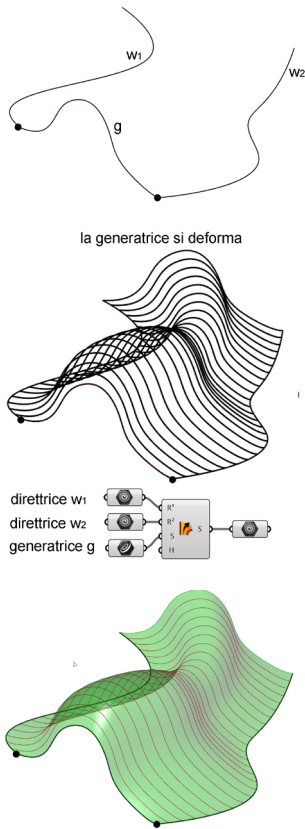


Fig. 16/ Superficie interpolata generata da una generatrice g che si deforma muovendosi su due direttrici w_1 e w_2 . Il modello in VPL si ottiene modellando parametricamente la generatrice g e le due direttrici w_1 .

della forma e rendere più complessa la definizione del progetto in relazione alle specifiche esigenze.

Altra famiglia di superfici interpolate è quella ottenuta muovendo una *generatrice* g su due binari w_1 e w_2 . In questo caso, la *generatrice* si deforma per adattarsi ai due binari. Questo processo può essere definito, costruendo uno *script* che consenta di controllare la superficie modificando parametricamente le direttrici e la generatrice.

Anche in questo caso è importante progettare il processo in modo da poter generare diverse soluzioni (Fig.16).

L'uso di superfici di interpolazione offre ai progettisti una vasta gamma di possibilità per controllare e modellare forme complesse in modo flessibile, ma il presupposto fondamentale è sempre quello di valutare attentamente i parametri da utilizzare per ottenere i risultati desiderati.

2 La classificazione differenziale delle superfici

La conoscenza delle proprietà geometriche delle superfici è la base fondamentale per risolvere problemi costruttivi e definire specifiche soluzioni progettuali alle diverse scale in relazione alle caratteristiche fisiche dei diversi materiali. Una delle proprietà fondamentali delle superfici, fortemente connessa alle diverse tecniche di fabbricazione e ai diversi materiali, è la sviluppabilità. Infatti, una *superficie sviluppabile* può essere sempre costruita a partire da una superficie piana con un materiale flessibile e indeformabile, che si mette in forma con un movimento rigido. La definizione di sviluppabilità di una superficie è connessa al concetto di curvatura gaussiana e, quindi, alla geometria differenziale.

La classificazione differenziale delle superfici introdotta da Leonhard Euler¹ (1707-1783), e successivamente utilizzata da Monge, permette di raggruppare le superfici secondo la definizione di curvatura, come definita da Carl Friedrich Gauss nel 1902², in

¹ Euler L. 1772.

² Gauss J.F.C. 1902.

Dal piano alla superficie

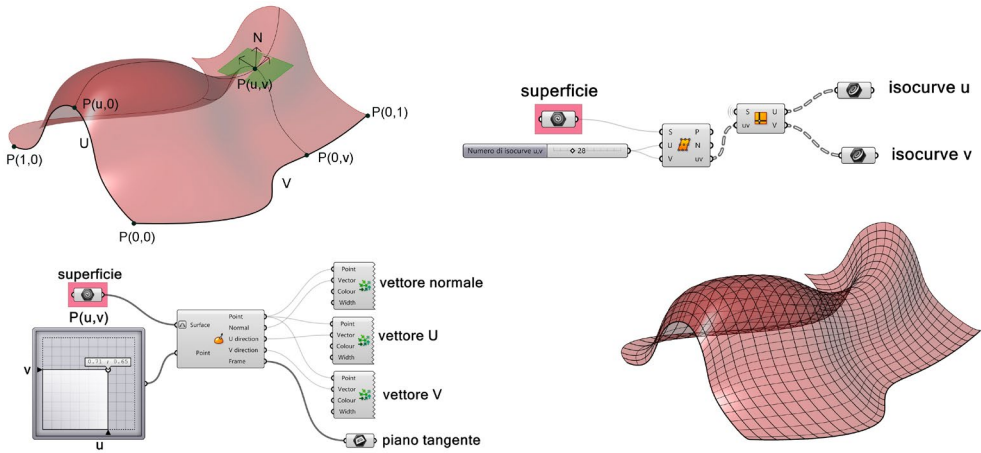


Fig. 1/ Modello parametrico di una superficie: ogni punto P di una superficie è descritto da due parametri u e v che sono le coordinate parametriche del punto. In ambiente VPL si possono visualizzare tutte le caratteristiche fondamentali di una superficie.

quattro categorie: superfici a *curvatura nulla*, superfici a *curvatura positiva*, superfici a *curvatura negativa* e superfici a *curvatura variabile*.

La curvatura è una caratteristica puntuale di una linea e di una superficie. Le linee e le superfici sono descritte in ambiente digitale utilizzando equazioni parametriche, in particolare ogni punto P di una curva è descritto in funzione di un unico parametro u , $P(u)$, che in genere varia in un dominio compreso tra 0 e 1. Analogamente una superficie in forma parametrica è definita da due parametri, u e v , e quindi ogni punto P di una superficie è descritto da questi due parametri $P(u,v)$. Se si considera, ad esempio, una generica superficie, il *dominio* è l'intervallo in cui i parametri u e v possono variare, in genere tale intervallo si considera compreso tra 0 e 1³.

Attribuendo un valore ad u ed un valore a v si definisce la posizione del punto P sulla superficie. Le *isocurve*, o curve *isoparametriche*, sono una particolare famiglia di curve su superficie: sono le curve della superficie che hanno lo stesso valore di uno dei due parametri (Fig.1).

In altri termini si costruisce un sistema di riferimento sulla superficie in cui le due curve di bordo U e V sono le curve che si ottengono assegnando rispetti-

³ Per approfondimenti sulla rappresentazione matematica cfr. Ciaroni R. 2009, p.12.

2. La classificazione differenziale delle superfici

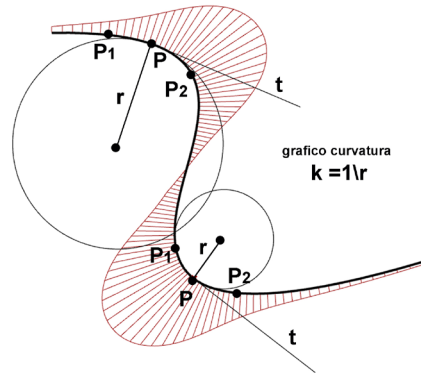
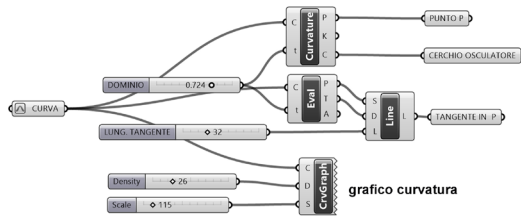


Fig. 2/ Analisi della curvatura di una generica curva in ambiente VPL.

vamente $u=0$ o $v=0$: con $u=0$ si ottiene la curva di bordo V e, viceversa, con $v=0$ si ottiene U.

In generale le curve si distribuiscono sulla superficie in direzione u e v generando una griglia, per ogni valore di v_i si ha l'isocurva U_i e viceversa per ogni valore u_i si ha una curva V_i . (Fig. 1)

In ambiente VPL questo concetto si può facilmente comprendere grazie alla possibilità di visualizzazione offerta dallo strumento. Considerando una generica superficie si possono analizzare le proprietà locali, in un punto $P(u, v)$. In particolare in ogni punto P si può definire il piano tangente, il vettore normale e i due vettori ortogonali in direzione u e v (Fig. 1).

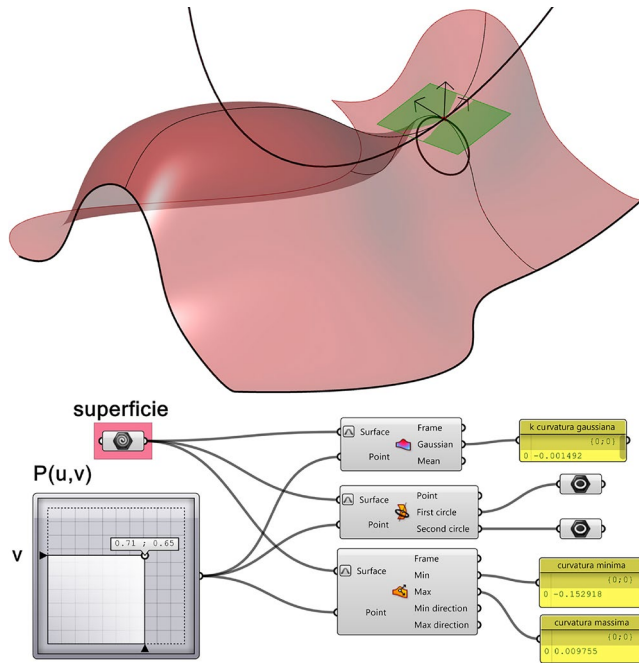
Curvatura gaussiana

La curvatura di una linea piana in un punto P, indicata con k , è definita come l'inverso del raggio del *cerchio osculatore*, o raggio di curvatura, della curva nel punto P. Si definisce *cerchio osculatore*, il cerchio che meglio approssima la curva in un intervallo infinitesimo intorno al punto P. Esso coincide con la posizione limite del cerchio passante per tre punti, P, P_1 e P_2 al tendere di P_1 e P_2 a P. Se il *cerchio osculatore* è una retta il raggio è teoricamente infinito e quindi la curvatura $1/r$ è nulla (Fig. 2).

Costruendo il modello parametrico di una generica curva e definito il dominio della curva $0 < u < 1$

Dal piano alla superficie

Fig. 3/ Analisi della curvatura di una generica superficie in ambiente VPL.



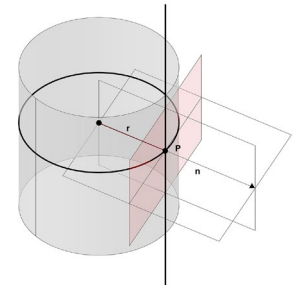
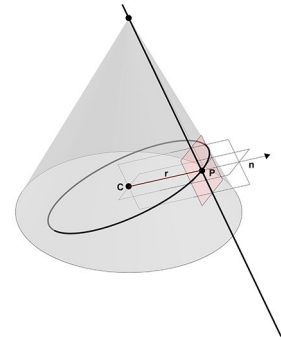
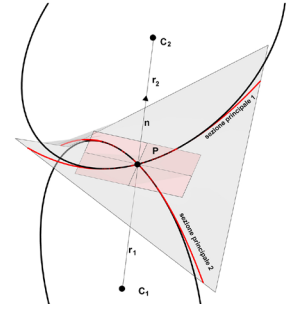
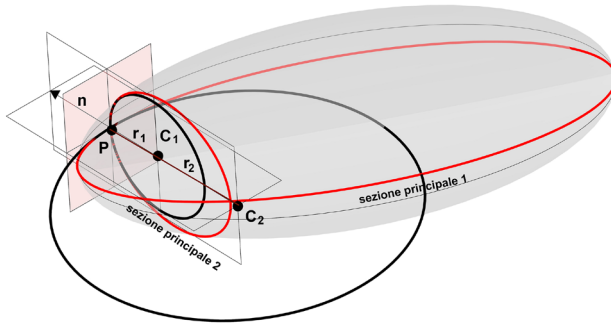
si possono visualizzare in ambiente VPL i cerchi osculatori al variare di P sulla curva, costruire la retta tangente in P e visualizzare il grafico della curvatura (Fig. 2). Se si considera una generica superficie si definiscono *sezioni principali*, le sezioni della superficie ottenute con piani passanti per la normale alla superficie in P , con curvatura minima e massima. Per definire le sezioni principali di una superficie in un punto $P(u,v)$, si costruisce il piano tangente alla superficie in quel punto, perpendicolare alla normale N alla superficie nel punto P . Considerando il fascio di piani passanti per la normale N si possono definire infinite sezioni della superficie che, generalmente, hanno curvatura diversa.

Tra tutte le sezioni ottenute, ci sono due sezioni particolari: una con *curvatura massima* e una con *curvatura minima*. Queste sono le sezioni principali della superficie in quel punto (Fig. 3).

Euler dimostra che queste sezioni appartengono a due piani ortogonali⁴.

⁴ Euler L. 1772.

2. La classificazione differenziale delle superfici



Le sezioni principali sono fondamentali per comprendere la forma e le caratteristiche locali della superficie in un punto P. La conoscenza delle sezioni principali consente di valutare la curvatura della superficie in varie direzioni e fornisce informazioni fondamentali per il design, l'analisi e la modellazione delle superfici in diversi contesti applicativi.

La *curvatura gaussiana*⁵ è il prodotto delle due curvatures principali, ne consegue che essa può essere *positiva*, *negativa* o *nulla*.

In particolare, la curvatura è:

- *negativa*: quando i cerchi osculatori si trovano da parti opposte (Fig.4);
- *positiva*: quando i cerchi osculatori delle sezioni principali si trovano dalla stessa parte del piano tangente (Fig.5);
- *nulla*: quando una delle due sezioni principali è una retta (Figg.6 e 7).

Quindi, nel caso di curvatura *positiva* e *nulla* la superficie, nell'intorno di P, si trova tutta da un lato rispetto al piano tangente, mentre se la curvatura è negativa il piano tangente attraversa la superficie. Una delle due sezioni principali delle superfici a *curvatura nulla* è sempre una retta, pertanto le superfici a *curvatura nulla* sono tutte *rigate*. Tuttavia

Fig. 4/ Curvatura gaussiana positiva.

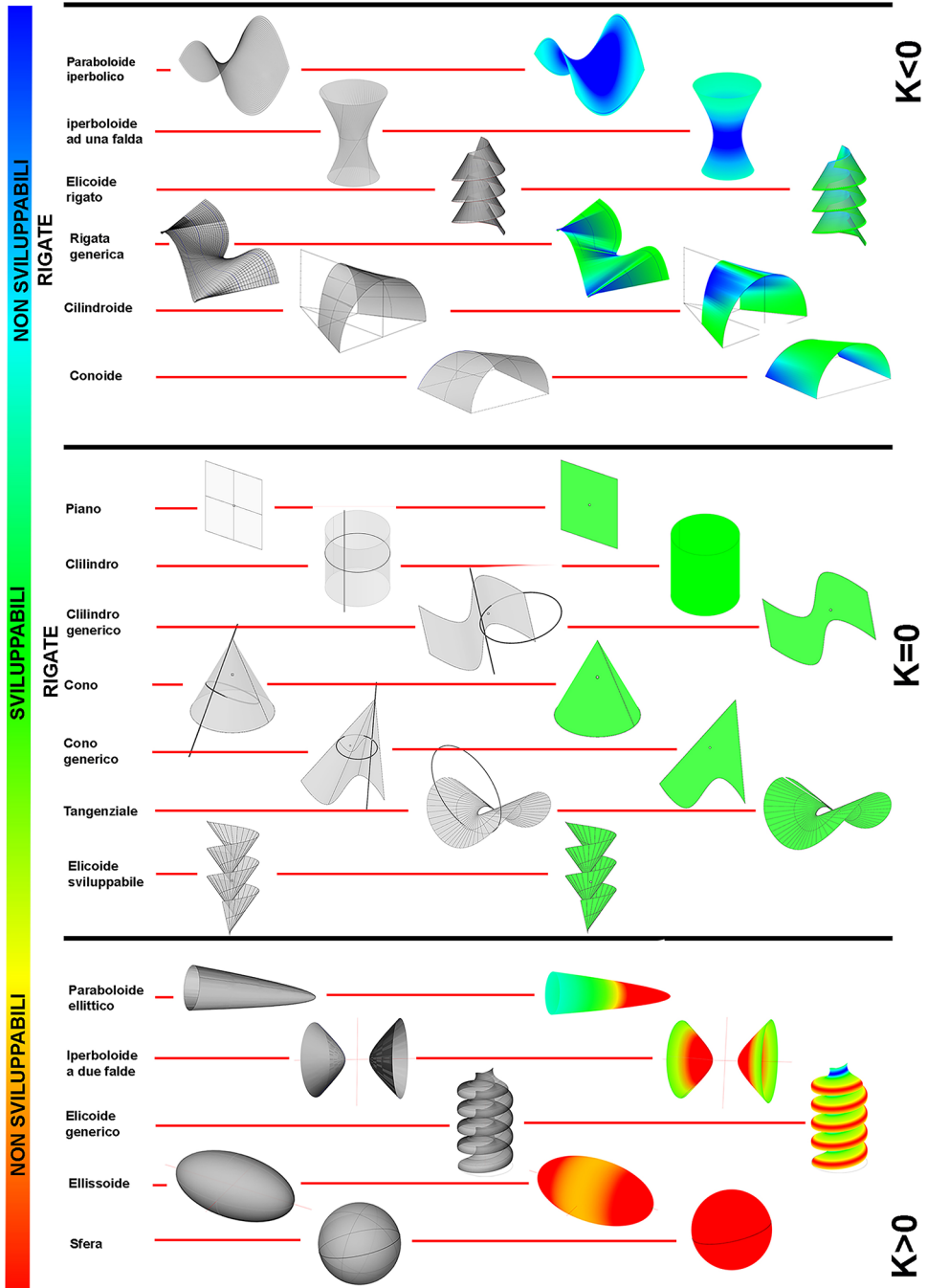
Fig.5/ Curvatura gaussiana negativa.

Fig.6/ Curvatura gaussiana nulla. Cono.

Fig. 7/ Curvatura gaussiana nulla. Cilindro.

⁵ Gauss J.F.C. 1902.

Dal piano alla superficie



2. La classificazione differenziale delle superfici

non tutte le rigate hanno curvatura nulla poiché la sezione rettilinea non è sempre una delle due sezioni principali.

Le superfici a curvatura nulla sono delle particolari superfici rigate dette *svilupabili*.

La curvatura gaussiana è una caratteristica intrinseca della superficie che si calcola in un punto P.

In particolare, un punto P può essere definito⁶:

- *ellittico*: quando le curvature principali hanno lo stesso segno;
- *parabolico*: quando una delle due curvature principali è nulla;
- *iperbolico*: quando le curvature principali hanno segno opposto;
- *ombelicale*: quando le curvature principali sono uguali.

Quindi, in altri termini, se tutti i punti di una superficie sono ellittici la curvatura gaussiana è *positiva*, se tutti i punti sono parabolici la curvatura Gaussiana è *nulla*, se tutti i punti sono iperbolici la curvatura gaussiana è *negativa*. Se i punti sono diversi, la curvatura gaussiana è variabile.

In ambiente VPL è possibile analizzare tutte queste caratteristiche della superficie, quindi disegnare i cerchi osculatori, definirne il raggio, conoscere il valore della curvatura gaussiana, della curvatura massima e della curvatura minima. La conoscenza di questi elementi consente di definire soluzioni progettuali soprattutto in relazione all'utilizzo dei materiali, come si illustrerà in seguito nelle applicazioni riportate in questo testo.

Curvatura gaussiana costante

La classificazione differenziale delle superfici in base alla curvatura gaussiana⁷ consente di definire alcune superfici particolari come le superfici a *curvatura gaussiana costante*.

Una superficie a curvatura costante è una superficie

Fig. 8/ A pagina precedente: classificazione differenziale delle superfici.

⁶ Cfr. Migliari R. 2009, p.149.

⁷ Cfr. Migliari R. 2009, p.144

Dal piano alla superficie

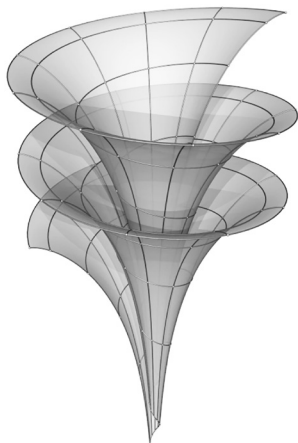
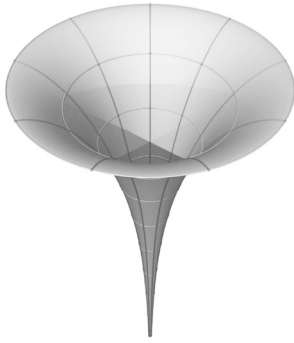


Fig. 9/ Superfici a curvatura costante. Superfici di rivoluzione: pseudosfera.

Fig. 10/ Superfici elicoidale: superficie di Dini.

che ha la stessa curvatura gaussiana in ogni punto. Solo alcune superfici chiuse hanno curvatura Gaussiana costante⁸.

In particolare si dimostra che:

- le uniche superfici chiuse con curvatura gaussiana costante positiva ($K > 0$) sono le sfere⁹;
- le uniche superfici chiuse con curvatura gaussiana costante nulla, $K=0$, sono i piani e i cilindri circolari¹⁰;
- non esistono superfici chiuse con curvatura gaussiana costante negativa $K < 0$ ¹¹, mentre esistono superfici a curvatura costante negativa aperte come ad esempio la *pseudosfera* (Fig.9) e la *superficie di Dini* (Fig. 10).

La *pseudosfera* è una particolare superficie di rivoluzione generata dalla rotazione di una *trattrice*¹² intorno al suo asintoto, la curvatura è opposta a quella di una sfera di raggio R ed è costante in ogni punto. La *superficie di Dini* è una superficie elicoidale generata dal moto elicoidale di una *trattrice*.

La caratterizzazione delle superfici a curvatura gaussiana costante è di notevole interesse nella geometria differenziale e nella teoria delle superfici, poiché fornisce un approccio per distinguere le diverse categorie di superfici in base alle loro caratteristiche intrinseche, fornendo una base per ulteriori studi e applicazioni in vari campi matematici e scientifici.

Curvatura media nulla: superfici minime

Una importante famiglia di superfici classificate in funzione della curvatura sono le *superfici minime*. In geometria differenziale, si definiscono *superfici minime* quelle superfici che hanno *curvatura media* uguale a zero in ogni punto. La *curvatura media* di una superficie è la media aritmetica delle due curvature principali, di conseguenza tutte le superfici minime, avendo curvatura media nulla, avranno curvatura gaussiana negativa.

In natura esempi di superfici minime si possono

⁸ Abate M. 2006.

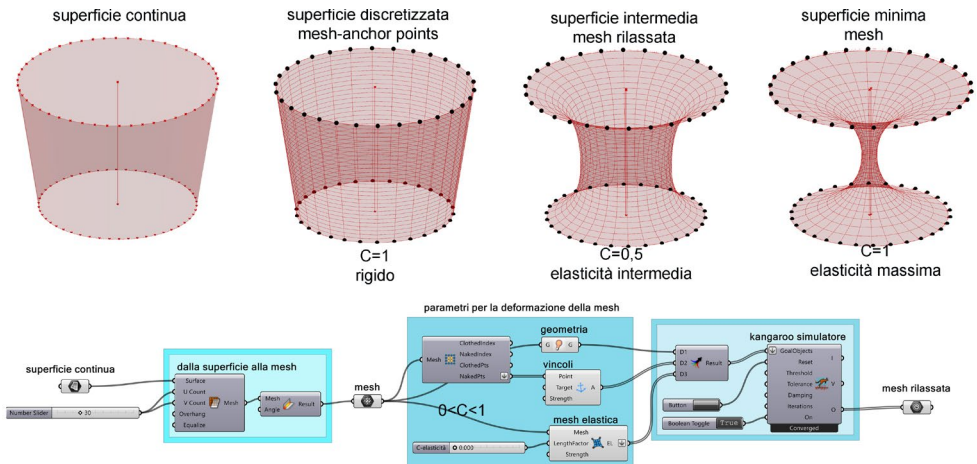
⁹ Teorema di Liebmann.

¹⁰ Teorema di Hartman-Nirenberg.

¹¹ Teorema di Hilbert.

¹² La *trattrice* è il luogo dei punti tali che il segmento della tangente in un punto qualunque, compreso fra il punto di contatto e l'intersezione con una retta fissa, ha lunghezza costante.

2. La classificazione differenziale delle superfici



ottenere facilmente immergendo nell'acqua saponata un telaio di una qualunque forma chiusa ed estraendolo delicatamente. Si dimostra che le bolle di sapone si dispongono spontaneamente sulle superfici minime perché la tensione superficiale della lamina saponata tende a ridurre l'estensione finché essa non si trova allo stato di energia minima. Negli anni '50 Frei Otto fonda gran parte dei suoi progetti per la costruzione di tensostrutture utilizzando modelli fisici realizzati con materiali elastici e soluzioni saponate. Il metodo, basato sul principio del *form-finding* sperimentato da Otto, ha come obiettivo quello di definire la geometria complessa con la minima superficie in funzione dei bordi assegnati.

Se la generazione delle superfici minime è, quindi, semplice ed immediata nella realtà, la definizione di tali superfici è un problema molto complesso dal punto di vista matematico¹³.

Il primo ad utilizzare le lamine per studiare le caratteristiche geometriche delle superfici minime fu Antoine Ferdinand Plateau che mise a punto una soluzione di sapone, acqua e glicerina con cui otteneva pellicole che duravano anche per molte ore. Plateau derivò molte delle leggi dall'osservazione

Fig. 11/ Superfici minime. Simulazione del processo per la generazione di una superficie minima da due bordi: 1. generazione della superficie 2. trasformazione della superficie in mesh 3. rendere elastica la mesh.

¹³ Wang. S. 2021.

Dal piano alla superficie

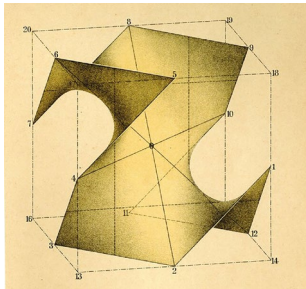
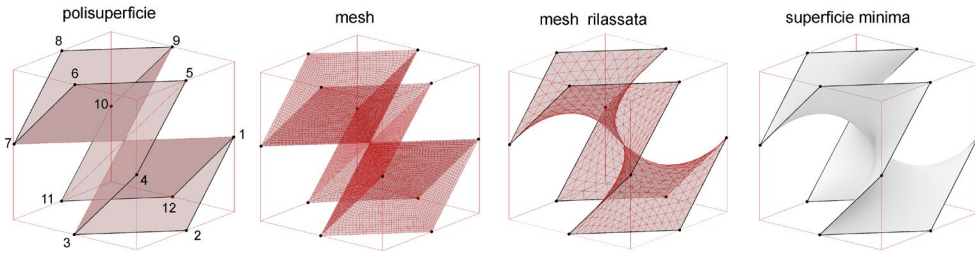


Fig. 12/ Superfici minima. Simulazione del processo di *form finding* per la generazione di una superficie minima da un bordo chiuso discontinuo.

Fig. 13/ Superficie minima di Schwarz minimal (Schwarz 1890).

14 Nel testo è stato utilizzato *Kangaroo*, un simulatore *Live Physics* per la ricerca di forme, l'ottimizzazione e la risoluzione dei vincoli in ambiente VPL. Lo strumento consente di simulare con il processo di *form-finding*, cioè la determinazione della forma geometrica in cui si raggiunge l'equilibrio tensionale. Cfr. Migliari R. 2009, p. 342. La superficie che si genera con questo processo approssima la superficie minima ideale, il livello di approssimazione dipende dalla discretizzazione e dal coefficiente di elasticità.

delle schiume dimostrando l'importanza della visualizzazione nei processi di conoscenza e di invenzione. Alla base della trattazione delle *superfici minime* vi è il noto problema di Plateau: data una o più curve chiuse nello spazio trovare (se esiste) tra tutte le superfici aventi come curve di bordo le curve assegnate quella che ha area minima.

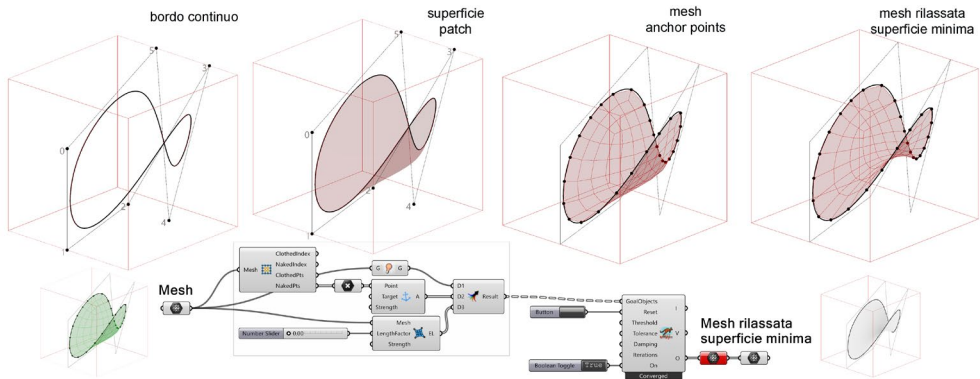
Tra le più note superfici minime notevoli si trovano, ad esempio, la *superficie minima di Costa*, il *giroide* e la *superficie di Enneper*.

La modellazione in ambiente VPL consente di simulare digitalmente il processo di *form finding* e quindi di generare e controllare queste particolari superfici anche assegnando arbitrariamente un bordo. L'approccio più diffuso che approssima meglio la superficie di area minima determinata matematicamente si ottiene costruendo una superficie topologia equivalente a partire dal bordo, discretizzando tale superficie in una *mesh* e riproducendo in ambiente digitale il comportamento elastico di un materiale tessile o di una soluzione saponata utilizzando un simulatore fisico⁴.

Anche in questo caso è possibile costruire un *modello ibrido* importando i bordi modellati digitalmente in modo tradizionale in ambiente VPL oppure definire l'intero processo secondo un approccio computazionale.

La superficie minima approssimata si ottiene deformando elasticamente la *mesh* di partenza. Considerando ad esempio due bordi circolari posti ad una

2. La classificazione differenziale delle superfici



distanza h si genera una qualsiasi superficie continua, ad esempio una *loft*. Si trasforma la superficie continua in una *mesh*, si definiscono i vincoli (gli *anchor points*), fissando n punti appartenenti ai bordi circolari e alla *mesh*, e, attribuendo a C , un valore $0 < C < 1$ si deforma elasticamente la *mesh*. C è il coefficiente che consente di gestire la deformazione della superficie, ponendo $C=0$ si ottiene la superficie che meglio approssima la *superficie minima*, ponendo $C=1$ la *mesh* non si deforma e ponendo $0 < C < 1$ si ottiene una *mesh* deformata ma non una superficie minima.

Analogo approccio si segue per definire una superficie minima a partire da un bordo chiuso discontinuo come la *superficie di Schwarz*¹⁵ oppure una qualsiasi curva continua chiusa.

Da un punto di vista metodologico è fondamentale definire la strategia che si utilizza per generare la polisuperficie di partenza, in funzione della natura della superficie, e come questa polisuperficie si discretizza in una *mesh* a cui si assegna un coefficiente di elasticità da cui dipende il livello di accuratezza, cioè quanto la superficie generata digitalmente si discosta dalla superficie minima generata utilizzando una soluzione saponata (Fig. 11).

Nel caso della *superficie di Schwarz* il bordo è una curva discontinua chiusa, la superficie iniziale uti-

Fig. 14/ Superfici minime. Modello in VPL per la generazione di una superficie da un bordo continuo definito parametricamente.

¹⁵ Schwarz H.A. 1890.

Dal piano alla superficie

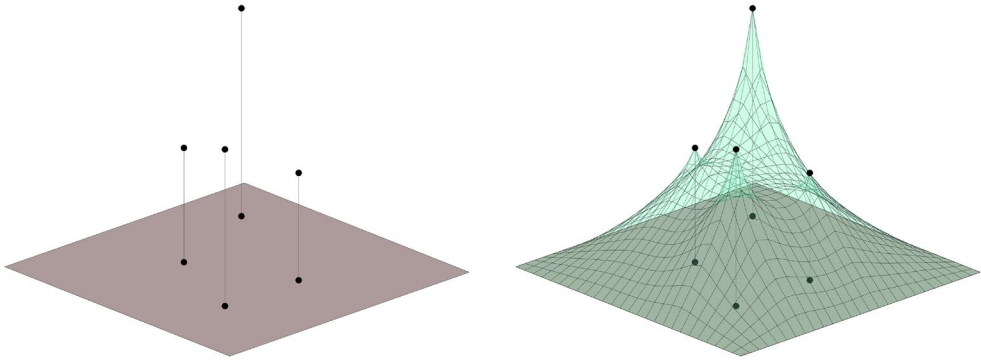


Fig. 15/ *Digital Form finding*. Superficie generata a partire da una forma piana assegnata.

lizzata è una polisuperficie che, trasformata in una *mesh* composta da quadrilateri, è stata resa elastica. Vincolando i punti sul bordo e ponendo $C=0$ la *mesh* si deforma elasticamente e assume una configurazione che approssima la superficie minima cercata (Fig. 12).

Analogo processo si può applicare per generare una superficie minima da un bordo continuo chiuso.

La superficie di partenza utilizzata, in questo caso, è una *patch* che, trasformata in una *mesh* con elementi quadrilateri e resa elastica, consente di generare la *mesh* che approssima la superficie minima cercata (Fig.14).

Lo stesso processo di *digital form-finding* può essere impiegato anche per generare superfici basate sul principio delle tensostrutture. In questo caso, i parametri utilizzati per generare la superficie sono la forma piana di partenza e i vincoli imposti.

Applicando forze in determinati punti della superficie e assegnando un coefficiente che controlla l'elasticità, si ottiene la superficie. Modificando la posizione dei punti di ancoraggio, è possibile generare diverse configurazioni della superficie tra cui il progettista potrà scegliere in funzione delle diverse esigenze e applicazioni (Fig. 15).

3 Le superfici sviluppabili

Le superfici con curvatura gaussiana nulla sono delle particolari rigate anche dette *sviluppabili*.

Per approfondire puntualmente il tema delle rigate fondamentale è il testo di Jean Pierre Nicholas Hachette, che classifica queste superfici in due categorie: le superfici *sviluppabili*, che ovviamente sono rigate, e le *rigate*, che per lo studioso francese sono tutte le altre rigate non sviluppabili¹.

I primi a studiare in modo sistematico le proprietà delle rigate sviluppabili in relazione ai principi della "geometria differenziale" sono Euler e Monge².

Entrambi propongono una generalizzazione della questione, pur non facendo mai esplicitamente riferimento ai concetti su cui tale classificazione si fonda, e non parlando mai né di cerchio osculatore né di piano osculatore.

Euler pone in modo esplicito il problema della sviluppabilità di una superficie. Nel *De solidis quorum superficiem in planum explicare licet* egli definisce

¹ Hachette J.N.P. 1828.

² Lawrence S. 2011, p.701.

Dal piano alla superficie

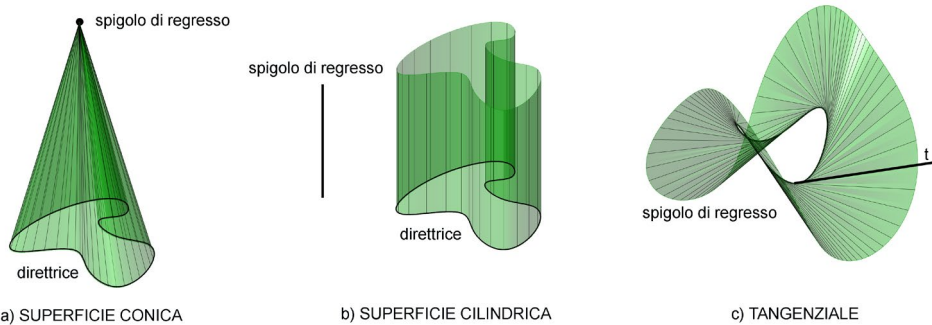


Fig. 1/ Superfici sviluppabili: classificazione.

le condizioni geometriche di una superficie affinché sia sviluppabile: «notissima è la proprietà dei cilindri e dei cono, per cui si può sviluppare la loro superficie sul piano, proprietà che si può estendere a tutti i corpi cilindrici e conici, purché abbiano come base una figura; al contrario», afferma Euler, «la sfera manca di questa caratteristica per cui, in nessun modo, la sua superficie si può rappresentare in piano...; da ciò nasce la domanda giustamente curiosa e degna di nota, esistono forse altri generi di corpi, oltre i cono e i cilindri, la cui superficie parimenti può essere rappresentata in piano, o no? Per la qual cosa in questa dissertazione ho posto questo problema: trovare un'equazione generale per ogni solido la cui superficie si può rappresentare in piano; alla cui soluzione in vari modi io mi sto per avvicinare»³. Partendo dalla ricerca delle condizioni che rendono sviluppabile una superficie, il principale merito di Euler è stato quello di aver messo chiaramente in relazione i principi della geometria analitica e della geometria differenziale⁴.

Ma è Monge che introduce in modo esplicito una nuova famiglia di superfici sviluppabili, aprendo questioni che ancora oggi sono alla base dei diversi approcci per la costruzione di forme complesse. Utilizzando il teorema che Monge illustra nel suo testo *Geometrie Descriptive*, per dimostrare il dominio di esistenza di una rigata generica⁵ egli defi-

³ Euler L. 1772, p.3.

⁴ Capone M. 2018.

⁵ Monge G. 1798, p. 130.

nisce una particolare classe di superfici generate da una retta che si muove lungo una curva sghemba restando tangente alla curva: tali superfici sono le *sviluppabili tangenziali*.

Basandosi sui contributi di Monge, Euler e Hachette si giunge, quindi, ad una definizione generale delle superfici sviluppabili che sono, ovviamente, tutte rigate e possono essere raggruppate in tre famiglie: *coniche*, *cilindriche* e *tangenziali* (Fig.1).

Le superfici sviluppabili sono caratterizzate dalla proprietà di poter essere distese su un piano senza deformazioni.

Il lavoro di Monge e dei suoi successori ha gettato le basi per l'approccio moderno allo studio di questa famiglia di superfici, che ha ampie applicazioni in diversi ambiti dall'ingegneria al design.

In una trattazione generale, la *svilupabile tangenziale* può essere considerata il caso generale, in cui la *direttrice*, detta anche *spigolo di regresso*, è una curva gobba qualsiasi, mentre le *superfici coniche* e le *superfici cilindriche* sono dei casi particolari in cui lo *spigolo di regresso* degenera in un punto proprio o improprio. Definite le diverse tipologie di superfici sviluppabili è fondamentale precisare il concetto di sviluppabilità.

Geometricamente una superficie è sviluppabile se può essere distesa su un piano utilizzando una trasformazione isometrica, senza strappi o sovrapposizioni. Questo concetto è immediatamente verificabile, anche empiricamente, per le superfici coniche e per le superfici cilindriche, mentre è sicuramente più complessa la verifica per una superficie tangenziale, così come è più complessa la determinazione del suo sviluppo. La domanda posta da Euler su quali superfici possono essere distese sul piano richiede una risposta sempre più pertinente. Si definisce così la regola geometrica che consentirà di passare dalla teoria alla prassi precisando quali superfici si

Dal piano alla superficie

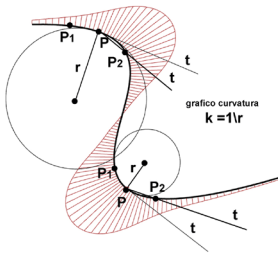


Fig. 2/ Il cerchio osculatore di una curva in un punto P è il cerchio che meglio approssima la curva in quel punto.

possono sviluppare e, soprattutto, come si può determinare lo sviluppo di una *tangenziale generica*. Teoricamente una rigata è sviluppabile se due generatrici infinitamente vicine si intersecano e quindi sono complanari. Ciò è evidente per le *superfici coniche*, in cui tutte le generatrici passano per un punto proprio, il vertice, e per le *superfici cilindriche* in cui tutte le generatrici sono parallele e, quindi, si intersecano in un punto improprio.

Nel caso della rigata tangenziale per dimostrarlo è necessario fare ricorso ai principi della geometria differenziale ed al concetto di limite e di derivata. La tangente ad una curva in un punto P, infatti, è la posizione limite che assume la retta PP_2 al tendere di P_2 a P. Una volta definita la tangente in un punto P ad una curva piana, che si dimostra essere unica, si definisce il concetto di curvatura e la definizione di *cerchio osculatore* introdotta da Leibniz⁶. Considerando, infatti, due punti P_1 e P_2 , prossimi a P, e la circonferenza passante per P_1PP_2 , come riportato in precedenza, si definisce *cerchio osculatore* quello che meglio approssima la curva al tendere di P_1 e P_2 a P (Fig.2).

Lo stesso ragionamento può essere esteso alle curve gobbe. Considerando la tangente t in un punto P della curva, la posizione limite della retta PQ, al tendere di Q a P, si definisce *piano osculatore* la posizione limite del piano passante per t e per un punto Q (al tendere di Q a P).

Si può anche dimostrare che le tangenti di una curva sghemba sono le intersezioni delle coppie dei piani osculatori consecutivi e, per questa ragione, le superfici sviluppabili si possono anche definire come l'involuppo del movimento di un piano nello spazio⁷. Pertanto, da un punto di vista teorico: le superfici sviluppabili sono tutte rigate, hanno curvatura gaussiana nulla, possono essere generate dal moto di una retta tangente ad una curva sghemba, posso-

⁶ Leibniz distingue i cerchi che toccano una data curva (*circulo curvam propositam tangente*) dal cerchio che bacia la curva e lo chiama *osculante*. Leibniz G.W. 1686, p. 326.

⁷ Per una trattazione ampia sulle rigate cfr. Fallavollita F. 2008, p. 111. Fallavollita F. 2009, p. 153.

no essere generate dall'involuppo del moto dei piani osculatori di una curva sghemba e quindi, in una superficie sviluppabile le due generatrici successive si possono sempre considerare incidenti.

Tutti gli studi fatti nel passato, qualunque sia stato l'approccio prevalente (quello geometrico sintetico, analitico o differenziale), si sono storicamente basati su intuizioni spaziali spesso poco o affatto rappresentate e quindi poco "visibili". In ambiente VPL è possibile "mostrare" governando contemporaneamente le diverse anime della geometria: quella geometrica descrittiva, quella analitica e quella differenziale.

A partire da questi assunti è stata messa a punto una sperimentazione basata sull'ibridazione dei vecchi principi e delle tradizionali metodologie con i nuovi strumenti di modellazione generativa, cercando di individuare approcci di ricerca in cui la conoscenza della geometria risulta essere sempre il fondamento per la soluzione di problemi complessi.

Costruzione e controllo delle tangenziali

La costruzione di una *superficie conica* o *cilindrica* non presenta particolari problematiche, assegnata una curva direttrice g e il vertice V (sia esso proprio o improprio) teoricamente si tratta di costruire n generatrici che congiungono V con gli n punti della direttrice.

Il modello digitale di una *superficie conica* o *cilindrica* si ottiene, quindi, semplicemente "estrudendo" la direttrice verso un punto proprio o in una direzione. Più complessa risulta, invece, la costruzione delle *tangenziali*.

Una *sviluppabile tangenziale* è una superficie generata dal moto di una retta tangente ad una curva gobba. Questa particolare famiglia di rigate può essere costruita utilizzando una sola curva direttrice, detta *spigolo di regresso*, poiché si dimostra che la

Dal piano alla superficie

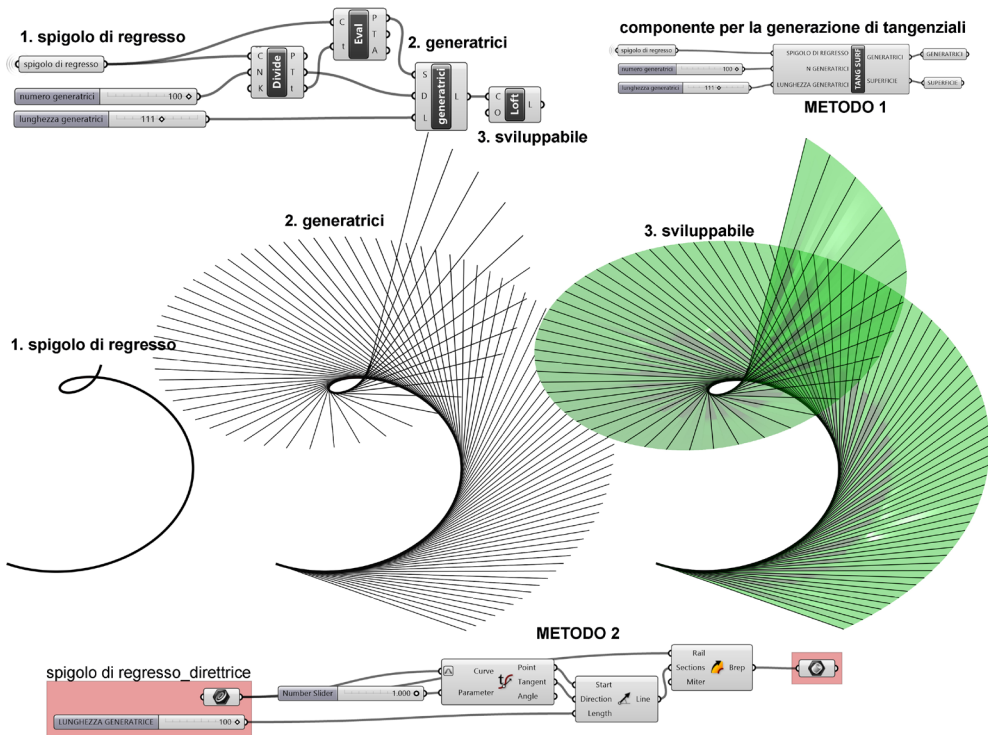


Fig. 3/ Script per la generazione di una tangenziale generica.

tangente ad una curva sghemba in un punto è sempre univocamente determinata⁸.

La costruzione di una retta tangente ad una qualsiasi curva gobba, che richiede una serie di procedimenti estremamente laboriosi con il metodo grafico tradizionale, è in ambiente digitale immediato, ciò semplifica anche la costruzione delle *tangenziali*.

Per costruire il *modello computazionale* sarà sufficiente assegnare lo *spigolo di regresso* e una qualsiasi tangente, oppure dividere lo spigolo di regresso e definire le *n* tangenti che generano la superficie (Fig.3). Lo strumento di analisi della curvatura gaussiana *k* consente di valutare il livello di approssimazione della superficie e, quindi, di verificare se la superficie così ottenuta è una *sviluppabile*.

La definizione di uno *script* in ambiente VPL, TANG SURF, che consente di generare infinite tangenziali inserendo come input lo *spigolo di regresso* e la

⁸ Migliari R. 2009, p. 160.

lunghezza della generatrice (Fig.3), è il punto di partenza per alcune delle sperimentazioni presentate in questo testo, basate proprio sull'utilizzo delle proprietà delle sviluppabili.

I parametri che consentono di controllare la superficie sono: lo *spigolo di regresso*, la lunghezza delle generatrici e le altre superfici che possono essere eventualmente utilizzate per definire la forma di progetto e, quindi, i bordi.

Le *tangenziali* possono essere classificate in relazione alla natura dello spigolo di regresso utilizzato per generarle in tre gruppi:

1. tangenziali generate da *curve luogo geometrico*;
2. tangenziali generate da *curve intersezione*;
3. tangenziali generate da *linee grafiche*.

Le tre classi riflettono le diverse modalità con cui le tangenziali possono essere costruite e generate. Queste classificazioni sono fondamentali per individuare l'approccio più appropriato in base alle esigenze specifiche del progetto.

Inoltre, l'appartenenza dello *spigolo di regresso* ad una o più superfici è un aspetto cruciale per definire i vincoli e le modalità che consentono di mettere in forma la superficie sviluppata.

Questo approccio consente al progettista di stabilire relazioni precise tra i diversi elementi geometrici e di garantire coerenza nel processo di progettazione. L'utilizzo di *linee grafiche* per generare tangenziali presenta, invece, sfide molto più complesse, poiché richiede la definizione di specifiche strategie per costruire forme composte da porzioni di tangenziali che non hanno nessuna relazione con specifiche superfici.

La comprensione delle proprietà geometriche delle *tangenziali* è essenziale per il controllo di queste particolari superfici che ne favorisce l'uso e consente ai progettisti di sfruttare appieno le potenzialità degli strumenti digitali.

Generazione dello spigolo di regresso

Le tangenziali sono superfici generate conducendo le tangenti a curve sghembe, *spigolo di regresso*, pertanto, il controllo di queste particolari superfici sviluppabili è strettamente connessa alla teoria delle curve⁹ e alle più complete formulazioni che a partire dai primi studi teorici consentono la definizione delle linee sghembe. In generale, una linea può essere considerata generata dal moto di un punto nello spazio: se il punto si muove nel piano la curva è piana, altrimenti è una linea sghemba o gobba.

La conoscenza delle proprietà notevoli delle curve ne ha sempre favorito l'utilizzo¹⁰ ed è il fondamento teorico per affrontare e risolvere problemi costruttivi nell'ambito dell'architettura e del design.

Le curve sghembe si possono raggruppare in tre diverse categorie: le *curve luogo geometrico*, le *curve intersezione* di due superfici e le *linee grafiche*.

Curve luogo geometrico

Una curva può essere definita *luogo geometrico* quando può essere descritta utilizzando una determinata legge di moto e sia nota l'equazione parametrica.

Il metodo descrittivo consente di definire una curva come la traiettoria di un punto ed è, quindi, il luogo geometrico di tutte le posizioni che assume successivamente nel piano e nello spazio un punto mobile che cambia posizione secondo una legge determinata e continua, dove per legge determinata si deve intendere quel complesso di condizioni sufficienti ad individuare il punto mobile in una qualunque delle posizioni che esso può occupare durante il moto¹¹.

Le curve luogo geometrico sono curve che possono essere descritte attraverso parametri e funzioni. La capacità di lavorare con le informazioni numeriche è un'abilità essenziale per gestire le forme che può essere complementare al metodo grafico

⁹ De Carlo L. 2009, p. 97.

¹⁰ Salvatore M. 2020.

¹¹ De Carlo L. 2009, p. 99.

3. Le superfici sviluppabili

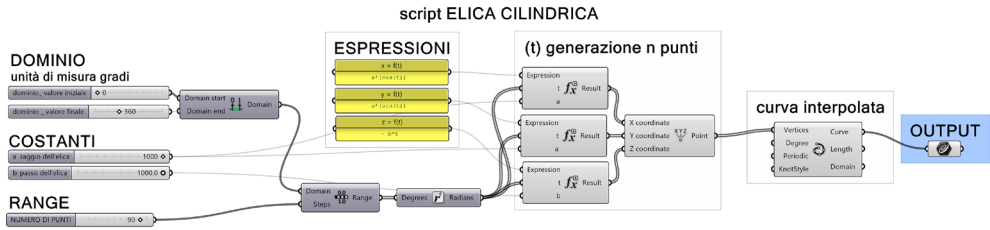


Fig. 4/ Curve luogo geometrico. Script per la generazione di un'elica cilindrica utilizzando le equazioni parametriche.

descrittivo tradizionale. L'approccio computazionale offre grandi opportunità di sperimentazione grazie alla possibilità di lavorare in un ambiente di programmazione visuale, VPL, in cui è possibile eseguire semplici operazioni matematiche, valutare condizioni, definire sequenze logiche, manipolare insiemi numerici e inserire funzioni matematiche.

Uno degli obiettivi è quello di dimostrare, attraverso casi studio, come questo approccio possa rendere più accessibili e utilizzabili concetti geometrici e matematici complessi, e come possa contribuire all'individuazione di soluzioni progettuali performanti basate su questi principi.

Nel caso specifico delle curve gobbe luogo geometrico, l'approccio computazionale offre la possibilità di definire *script*, utilizzando equazioni parametriche note, e controllare la geometria di queste forme utilizzando i principi matematici su cui la definizione di queste linee si fonda.

Generalmente una linea può essere espressa in forma cartesiana o in forma parametrica esprimendo le variabili (dipendenti o indipendenti) in funzione di uno o più parametri.

Una curva gobba è definita da tre equazioni parametriche che consentono di determinare le coordinate dei suoi punti (Fig.4).

Se si considera una curva gobba luogo geometrico, ad esempio l'elica cilindrica, ogni punto della curva è definito da tre coordinate che si determinano attribuendo i valori alla variabile indipendente t ,

nell'ambito di un dominio da definire, utilizzando la seguente funzione parametrica:

$$X(t) = a \cos(t)$$

$$Y(t) = a \sin(t)$$

$$Z(t) = b t$$

Dove: a e b , sono le costanti che definiscono rispettivamente il raggio del cilindro dell'elica e il suo passo, in particolare se $b > 0$, l'elica ha un verso orario, se $b < 0$ antiorario, e t , è la variabile.

Ogni punto dell'elica cilindrica è definito da tre coordinate che si determinano attribuendo i valori alla variabile indipendente t . Lo *script* consente di definire la curva interpolando n punti nell'ambito del dominio definito.

Gli input sono quelli che consentono di definire: il *Dominio* della variabile t , che in questo caso esprime il valore angolare, espresso in gradi o in radianti (per $0 < t < 2\pi$ la funzione rappresenta un periodo). Modificando il valore t , si modifica l'angolo in cui l'elica è definita. Se, ad esempio, si considera un angolo di 360° significa che l'elica ha compiuto un giro completo, se il valore è 720° , 2 giri, e così via (Fig. 4).

il *Range* definisce quanti punti verranno considerati nel dominio definito. Questo valore influisce sulla definizione della curva, più step ci sono nell'intervallo, migliore sarà l'approssimazione dell'elica. Questo approccio metodologico matematico è stato definito a scopo esemplificativo per l'elica ma può essere utilizzato per controllare una qualsiasi curva luogo geometrico di cui sia nota l'equazione.

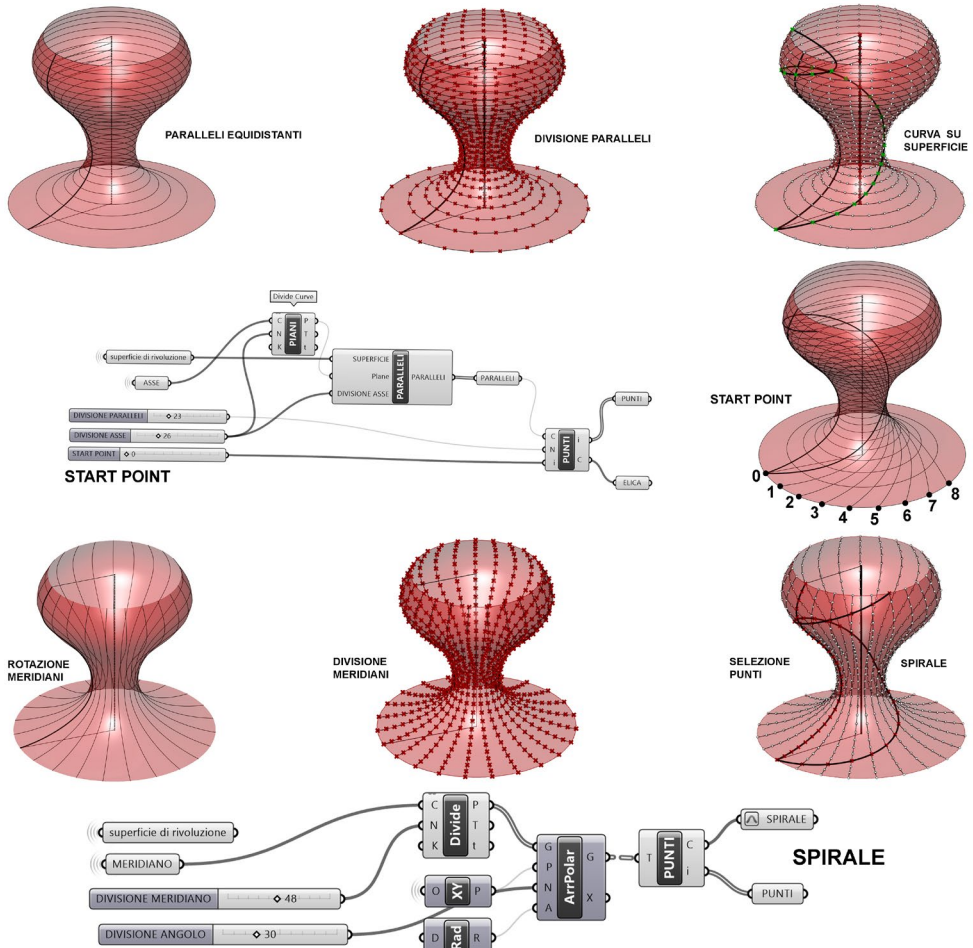
Linee su superfici

Le linee che si possono tracciare sulle superfici sono un tipico esempio di linee luogo geometrico, le cui proprietà notevoli ne hanno favorito l'utilizzo. Tra queste si possono individuare, ad esempio, le *eliche*, le *spirali sghembe*¹² e le *lossodromie* su superfici di

¹² De Carlo L. 2009, p. 126.

¹³ Baglioni L. 2009, p. 129.

3. Le superfici sviluppabili



rivoluzione¹³, le *isocurve*, le *linee di curvatura* e le *geodetiche*, per citare solo alcune di queste curve notevoli.

Da un punto di vista metodologico, utilizzando le linee su superficie per generare sviluppabili tangenziali si dispone di un elemento fondamentale per progettare il supporto della sviluppabile: la superficie a cui appartiene lo *spigolo di regresso*.

Le eliche, le spirali e le lossodromie godono di proprietà particolari quando le superfici a cui appartengono sono superfici specializzate (cilindro, cono e sfera).

Fig. 5/ Linee luogo geometrico: spirali sghembe su superfici di rivoluzione. Modello in VPL.

Dal piano alla superficie

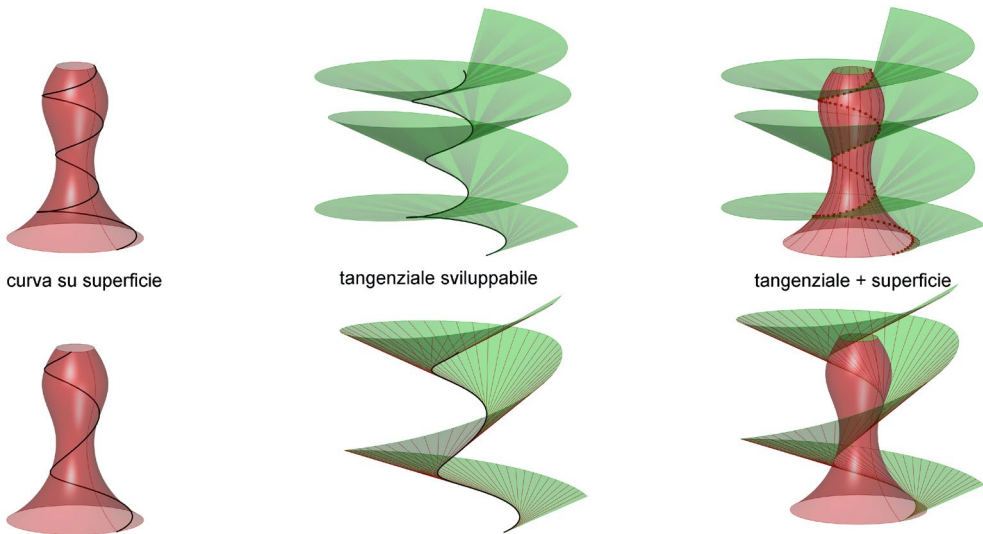


Fig. 6/ Tangenziali generate utilizzando come spigolo di regresso linee su superficie. La superficie si controlla modificando lo spigolo di regresso.

In questi casi, le curve si possono generare utilizzando lo stesso procedimento grafico descrittivo tramite VPL oppure definendo uno *script* basato sui principi matematici. In generale, da un punto di vista metodologico, si determinano n punti e si costruisce la curva interpolata imponendo l'appartenenza alla superficie. La curva sarà più accurata maggiore è il numero di punti utilizzato per la sua definizione.

La *spirale sghemba*, ad esempio, su una superficie di rivoluzione è la curva generata dal moto uniforme di un punto che si muove su un meridiano che ruota uniformemente intorno all'asse. Per costruire questa curva utilizzando il metodo grafico descrittivo si divide un meridiano in n parti e lo si ruoti di uno stesso angolo ($360/n$), collegando in successione i punti con una curva interpolata si ottiene *la curva luogo geometrico*.

Utilizzando le regole descrittive si possono costruire i modelli algoritmici che consentono di generare questa curva su qualsiasi superficie di rivoluzione.

Nel caso della spirale sarà sufficiente considerare m meridiani della superficie, dividere i meridiani in n parti e selezionare i punti in sequenza. Al variare

3. Le superfici sviluppabili

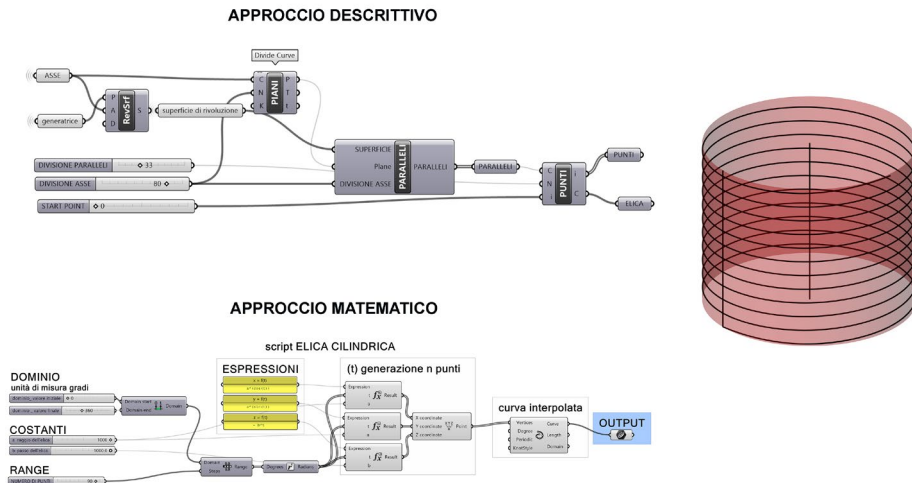


Fig. 7/ Confronto tra il metodo matematico e il metodo descrittivo per la costruzione di un'elica cilindrica.

di m , numero di meridiani per ogni periodo, e di n , numero di punti sul meridiano, si ottengono le varianti della curva sulla superficie (Fig. 5).

Utilizzando queste curve su superficie come *spigolo di regresso* si possono generare infinite sviluppabili, gli input dello *script* sono, in questo caso, il meridiano che determina la forma della superficie e i valori di m ed n (costanti) che determinano la forma della curva gobba (Fig. 6).

La definizione algoritmica utilizzata per generare questa curva sghemba su una generica superficie di rivoluzione si specializza nel caso particolare dell'*elica conica* e dell'*elica cilindrica*. Infatti si può verificare confrontando l'approccio matematico con quello sintetico descrittivo che l'*elica cilindrica* coincide con la *lossodromia* e con la *spirale*¹⁴.

Da un punto di vista metodologico questo consente di dimostrare la possibilità di utilizzare processi diversi per generare la stessa curva quando ne sia nota l'equazione parametrica (Fig.7).

Quindi, nel caso in cui lo *spigolo di regresso* sia un luogo geometrico, il controllo della superficie dipen-

¹⁴ Baglioni L. 2009, p. 129.

Dal piano alla superficie

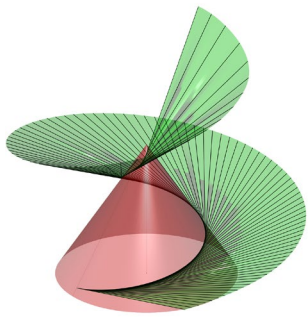
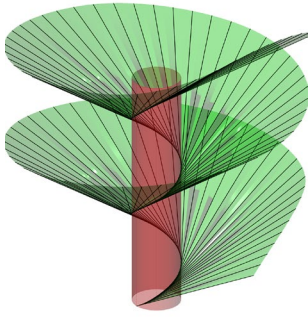


Fig.8/ Elicoide sviluppabile controllato in ambiente VPL attraverso lo spigolo di regresso.

de dai parametri che si utilizzano per generare la curva e la tangenziale si specializza. In questi casi la superficie gode di specifiche proprietà la cui conoscenza potrà essere utilizzata per progettare la costruzione della forma fisica.

Se, ad esempio, lo *spigolo di regresso* è un'elica conica o cilindrica la superficie generata è un *elicoide sviluppabile* la cui natura è strettamente connessa con quella dell'elica (Fig. 8).

Intersezioni

Tra le curve sghembe sicuramente rivestono un ruolo fondamentale per il controllo del progetto le linee generate dall'intersezione di due superfici.

Queste linee, la cui determinazione con il metodo grafico tradizionale imponeva procedimenti estremamente lunghi e laboriosi, si determinano banalmente in ambito digitale poiché la soluzione analitica consente l'immediata visualizzazione della curva.

Si riportano alcuni possibili casi che, a scopo esemplificativo, consentono di definire un approccio metodologico utile per valutare le diverse potenzialità di queste *linee intersezione*.

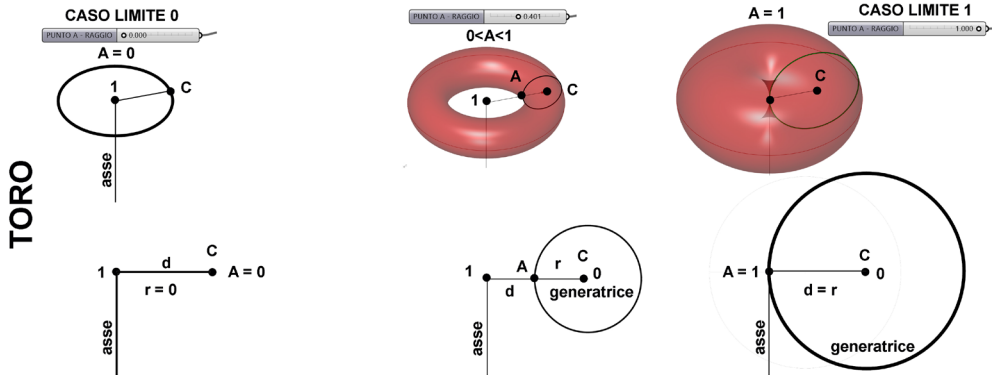
La conoscenza delle proprietà geometriche delle superfici utilizzate per determinare la *linea intersezione* è uno dei presupposti fondamentali per gestire il processo, per individuare i parametri che consentono di variare la posizione reciproca delle due superfici e, quindi, la linea di intersezione.

Tali parametri dipendono, ovviamente, dalla natura delle superfici.

Intersezione toro e sfera

Se si considera, ad esempio, l'intersezione generata tra un *toro* e una *sfera* il punto di partenza per definire il processo è l'individuazione dei parametri fondamentali per generare le due superfici in base

3. Le superfici sviluppabili



ai quali si possono definire i parametri utilizzabili per gestire la posizione di una superficie rispetto all'altra e, quindi, le diverse tipologie di intersezione.

Nel caso in esame, la *sfera* è il luogo geometrico di tutti i punti equidistanti da un punto detto centro, pertanto i parametri di riferimento sono la posizione del centro e il raggio, mentre il *toro* è una superficie generata dalla rivoluzione di una circonferenza esterna all'asse. Le due superfici sono entrambe superfici a doppia curvatura positiva non sviluppabili. Il modello parametrico del *toro* si può costruire in modo che, fissata la distanza d del centro C della circonferenza generatrice rispetto all'asse (punto 1), si definisce l'intervallo in cui il raggio può variare senza intersecare l'asse (Fig. 9).

Si definiscono, quindi, due configurazioni limite:
caso limite 0 - *A coincide con 0*: il raggio è nullo, la circonferenza si riduce ad un punto ed il *toro* ad una circonferenza;

caso limite 1 - *A coincide con 1*: il raggio è uguale a d e la circonferenza è tangente all'asse.

Fissata la posizione del centro C rispetto all'asse, il raggio della generatrice del *toro* si definisce in funzione della posizione del punto A nell'intervallo $0 < A < 1$ (Figg. 9 e 10).

Per gestire le diverse posizioni della *sfera* rispetto

Fig. 9/ linee intersezione: toro\sfera. Processo esemplificativo per controllare l'intersezione di due superfici non-tevoli.

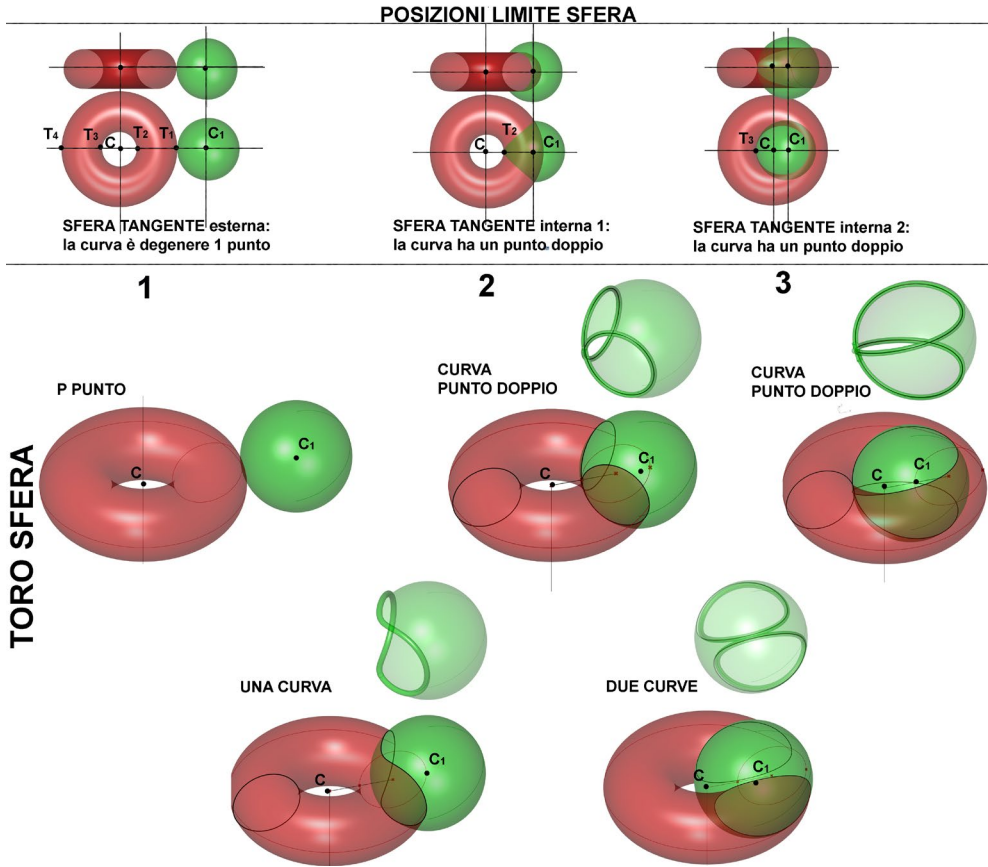


Fig. 10/ Linee intersezione: toro\sfera. Processo esemplificativo per controllare l'intersezione di due superfici tevoli.

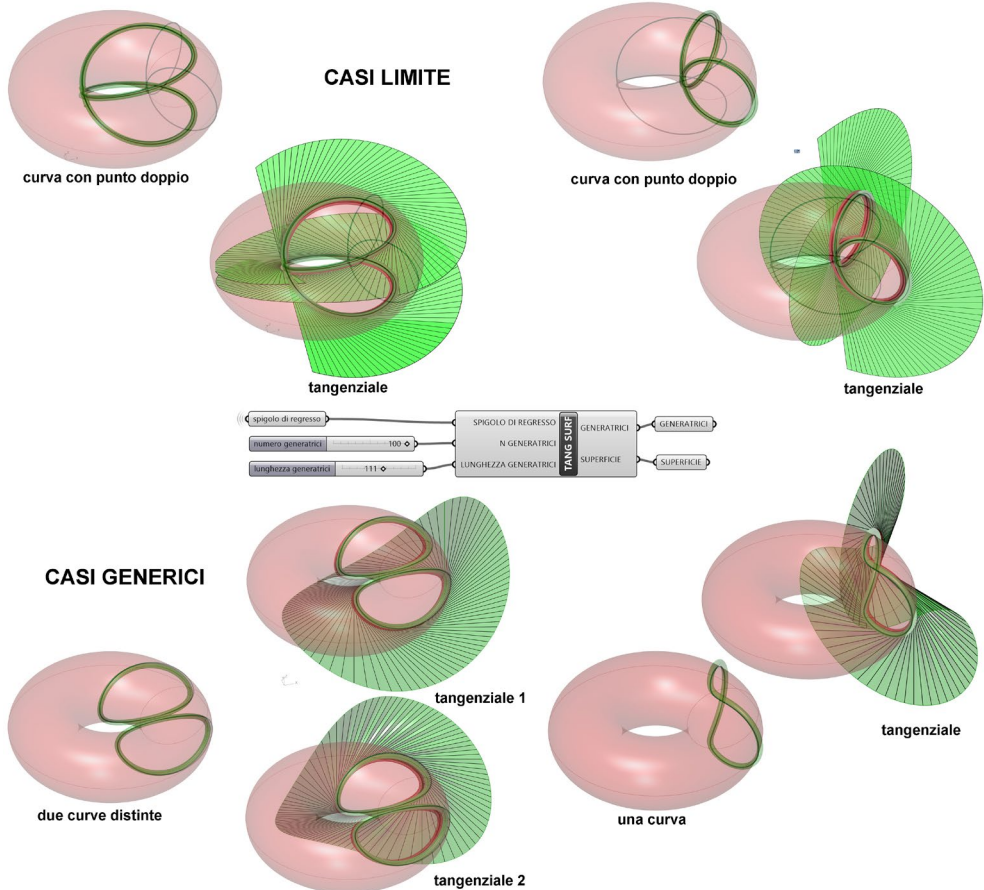
al *toro* si possono definire alcuni casi particolari imponendo specifiche condizioni geometriche che consentono di controllare le diverse tipologie di intersezione.

Ad esempio, imponendo che il centro C della generatrice del *toro* e il centro C_1 della *sfera* appartengono ad una retta ortogonale all'asse, si definiscono le posizioni limite e gli intervalli di variazione. Assegnato un *toro* di centro C e raggio r , la posizione della *sfera* rispetto al *toro* si definisce in funzione dello spostamento del centro C_1 sulla retta ortogonale all'asse passante per C .

In particolare la *sfera* rispetto al *toro* può essere:

1. Tangente esternamente in un punto T_1 ;

3. Le superfici sviluppabili



2. Tangente internamente nel punto T_2 , la sezione è una curva con un punto doppio in T_2 ;
 3. Tangente internamente nel punto T_3 , la sezione è una curva con un punto doppio in T_3 ;
 4. Tangente internamente nel punto T_4 , la sezione è una curva con un punto doppio in T_4 .
- Nella posizione limite T_1 la *sfera* interseca il *toro* solo nel punto T_1 , l'intersezione è una curva degenera che coincide con T_1 , nelle posizioni limite T_2 , T_3 e T_4 la *sfera* è tangente al *toro* e l'intersezione è una curva con un punto doppio.
La *sfera* si può spostare in direzione ortogonale all'asse dalla posizione limite T_1 alla posizione T_4 as-

Fig. 11/ Generazione di una sviluppabile tangenziale utilizzando come spigolo di regresso una curva intersezione. La tangenziale si controlla in ambiente VPL modificando la posizione reciproca delle due superfici.

Dal piano alla superficie

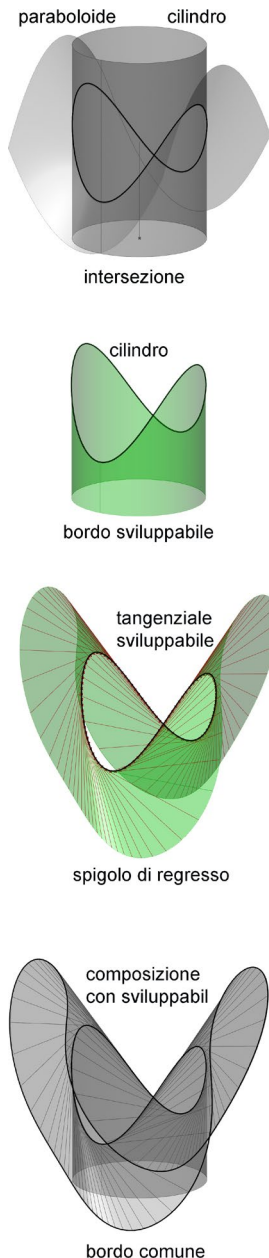


Fig. 12/ Possibili soluzioni compositive: la linea di intersezione può essere utilizzata per definire il bordo del cilindro, per generare una sviluppabile tangenziale o come connessione delle due superfici.

sumendo delle posizioni intermedie, in particolare quando si sposta nell'intervallo tra T_1 e T_2 l'intersezione è una curva continua chiusa, negli intervalli tra T_2, T_3 e T_3, T_4 l'intersezione è invece composta da due curve distinte (Fig. 10).

Il caso analizzato è la base per definire un approccio metodologico utile per controllare l'intersezione di due superfici luogo geometrico. Questo processo può essere applicato in generale per gestire la variazione e controllare la forma dell'intersezione tra due superfici. A tal scopo sono state individuate le fasi fondamentali che si riportano schematicamente:

1. Analisi delle caratteristiche geometriche delle due superfici: questa fase implica lo studio approfondito delle proprietà geometriche e delle caratteristiche delle due superfici coinvolte. È importante comprendere la loro forma, la curvatura, le intersezioni e altri aspetti rilevanti.

2. Individuazione delle variabili per definire i diversi casi: Identificare le variabili e i parametri che influenzano l'intersezione tra le superfici. Queste variabili possono includere angoli, distanze, orientamenti e altre caratteristiche che determinano le diverse situazioni possibili.

3. Individuazione delle posizioni limite per ciascuno dei casi individuati: determinare le posizioni limite o le configurazioni estreme che possono verificarsi per ciascun caso identificato.

4. Definizione del modello parametrico per gestire la variazione: strutturare un modello parametrico per gestire in modo dinamico la variazione dei parametri e delle variabili identificate e per visualizzare la generazione della superficie tangenziale.

Applicando questo approccio metodologico, i progettisti possono ottenere un maggiore controllo sull'intersezione delle superfici e possono esplorare diverse soluzioni per la costruzione della superficie tangenziale in modo sistematico (Fig.11).

Intersezione paraboloidi iperbolico cilindro/cono

Come evidenziato in precedenza, la curva intersezione dipende dalla geometria delle due superfici e dalla posizione reciproca, quindi da un punto di vista metodologico il processo si basa su questo principio fondamentale.

Nel caso in cui una delle due superfici che generano la linea sghemba utilizzata come *spigolo di regresso* sia una superficie sviluppabile, tale linea può anche essere utilizzata come bordo di una superficie di progetto o come supporto della tangenziale.

Considerando, ad esempio, l'intersezione tra un *cilindro circolare* e un *paraboloidi iperbolico* tale curva sghemba può essere utilizzata come bordo del cilindro, come spigolo di regresso per generare una tangenziale sviluppabile oppure come bordo comune alle due superfici e quindi come connessione (Fig. 12).

Linee grafiche

Le linee *luogo geometrico* sono descrivibili attraverso le regole geometriche che ne definiscono l'esistenza e sono espresse attraverso una formulazione matematica che consente di definire l'insieme di tutti i punti dello spazio che godono di una determinata proprietà¹⁵.

Al contrario una *linea grafica*, o libera, non può essere espressa con una regola geometrica né da una formulazione matematica unica. La rappresentazione di una *linea grafica* si basa sul concetto di discretizzazione e approssimazione. La curva ideale composta da infiniti punti viene rappresentata utilizzando un numero finito n di punti ed è il risultato di una concatenazione di curve che meglio l'approssima¹⁶.

Questi tratti di curva possono essere funzioni di primo grado, in tal caso la curva è una *polilinea*, possono essere archi di circonferenza, in tal caso la curva

¹⁵ Per una trattazione approfondita sulle linee grafiche cfr. Valenti M.G.2022, p.88.

¹⁶ Valenti M.G.2022, p.90.

NURBS 2D PUNTI DI CONTROLLO SUI LATI

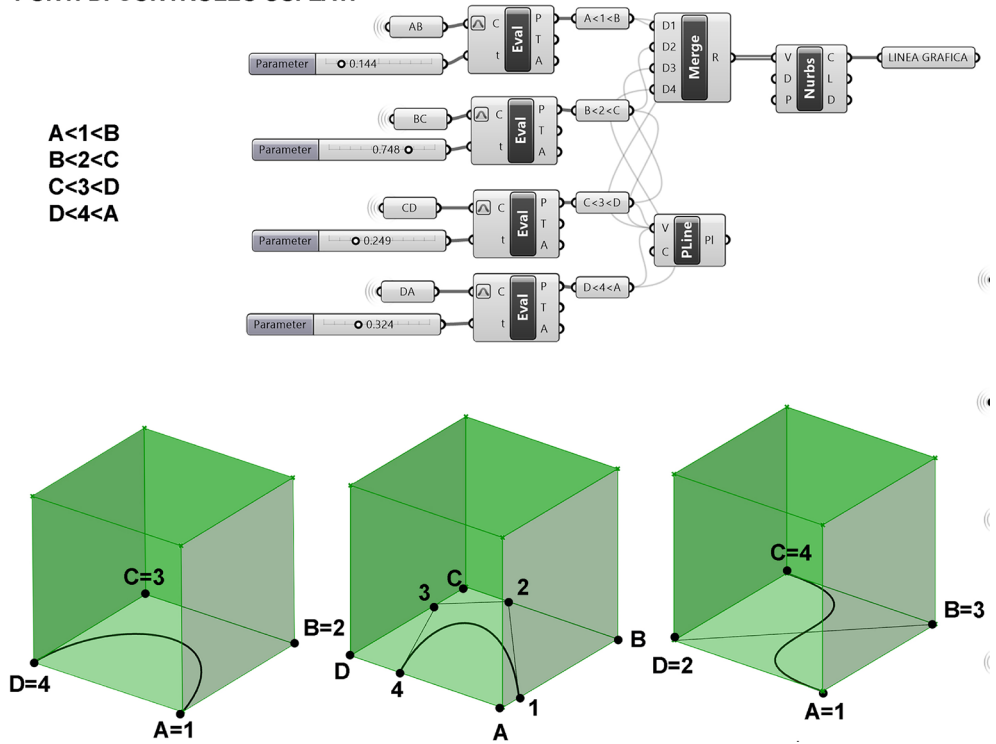


Fig. 13/ Linee grafiche. Diverse modalità di controllo di una linea grafica 2D.

17 Il concetto matematico di grado si può anche esprimere per via sintetica considerando nel piano una retta che attraversa la curva (se l'intersezione è 1 la curva è di 1° se sono due di secondo) analogamente nello spazio si considera l'intersezione con un piano (se l'intersezione è una, la curva è di primo grado, 2 di secondo, 3 di terzo ...). Per approfondimenti cfr. Salvatore M. 2019, p.80.

18 Cfr. Valenti M.G. 2021, p.94.

19 Cfr. Valenti M.G. 2021, p.112.

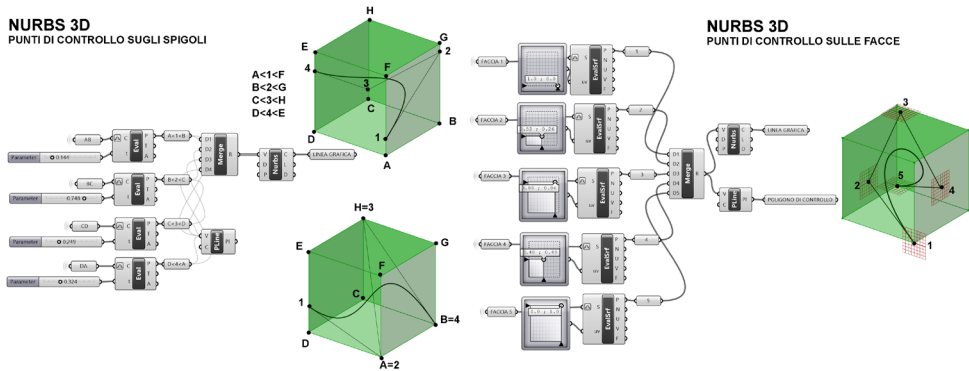
è una *poli-centrica*, oppure altre curve di secondo grado nel piano e di terzo grado o di grado superiore nello spazio¹⁷.

I primi algoritmi come quello di Bèzier, di Casteljaeu e di Hermite tendono ad individuare una serie di problematiche essenzialmente connesse al controllo della curva che hanno portato allo sviluppo della definizione di curva *NURBS* (*Non Uniform Rational B-Spline*)¹⁸.

Le curve *nurbs* possono essere generate come interpolate, assegnando n punti per cui la curva approssimata passa, oppure assegnando il poligono dei punti di controllo¹⁹. In questo caso le *nurbs* non passano per i punti assegnati.

Per comprendere come modellare e gestire una curva *nurbs* in ambiente VPL è necessario capire

3. Le superfici sviluppabili



come il poligono dei punti di controllo può essere gestito parametricamente. Da un punto di vista metodologico, riprendendo alcuni principi fondamentali per il controllo delle *linee grafiche* è stato definito uno *script* con l'obiettivo di costruire uno strumento utilizzabile dal progettista.

In particolare è noto che una curva *nurbs*²⁰: passa per il primo e l'ultimo lato del poligono di controllo; è tangente al primo e all'ultimo lato del poligono di controllo; è una *polilinea* che coincide con il poligono dei punti di controllo se il grado è 1 e si allontana dal poligono maggiore è il grado della curva; è sempre contenuta all'interno del poligono convesso; si può trasformare utilizzando il poligono dei punti di controllo.

Per comprendere e sperimentare le diverse possibilità di generare una curva *nurbs* piana, si consideri, ad esempio, un rettangolo ABCD i punti del poligono di controllo possono variare sui lati del rettangolo, i parametri sono i lati del rettangolo il numero dei punti di controllo, la posizione e, ovviamente l'ordine con cui i punti di controllo possono essere collegati (Fig. 13).

Analogamente si può costruire una *nurbs* sghemba, considerando un parallelepipedo che la contiene. I punti di controllo possono variare sugli spigoli del parallelepipedo o sulle facce. Anche in questo caso

Fig. 14/ Controllo di una linea grafica 3d in ambiente VPL.

²⁰ Cfr. Valenti M.G. 2022, p.112.

Dal piano alla superficie

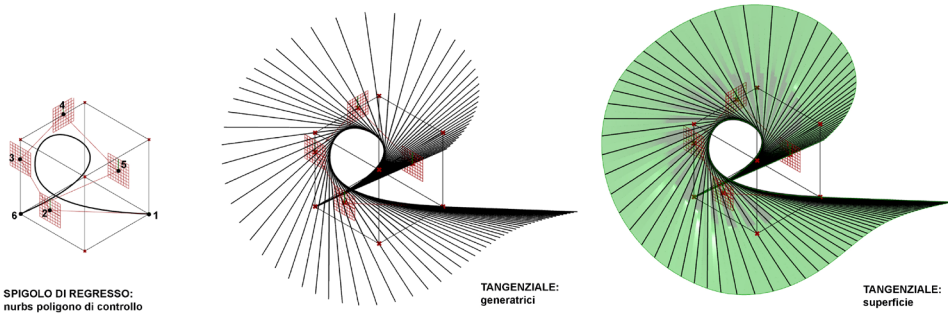


Fig. 15/ Costruzione di una tangenziale utilizzando come spigolo di regresso una linea grafica. La tangenziale si controlla in ambiente VPL modificando la linea grafica.

i parametri sono la geometria del parallelepipedo (rettangolo di base e altezza) il numero la posizione dei punti del poligono di controllo (Fig. 14).

Ulteriore variabile è rappresentata dal grado della *nurbs*²¹ che definisce i tratti di curva che la compongono.

Utilizzando questa linea come spigolo di regresso si può controllare interattivamente la tangenziale (Fig. 15).

Obiettivo è ancora una volta quello di sperimentare metodi e strumenti per gestire e modellare le superfici in modo dinamico. Questo approccio consente al progettista di influenzare direttamente la forma della tangenziale e di adattarla alle specifiche esigenze del progetto.

Una volta definita la *linea grafica* come spigolo di regresso, è possibile utilizzare un processo generativo per progettare eventuali supporti o strutture che possano essere necessari per sostenere e mettere in forma la superficie. In definitiva, questo processo può essere guidato dai parametri del modello e dalla geometria della tangenziale stessa, consentendo di definire supporti che si adattano alla forma della superficie in modo funzionale.

²¹ Cfr. Valenti M.G. 2021, p.106.

Sviluppo e “spianamento” approssimato delle superfici 4

Superfici sviluppabili

Le superfici *sviluppabili* possono essere costruite con un materiale flessibile e non deformabile a partire dal loro sviluppo, mettendo in forma la sagoma tagliata che deve, pertanto, essere definita.

Questi vantaggi evidenti, soprattutto in termini di fabbricabilità, hanno favorito la diffusione di queste tipologie di superfici in diversi ambiti.

Come riportato precedentemente, una superficie è sviluppabile se può essere distesa su un piano con movimenti rigidi, senza rotture o sovrapposizioni: ciò è possibile se e solo se due generatrici consecutive sono complanari e, quindi, incidenti nel punto di contatto con la direttrice: lo *spigolo di regresso*¹.

Si possono ottenere diverse sviluppate di una stessa superficie che dipendono dal piano scelto come riferimento per effettuare l'operazione di sviluppo e dal taglio previsto, nel caso la superficie sia chiusa.

Come è stato evidenziato in precedenza, le superfici

¹ Cfr. Fallavollita F. 2009, p.213.

Dal piano alla superficie

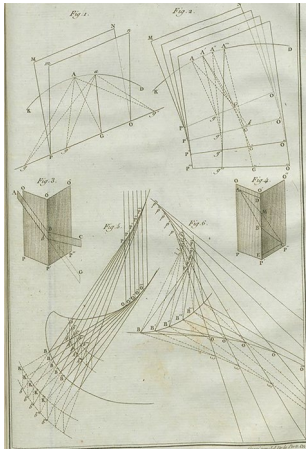


Fig. 1/ Gaspard Monge, 1780.

sviluppabili possono essere considerate tutte tangenziali. Le superfici cilindriche e le superfici coniche rappresentano casi particolari in cui lo *spigolo di regresso* degenera in un punto proprio, nel caso delle superfici coniche, e improprio, nel caso delle superfici cilindriche.

Utilizzando il metodo tradizionale introdotto da Monge², per determinare lo sviluppo di una superficie cilindrica si divide in n parti la direttrice e si ottiene una superficie poliedrica che, al limite (al tendere di n all'infinito), coincide con la superficie cilindrica. Distendendo le n facce quadrilatera in sequenza su un piano si ottiene lo sviluppo della superficie cilindrica.

Analogamente, le superfici coniche possono essere considerate delle sviluppabili specializzate nelle quali lo spigolo di regresso è un punto proprio. Ne deriva che tutte le generatrici sono incidenti in tale punto. Quindi due generatrici consecutive, comunque considerate, sono sicuramente incidenti.

Per definire lo sviluppo di una superficie conica si procede in modo analogo, si suddivide la direttrice in n parti e si trasforma la superficie continua in una superficie poliedrica.

Distendendo le n facce triangolari in sequenza su un piano si ottiene lo sviluppo della superficie che sarà meglio approssimata al tendere di n all'infinito.

In ambiente digitale tutti i software³ si servono di algoritmi ben definiti che consentono di sviluppare automaticamente sia le superfici coniche sia quelle cilindriche, tali algoritmi non consentono, però, di sviluppare le tangenziali generiche (Fig.2).

Per definire lo sviluppo di una tangenziale generica Monge utilizza i principi del calcolo differenziale. Ogni sviluppabile può essere distesa sopra un piano senza deformazioni e, in una regione limitata, senza sovrapposizioni. La sviluppata della superficie generata dalle infinite tangenti ad una curva sghemba

² Monge G. 1780, p.382.

³ Ad esempio, con il comando *Unroll, Rhinoceros* consente di sviluppare le superfici sviluppabili. Si sviluppano automaticamente superfici coniche, superfici cilindriche e strisce ottenute assegnando due direttrici. Si presentano alcuni problemi per sviluppare una tangenziale generica, nonostante sia una superficie sviluppabile.

4. Sviluppo e “spianamento” approssimato delle superfici

si ottiene considerando n generatrici e sviluppando nel piano i tratti di superficie compresi tra due generatrici consecutive. Teoricamente, per ottenere lo sviluppo della superficie, si considerano due tangenti consecutive t_1, t_2 (Fig. 3) che si possono considerare incidenti in un intervallo infinitesimo e che quindi individuano un piano. Facendo ruotare t_2, t_3 intorno a t_2 , e ripetendo l'operazione per tutti i tratti successivi si ottiene lo sviluppo della superficie. La forma dello sviluppo dipende dallo *spigolo di regresso* e dalle curve di bordo.

Le sviluppabili tangenziali si specializzano quando lo *spigolo di regresso* è una curva luogo geometrico di cui sono note le caratteristiche geometriche e la formulazione matematica, questa conoscenza può semplificare notevolmente la determinazione della sviluppata.

Sviluppata di una tangenziale generica

Per determinare lo sviluppo delle tangenziali generiche è necessario applicare i principi della geometria differenziale poiché due generatrici successive si possono considerare incidenti solo quando l'intervallo considerato è infinitesimo.

Gli algoritmi esistenti non consentono di definire il corretto sviluppo di una tangenziale qualsiasi, pertanto l'obiettivo è stato quello di definire uno *script* utilizzabile per risolvere questo problema. Questo approccio mira a fornire una soluzione adattabile e replicabile che possa essere utilizzata in diverse situazioni.

Per definire il processo computazionale sono stati individuati due possibili procedimenti che differiscono nell'approssimare il quadrilatero sghembo con uno o due triangoli adiacenti.

Dopo aver testato entrambi i procedimenti e confrontato i risultati, è stato possibile valutare quale dei due approcci produce lo sviluppo che meglio

Dal piano alla superficie

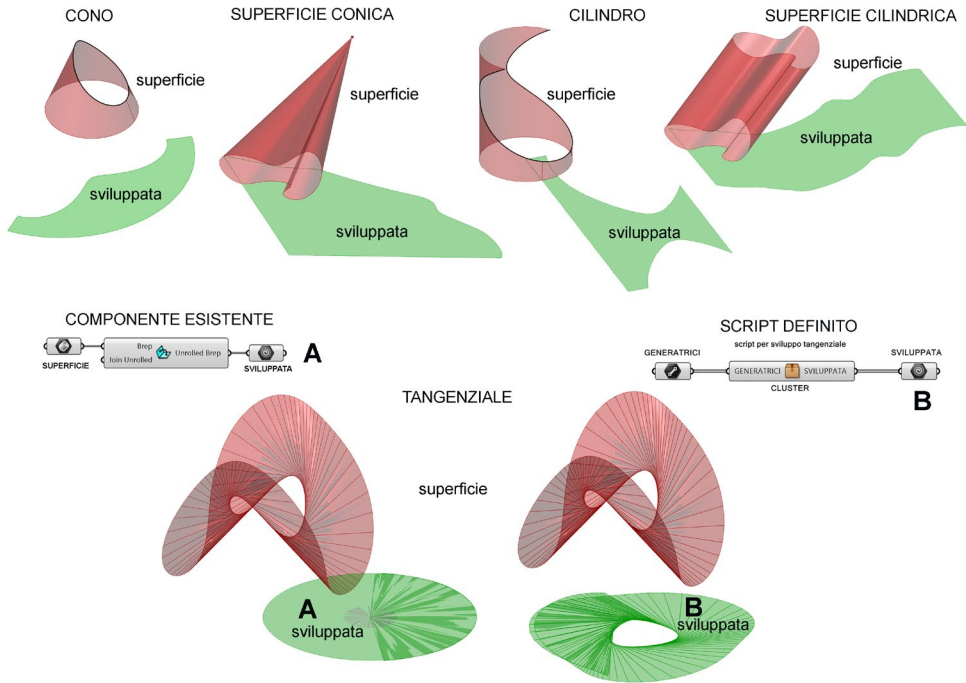


Fig. 2/ Determinare la sviluppata in ambiente VPL. Algoritmi per lo sviluppo di superfici coniche, cilindriche e tangenziali.

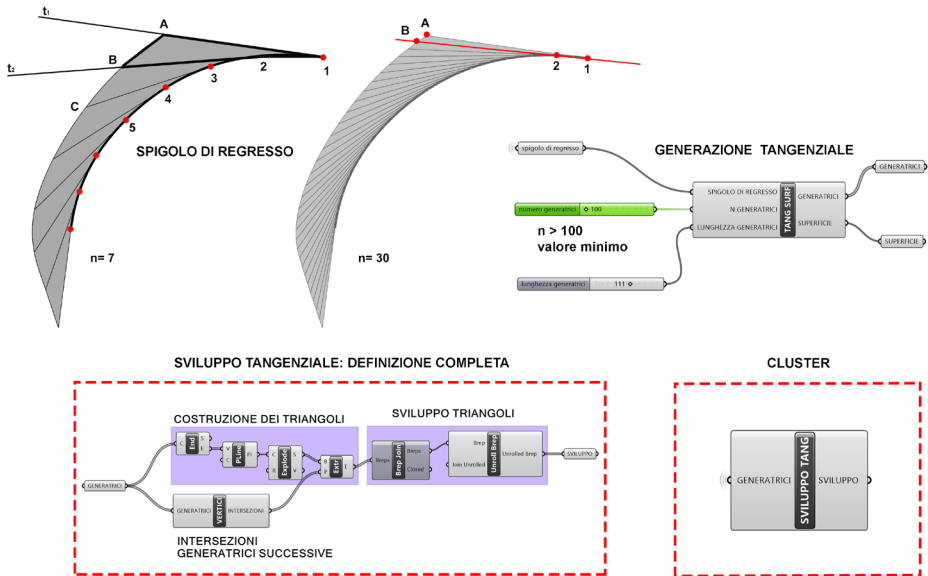
approssima la superficie. Questo confronto consente di determinare quale procedimento è più adatto alle esigenze specifiche del progetto, tenendo conto di fattori come precisione, complessità computazionale e facilità di implementazione.

Metodo 1

Entrambi i metodi sono stati elaborati suddividendo la superficie iniziale utilizzando n tangenti. Successivamente, è stata definita una superficie poliedrica ottenuta accoppiando due a due le tangenti successive A1, B2, C3... (Fig. 3). Queste superfici, costruite utilizzando i quadrilateri sghembi A12B, formati da due tangenti consecutive, sono porzioni di paraboloidi, pertanto non sono superfici sviluppabili.

Nel primo metodo, basato sui principi della geometria differenziale, ogni porzione di paraboloidi è stato trasformato per approssimazione in un triangolo.

4. Sviluppo e "spianamento" approssimato delle superfici



Infatti, dividendo lo spigolo di regresso in n parti e considerando le n tangenti (generatrici della rigata) si ha che due tangenti consecutive si possono considerare incidenti lungo lo spigolo di regresso.

In realtà ciò è vero solo in un intorno infinitesimo.

Dividendo, infatti, lo spigolo di regresso in n parti e considerando due tangenti successive, t_1 e t_2 , condotte rispettivamente dai punti 1 e 2 (Fig.3) si definisce il quadrilatero sghembo A12B. Al tendere del punto 2 al punto 1, i punti 1, 2 e B possono considerarsi allineati, e quindi le due tangenti consecutive saranno incidenti nel punto 1.

Ne deriva che la superficie A12B può essere considerata equivalente alla faccia triangolare 1AB se n tende ad infinito (Fig.3).

Di conseguenza, per approssimazione, sarà sempre possibile definire una faccia piana triangolare e quindi sviluppare la superficie composta da n facce triangolari.

Considerando i punti 1, 2, B e 2, 3, C... allineati, la superficie si discretizza, si trasforma in una superficie

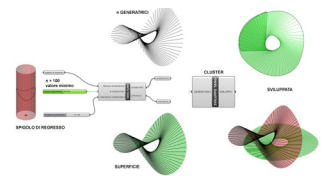
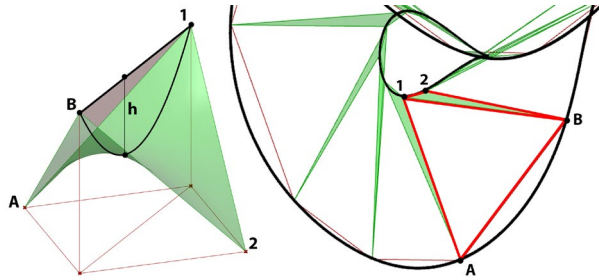


Fig. 3/ Metodo 1. Processo per la definizione di uno script per lo sviluppo di una tangenziale generica.

Fig. 4/ Metodo 1. Test dello script per lo sviluppo di una tangenziale generica.

Dal piano alla superficie

Fig. 5/ Superficie poliedrica per l'approssimazione di una superficie generata utilizzando un quadrilatero sghembo: a. paraboloidi generico; b. tangenziale.



poliedrica suddivisa nei triangoli AB_1 , BC_2 , CD_3 ..., che può essere quindi sviluppata sul piano⁴.

All'aumentare di n migliorerà l'approssimazione della superficie sviluppata rispetto a quella reale.

La costruzione del modello algoritmico generativo consente di verificare che, se l'intervallo non è infinitesimo la sviluppata si discosta notevolmente dalla superficie originaria e quindi è necessario impostare un valore minimo di n in funzione della lunghezza dello spigolo di regresso.

Metodo 2

È sempre possibile sviluppare su un piano una superficie poliedrica composta da facce piane. Assumendo un piano di una faccia come riferimento la superficie poliedrica viene tagliata lungo alcuni spigoli e tramite successivi ribaltamenti si dispone sul piano.

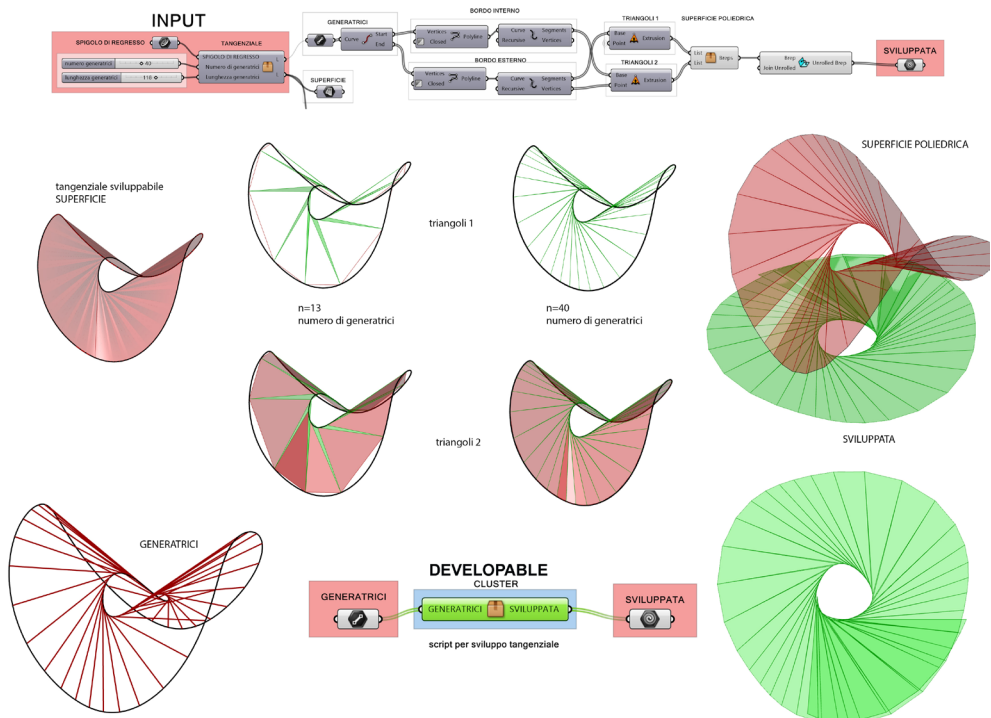
Lo *script* che è stato definito per lo sviluppo di una superficie tangenziale si basa su questo principio teorico, il punto di partenza del processo è, anche in questo caso, la discretizzazione della superficie continua in una superficie poliedrica che potrà essere facilmente sviluppata su un piano.

Per raggiungere questo obiettivo uno dei metodi possibili consiste nella trasformazione della superficie in una superficie poliedrica che meglio l'approssima rispettando le caratteristiche geometriche e, quindi, senza stravolgerne la natura.

Per quanto attiene lo sviluppo delle superfici tan-

⁴ Cfr. Capone M. 2018.

4. Sviluppo e "spianamento" approssimato delle superfici



genziali, trattandosi di rigate, la caratteristica fondamentale è quella di avere un insieme di isocurve rettilinee: le n generatrici della superficie tangenti allo *spigolo di regresso* assegnato.

Partendo proprio da queste n generatrici si tracciano le polilinee che approssimano i bordi curvi della superficie ideale e si definiscono i quadrilateri sghembi: come rilevato in precedenza, la superficie generata per interpolazione utilizzando un quadrilatero sghembo 1AB2, è una porzione di paraboloido iperbolico (Fig.5).

Per costruire la superficie poliedrica che meglio approssima tale superficie è stato sviluppato un metodo alternativo a quello precedentemente illustrato che ne riduce l'approssimazione e fornisce una soluzione generalizzabile.

Considerando la porzione di paraboloido iperbolico costruito utilizzando il quadrilatero sghembo 1AB2,

Fig. 6/ Processo per la definizione dello script DEVELOPABLE costruito per sviluppare una tangenziale qualsiasi. Metodo 2.

si consideri la diagonale 1B, e si definiscano le due facce triangolari adiacenti, 1BA e 1B2 aventi in comune la diagonale 1B (Fig. 5). Si può osservare che la superficie poliedrica definita è quella che approssima il pezzo di paraboloido costruito utilizzando il quadrilatero sghembo 1AB2 e che il livello di approssimazione dipende dalla curvatura del paraboloido in quel punto: maggiore è la curvatura, maggiore sarà la distanza h tra la curva sezione 1B e il segmento 1B che l'approssima (Fig. 5).

Poiché nelle superfici tangenziali la curvatura è minima tale approssimazione si può considerare sicuramente accettabile.

Reiterando il processo si può trasformare tutta la superficie curva in una superficie poliedrica composta da facce triangolari adiacenti.

Una volta determinata la sviluppata si può verificare che i bordi conservano la stessa lunghezza delle due polilinee definite in precedenza, di conseguenza il livello di approssimazione dipenderà dal numero n di punti scelti per trasformare lo *spigolo di regresso* in una polilinea e, quindi, da un solo parametro: il numero di generatrici utilizzate per generare la superficie (Fig.6).

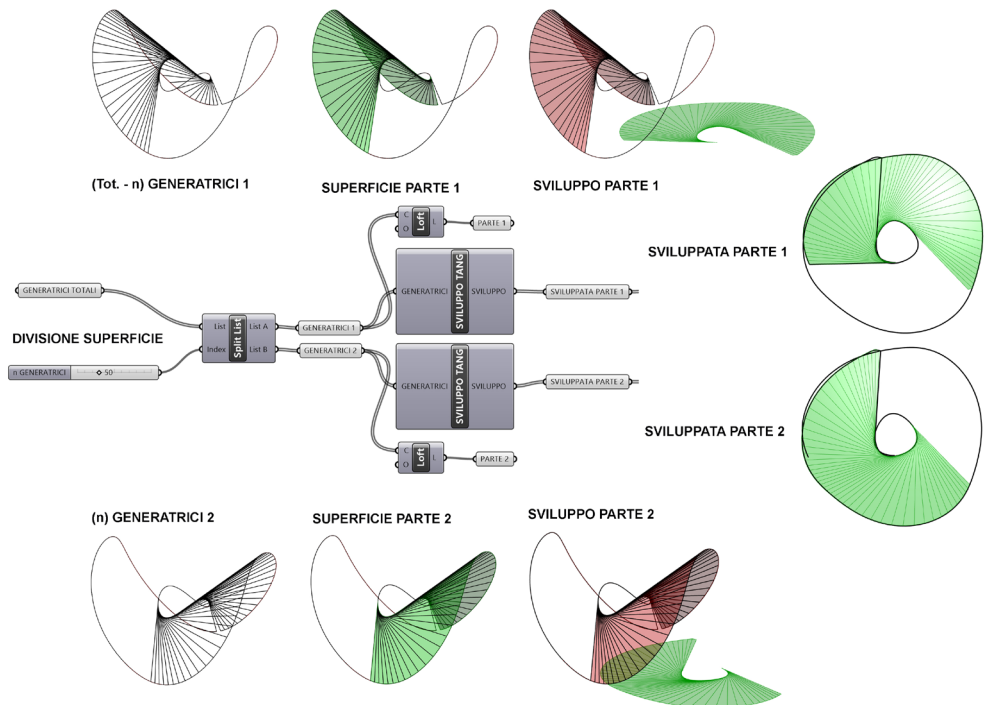
Lo *script* definito per sviluppare una tangenziale qualsiasi si basa sulla definizione del bordo interno e del bordo esterno generati utilizzando gli estremi delle generatrici.

I due bordi sono le due polilinee che approssimano i bordi della superficie ideale.

Le facce triangolari che approssimano i quadrilateri sghembi si costruiscono rispettivamente estrudendo i lati della polilinea interna verso i vertici della polilinea esterna (triangoli 1) e viceversa (triangoli 2) (Figg.5 e 6). La superficie poliedrica da sviluppare si ottiene unendo prima nella giusta sequenza i triangoli 1 e 2 e poi utilizzando uno dei componenti esistenti per sviluppare le superficie⁵ (Fig 6). Lo *script* che è

⁵ In ambiente VPL è stato utilizzato il componente *unroll brep*, ma può essere utilizzato un qualsiasi componente che consenta di sviluppare una superficie poliedrica.

4. Sviluppo e “spianamento” approssimato delle superfici



stato definito, chiuso in un *cluster*, DEVELOPABLE, può essere utilizzato per sviluppare una sviluppabile qualsiasi. Come è stato evidenziato anche in questo caso il processo di semplificazione prevede come unico input le n generatrici della superficie da cui dipende il grado di approssimazione⁶.

In funzione della configurazione dello *spigolo di regresso* può accadere che lo sviluppo della superficie si sovrapponga su se stesso⁷.

Per poter procedere alla fabbricazione in questi casi, è necessario suddividere la superficie di progetto in parti e progettare le connessioni.

Utilizzando lo *script* DEVELOPABLE per dividere in parti la superficie sviluppata sarà sufficiente utilizzare le generatrici in corrispondenza delle connessioni previste in progetto, poiché come input lo script chiede solo il numero di generatrici (Fig.7).

Fig. 7/ La sviluppata deve essere divisa in parti per evitare la sovrapposizione: in questo caso la superficie è stata divisa in due parti uguali utilizzando le generatrici, input dello script DEVELOPABLE.

⁶ Per confrontare i due metodi e per verificare l'accuratezza metrica con la quale opera l'algoritmo si può considerare la variazione dimensionale dell'area della superficie sviluppata nel piano e della stessa superficie nella sua configurazione spaziale. Da questo confronto emerge che utilizzando il primo metodo si può considerare un errore del ...% mentre utilizzando il secondo metodo l'errore è pari al%.

Ovviamente aumentando il numero di generatrici l'errore diminuisce.

⁷ Fallavollita F. 2008, p. 213

Casi notevoli: l'elicoide sviluppabile

Lo studio dei casi notevoli è fondamentale in quanto questi casi rappresentano situazioni particolari che spesso offrono spunti interessanti per affrontare problemi più complessi.

Analizzando attentamente alcuni di questi casi, è possibile acquisire una comprensione più profonda delle proprietà geometriche e delle relazioni matematiche che caratterizzano una determinata classe di superfici favorendo la ricerca di soluzioni originali. Nell'ambito delle superfici sviluppabili le tangenziali si specializzano quando lo *spigolo di regresso* è una curva luogo geometrico, come accade, ad esempio, per l'*elicoide sviluppabile*: un particolare elicoide rigato in cui le generatrici sono tutte tangenti all'elica. Per questo caso notevole sono stati confrontati due diversi procedimenti sia per generare la superficie, che per determinare la sua sviluppata: un procedimento sintetico descrittivo ed un procedimento matematico.

In generale l'obiettivo è stato quello di definire un approccio metodologico replicabile quando le superfici in questione sono luoghi geometrici di cui sono note le equazioni parametriche.

Il confronto tra i due metodi consente anche di valutare il grado di approssimazione che il progettista potrà gestire in funzione della scala dei materiali e di eventuali esigenze specifiche.

Come è stato ampiamente sottolineato, l'operazione di sviluppo si esegue in modo agevole per le superfici coniche e cilindriche dove «*il metodo rigoroso non può che desumersi dal calcolo*»⁸ in quanto il metodo approssimato si dimostra lungo e impreciso. Gli algoritmi che consentono lo sviluppo delle superfici coniche e cilindriche utilizzano in modo implicito questo calcolo.

Tuttavia, in alcuni casi particolari la conoscenza del risultato consente, come afferma Leroy, di distribu-

⁸ Sereni C.1826, p.49. Sereni è un sostenitore del metodo analitico, infatti egli afferma che «*i metodi approssimativi sono essi medesimi soverchiamente lunghi, e di sì raro uso nelle arti che non meritano d'arrestarci d'avvantaggio [...] in ultima analisi tutti si ridurrebbero a costruire lo sviluppo di una superficie poliedrica [...] e quanto minore fossero gli angoli tanto più il lavoro si accosterebbe alla precisione*».

4. Sviluppo e “spianamento” approssimato delle superfici

ire gli errori dovuti all'approssimazione. Lo studioso affronta il problema dello sviluppo di una tangenziale generica, partendo proprio dal caso particolare dell'elicoide sviluppabile, procedendo come per una superficie conica o cilindrica.

Leroy afferma che «*dividendo una curva piana situata sulla superficie in piccoli archi sensibilmente confusi con le loro corde: allora i settori elementari n proiettati potranno essere considerati come triangoli di maniera che... se si costruiscono questi triangoli sopra uno stesso piano ed allato gli uni degli altri, il loro insieme rappresenterà lo sviluppo della superficie in questione*»⁹ (Fig. 8).

Egli sottolinea che la necessità di approssimare la superficie continua ad una superficie poliedrica dà luogo «*alla contingenza di cumulare errori, i quali sparirebbero se si conoscesse anticipatamente la forma che dee prendere sullo sviluppo una certa curva data sulla superficie curvilinea [...] nell'elicoide sviluppabile avviene che tutte le eliche hanno per trasformata sullo sviluppo tanti cerchi concentrici*». Dunque, in questo caso particolare, la sviluppata di una porzione di elicoide avente come bordi due eliche è data da due cerchi concentrici aventi raggi uguali a quelli dei *cerchi osculatori* delle due eliche. Se invece i bordi della porzione di elicoide sono un'elica e l'evolva del cerchio dell'elica si dimostra che la sviluppata avrà come bordi un cerchio di raggio uguale al raggio del *cerchio osculatore* dell'elica e la sua evolva. In altri termini, se è nota la forma delle linee di bordo della sviluppata si possono definire processi basati su questa conoscenza.

Generazione dell'elicoide_ metodo analitico

In ambiente VPL si possono generare e visualizzare tutte le superfici luogo geometrico assegnando le equazioni parametriche. Superfici complesse descritte da formule astratte e difficilmente visualiz-

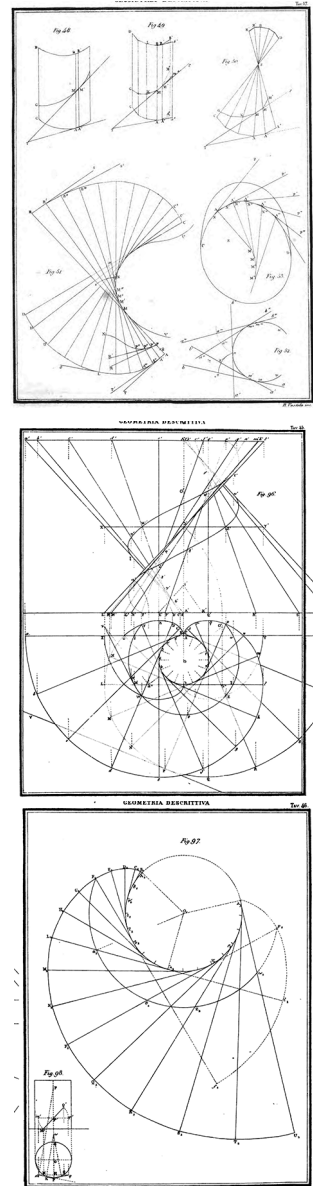


Fig. 8/ Charles François Antoine Leroy: sviluppabile generica, elicoide sviluppabile, sviluppata di una porzione di elicoide.

⁹ Leroy C.F.A. 1846, p.289.

Dal piano alla superficie

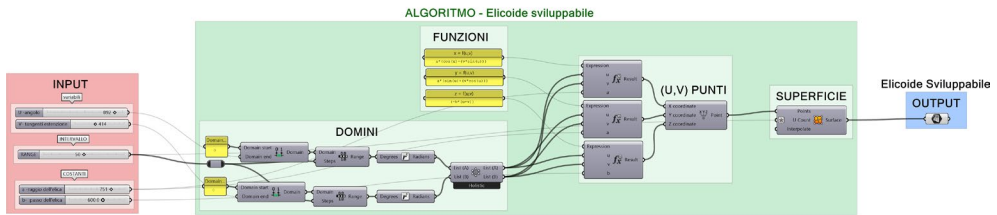


Fig. 9/ Script per la generazione di un elicoide sviluppabile basato sul processo matematico (elaborato con Gianluca Barile).

zabili con i metodi di rappresentazione tradizionale diventano, grazie all'utilizzo dello strumento computazionale, immediatamente visualizzabili.

L'approccio matematico, basato sui principi della geometria differenziale, e le potenzialità offerte dagli strumenti algoritmico generativi ampliano notevolmente il repertorio di forme anche a quelle superfici che, pur essendo luoghi geometrici definiti, sono spesso difficilmente controllabili.

Il processo computazionale utilizzato per generare una superficie luogo geometrico si basa sull'interpolazione di n punti in cui la superficie viene discretizzata e quindi da questo valore ne dipende l'approssimazione.

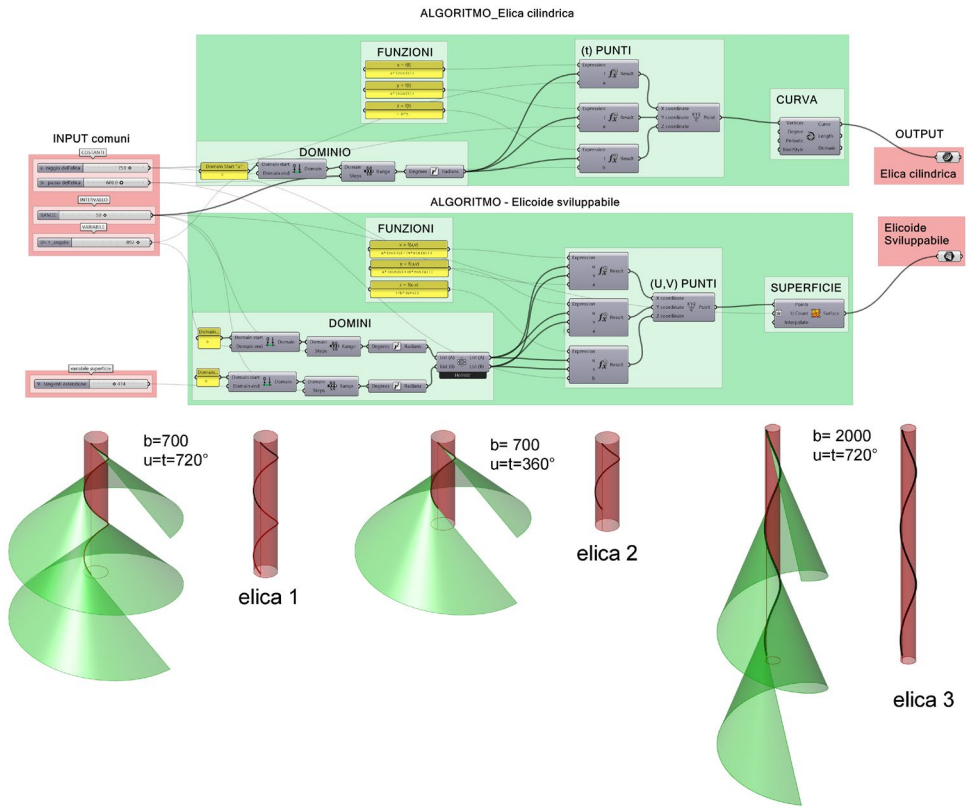
Un caso studio emblematico è quello dell'*elicoide sviluppabile*, le cui proprietà geometriche e la conoscenza dell'equazione parametrica giocano un ruolo fondamentale sia per la generazione della superficie ma soprattutto per la definizione della sua sviluppata.

Per costruire l'algoritmo che rappresenta i punti della superficie discretizzata è necessario definire il *dominio*, il *range* e la *funzione parametrica*.

Il *Dominio* definisce l'insieme dei valori possibili che una variabile indipendente può assumere, in modo che la funzione sia definita in un determinato intervallo. Le superfici luogo geometrico sono infatti teoricamente infinite, definendo il dominio se ne visualizza una determinata parte.

Il *Range* definisce quanti punti verranno considerati nel dominio descritto, pertanto questo valore

4. Sviluppo e “spianamento” approssimato delle superfici



influisce sulla risoluzione e sull'approssimazione della superficie.

Ogni punto dell'elicoide sviluppabile è, quindi, definito da tre coordinate che si determinano attribuendo i valori alle variabili indipendenti, nell'ambito dei domini definiti, utilizzando la seguente funzione parametrica:

$$X(u,v) = a (\cos (u) - (v \sin (u)))$$

$$Y(u,v) = a (\sin (u) + (v \cos(u)))$$

$$Z(u,v) = b (u + v)$$

Dove: u e v sono le variabili indipendenti, a , è il raggio del cerchio del cilindro dell'elica (spigolo di regresso) e b rappresenta il passo dell'elica.

È stato quindi definito lo *script* (Fig.9) che consente di generare l'elicoide, dove U , V , a e b sono gli input che consentono di modificarne la configurazione e

Fig. 10/ Processo matematico: collegamento tra lo Script per la generazione di un'elica cilindrica e lo script per generare l'elicoide. Questo metodo consente di controllare meglio il processo di generazione della superficie.

la porzione visualizzata. In particolare, modificando il valore U , si modificano le isocurve u che, in questo caso sono tutte eliche, e modificando l'angolo si gestisce la porzione di superficie. Se, ad esempio, si considera un angolo di 360° la superficie ha compiuto un giro completo, se il valore è 720° 2 giri, e così via (Fig. 10). Modificando il valore di V , si modifica l'estensione delle tangenti, a , è la costante che definisce il raggio del cilindro dell'elica (*spigolo di regresso* dell'elicoide) e b , è la costante che definisce il passo dell'elica, la minima distanza tra due punti distinti dell'elica sulla stessa verticale (aventi le stesse coordinate x e y) (Fig. 10).

Come illustrato in precedenza, l'*elicoide sviluppabile* può essere costruito conducendo n tangenti, generatrici, all'elica cilindrica assunta come direttrice e costruendo la superficie come interpolazione delle n generatrici. Questo metodo evidenzia chiaramente il legame matematico esistente tra la curva direttrice e la superficie e, quindi, tra l'elica e l'elicoide sviluppabile.

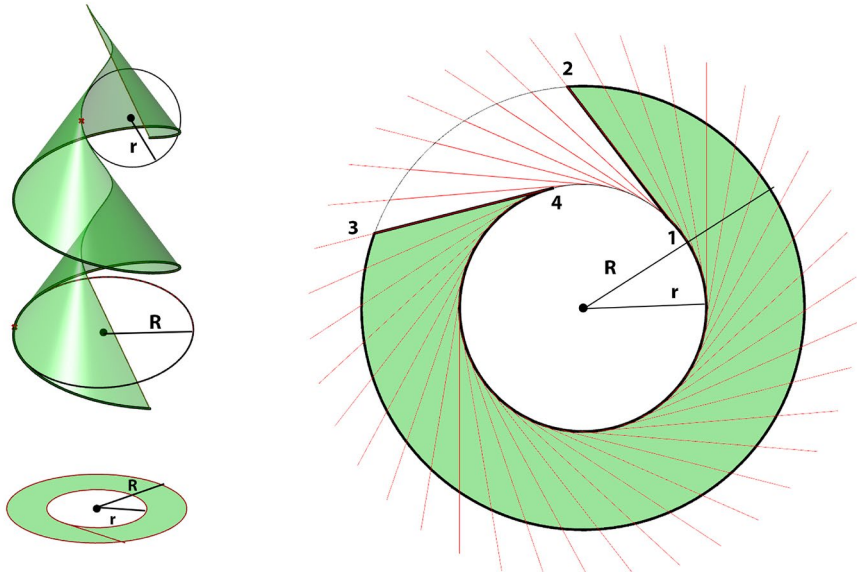
Collegando i due *script*, quello per la generazione dell'elica e quello per la generazione dell'elicoide, si può definire un'ulteriore possibilità di controllo del processo di generazione della superficie (Fig.10).

D'altra parte, si è già notato che nel descrivere i parametri a e b dell'equazione matematica che genera l'elicoide tangenziale sono coinvolte le principali caratteristiche geometriche dell'elica.

Infatti, analizzando lo *script* costruito per generare l'elica utilizzando le espressioni matematiche si evince che la maggior parte dei parametri sono gli stessi: a e b , sono le costanti che definiscono il raggio del cilindro dell'elica e il suo passo, il *Range* definisce quanti punti verranno considerati nel dominio definito.

Una differenza importante da sottolineare, per quanto riguarda il dominio, è che nel caso dell'elica

4. Sviluppo e “spianamento” approssimato delle superfici



il dominio è unico, poiché una curva è definita da una singola variabile t .
Modificando il valore t , si modifica l'angolo in cui l'elica è definita.

Se, ad esempio, si considera un angolo di 360° significa che l'elica ha compiuto un giro completo, se il valore è 720° 2 giri, e così via (Fig. 10).

Fig. 11/ Sviluppata di un elicoide basato sulla curvatura dell'elica cilindrica (spigolo di regresso) sul metodo elaborato da Sereni.

Sviluppata di un elicoide tangenziale

Per costruire sul piano la sviluppata di una porzione di elicoide con generatrici uguali si può applicare una proprietà notevole di questa superficie: è noto infatti che la sviluppata è compresa tra due cerchi concentrici aventi raggi uguali ai raggi dei cerchi osculatori delle due eliche di bordo, r ed R (Fig. 11). In questo caso la lunghezza dell'arco 14 è equivalente alla lunghezza della porzione di elica su cui si costruisce la superficie da sviluppare.

Dividendo in n parti il cerchio interno e conducendo n tangenti la porzione di elicoide sviluppata sarà definita da una parte di corona circolare delimitata dalle due tangenti 12 e 34 (Fig. 11).

Dal piano alla superficie

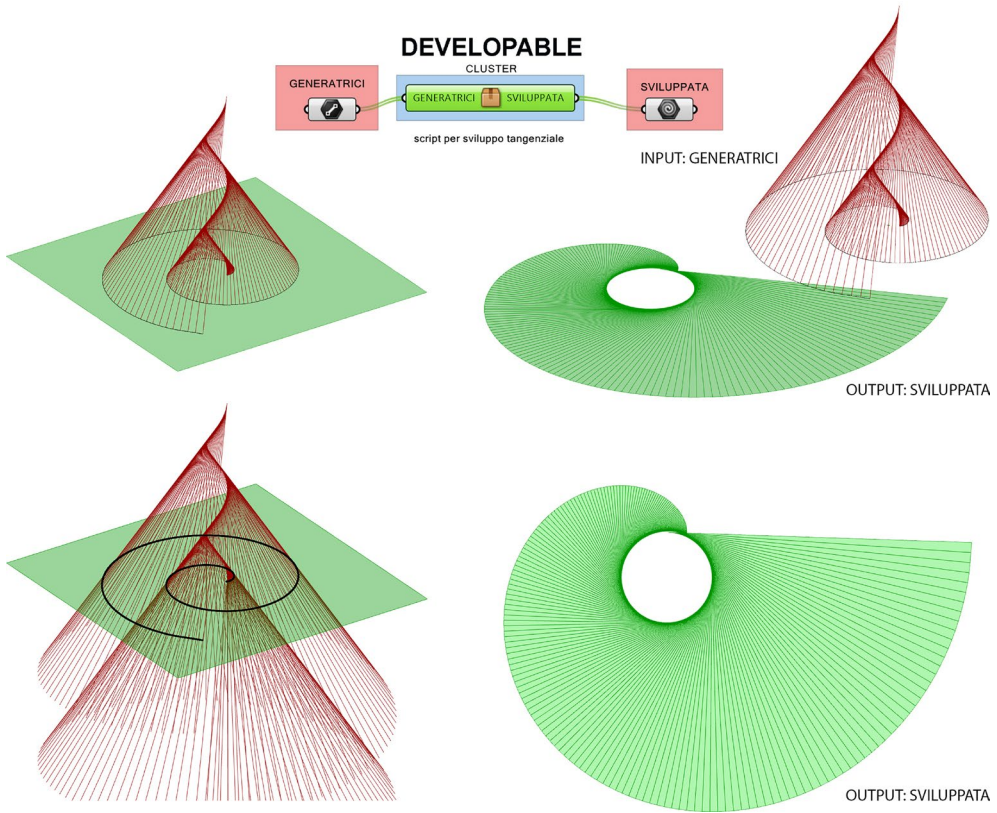


Fig. 12/ Sviluppata di un elicoide tangenziale utilizzando lo script DEVELOPABLE, come se fosse una tangenziale qualsiasi.

Utilizzando lo *script* DEVELOPABLE per lo sviluppo di una tangenziale generica si può comunque determinare la sviluppata di una qualsiasi porzione di elicoide. Input dell'algoritmo sono le n generatrici utilizzate per definire la porzione da sviluppare.

Nel caso in cui la porzione di elicoide sia ottenuta tagliando l'elicoide con un piano ortogonale all'asse dell'elica basterà tagliare le n generatrici con il piano ed utilizzarle per discretizzare la superficie, quindi determinarne il suo sviluppo come se fosse una tangenziale qualsiasi (Fig. 12).

Questo procedimento implica, come sottolinea anche Leroy, "la necessità di approssimare la superficie continua ad una superficie poliedrica, determinando un accumulo di errori che possono essere evitati

10 Leroy C.F.A. 1846, p.289.

4. Sviluppo e "spianamento" approssimato delle superfici

quando è nota la sviluppata delle curve che definiscono la forma planare"¹⁰, come in questo caso.

Infatti, l'elicoide tangenziale generato da un'elica cilindrica è una superficie notevole: se si considera una porzione di elicoide delimitata sezionando la superficie con un piano ortogonale all'asse dell'elica i bordi della superficie sono un'elica e l'*involuta* del cerchio dell'elica. In questo caso si dimostra che i bordi della sviluppata sono un cerchio con raggio uguale al *cerchio osculatore* dell'elica e la sua *involuta*. Quindi, per determinare la sviluppata, una volta determinato il bordo interno, la circonferenza di raggio uguale al raggio del *cerchio osculatore* dell'elica interna, sarà sufficiente determinare l'*involuta* di tale cerchio.

Per determinare l'*involuta*, da un punto di vista metodologico, sono stati confrontati due approcci: l'approccio matematico e l'approccio geometrico descrittivo. Sono stati, pertanto, definiti due *script* diversi per costruire l'*involuta* del cerchio: uno basato sul metodo descrittivo e l'altro sul metodo matematico.

Involuta_Metodo descrittivo

Partendo dalle definizioni di Gaspard Monge¹¹, si possono derivare due curve da una generica curva assegnata: l'*evoluta* e l'*involuta* (o *evolvente*).

L'*evoluta* di una curva planare è il luogo di tutti i suoi centri di curvatura. Un'*evoluta* può anche essere definita come l'inviluppo delle normali ad una curva. Le *evolute* sono strettamente legate alle *involute*: una curva è l'*evoluta* di qualsiasi sua *involuta*. Gaspard Monge definisce l'*involuta* descrivendo il procedimento per costruire la curva.

L'*involuta* di una qualsiasi curva MNO è generata spostando una linea retta AB che è sempre tangente alla curva MNO.

Fissando un punto P sulla linea AB, durante il moto

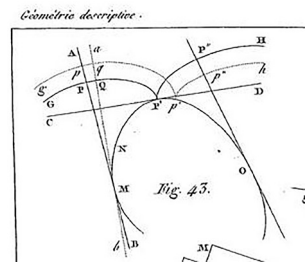


Fig. 13/ Gaspard, Monge. 1798. Geometrie descriptive. Leçons données aux écoles normales, l'an III de la République. par. 104

¹¹ Monge G. 1798, par. 104.

Dal piano alla superficie

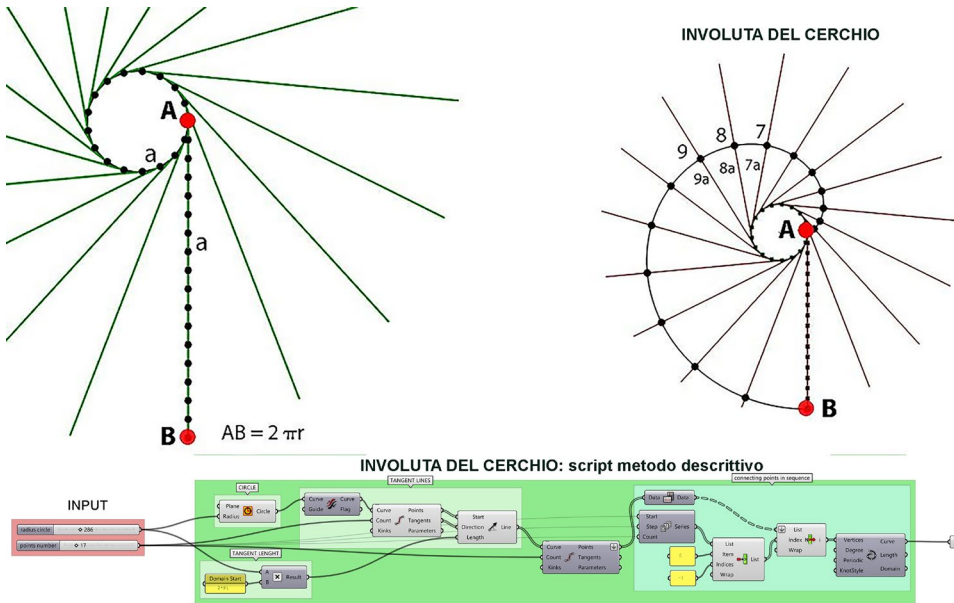


Fig. 14/ Involuta del cerchio, script basato sul metodo descrittivo

di AB, che si sposta restando sempre tangente alla curva MNO, il punto P descrive una curva che è l'*involuta* di MNO (Fig.13).

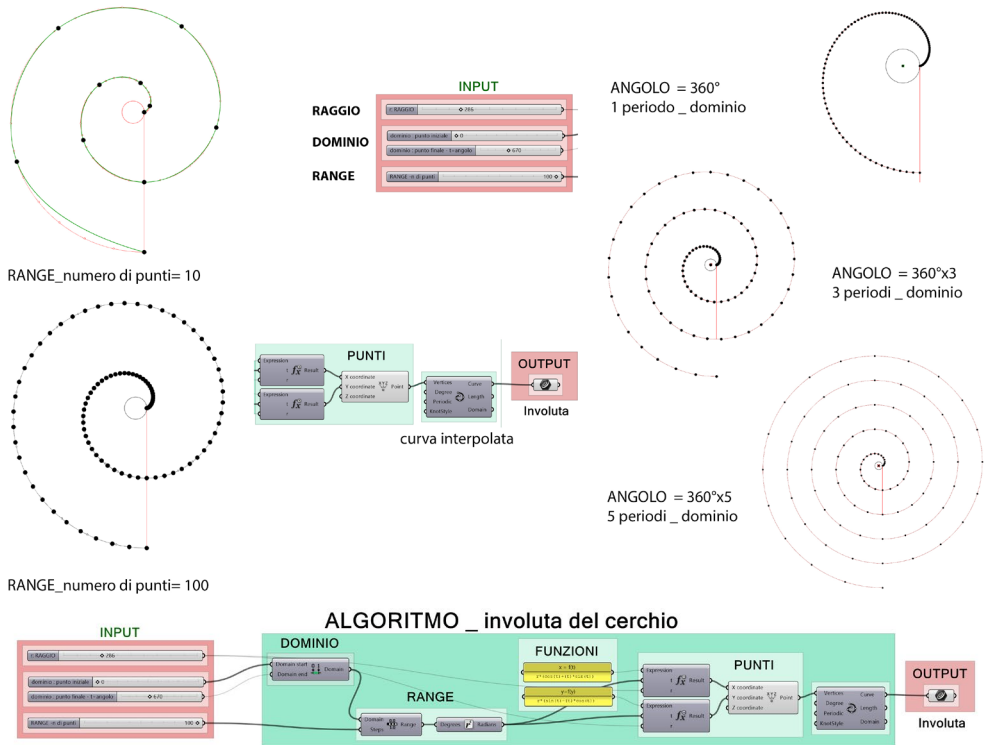
Il cerchio è un caso particolare, poiché la curvatura è costante e il centro dei *cerchi osculatori* è sempre lo stesso per ogni punto del cerchio: l'*evoluta* del cerchio è, quindi, il suo centro.

Partendo dalla definizione di Monge è stato definito lo *script* che permette di generare l'*involuta* del cerchio con il metodo descrittivo (Fig.14).

Le fasi che caratterizzano il processo sono le seguenti:

1. si divide il cerchio in n parti. La lunghezza di ogni parte è $a = \frac{2\pi r}{n}$;
2. si costruiscono le n linee tangenti al cerchio di lunghezza pari alla lunghezza della circonferenza, quindi $AB = 2\pi r$;
3. si dividono le tangenti in n parti, ne risulta che ogni parte avrà la stessa lunghezza delle parti in cui il cerchio è stato diviso. $AB \cdot n = 2\pi r \cdot n = a$;
4. Interpolando gli n punti determinati nell'intervallo

4. Sviluppo e “spianamento” approssimato delle superfici



definito con una curva di terzo grado si determina l'*involuta* del cerchio, il numero di punti definisce l'approssimazione della curva (Fig.14).

Involuta _Metodo matematico

Con un procedimento analogo a quello descritto per l'*elica* è stato definito uno *script* che consente di tracciare l'*involuta* di una circonferenza.

Punto di partenza sono le due equazioni cartesiane dell'*involuta* del cerchio che permettono di ottenere rispettivamente le due coordinate X e Y di ogni punto:

$$fx(t) = r * (\cos(t) + (t) * \sin(t));$$

$$fy(t) = r * (\sin(t) + (t) * \cos(t)).$$

dove t, è la variabile che esprime il valore angolare, espresso in gradi o in radianti ed r, è il raggio del cerchio che genera l'*involuta*.

Fig. 15/ *Script* per la definizione dell'*involuta* del cerchio basata sulle funzioni parametriche. I parametri che consentono di modificare la curva involuta del cerchio sono: il raggio del cerchio, il dominio che definisce l'escensione della curva visualizzata e il numero di punti che ne definisce l'approssimazione. *Script* elaborato da Gianluca Barile.

Dal piano alla superficie

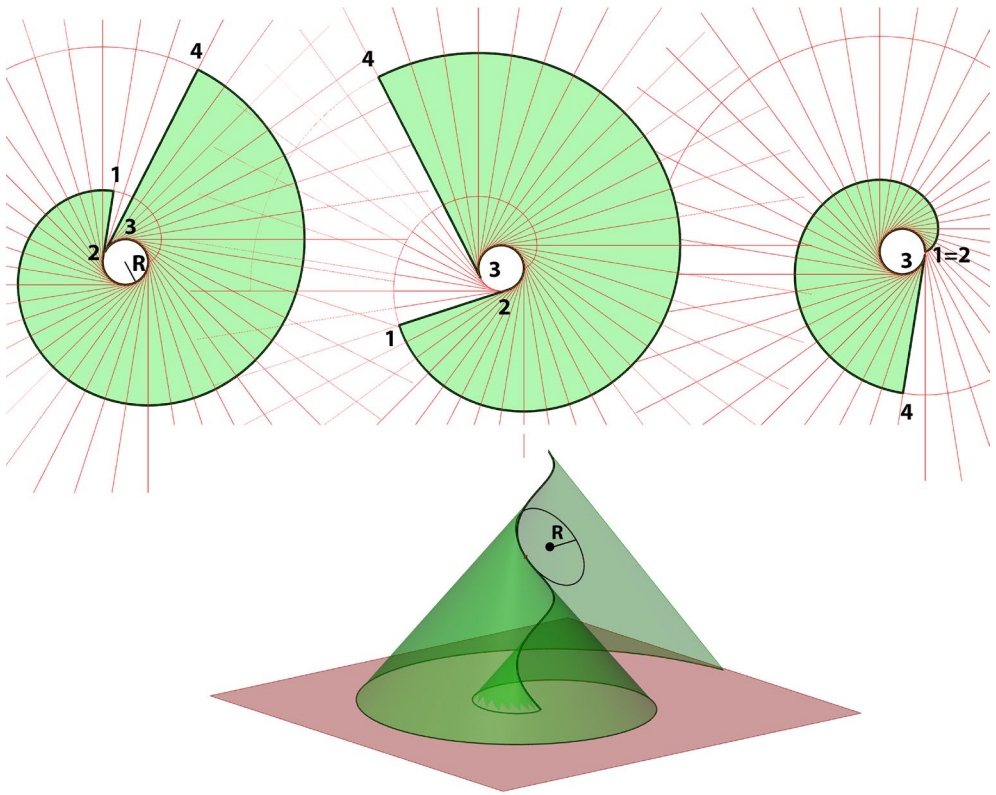


Fig. 16/ La geometria della sviluppata è composta dall'arco di circonferenza 23, dal pezzo di involuta 14 e da due segmenti rettilinei 34 e 12, che rappresentano la prima e l'ultima generatrice del pezzo di elicoide sviluppato. Al variare di questi elementi variano i pezzi di elicoide a cui corrisponde lo sviluppo .

Per $0 < t < 2\pi$ la funzione rappresenta un periodo. Anche in questo caso per la definizione dello *script* il processo si basa sul disegno della curva utilizzando n punti e le espressioni matematiche per determinarne le coordinate.

Per costruire l'algoritmo è necessario definire gli input da cui dipendono il *dominio* e il *range*, l'intervallo di valori. L'input è definito dai parametri che possono essere modificati per ottenere le diverse configurazioni della curva. La definizione dei parametri in relazione a esigenze specifiche è una fase cruciale del processo.

Nel caso dell'*involuta* del cerchio, i parametri sono il raggio del cerchio su cui si sviluppa l'*involuta*, il numero di punti, il *range*, e l'estensione della curva definita dal *dominio*. Il *dominio* consente di defini-

4. Sviluppo e “spianamento” approssimato delle superfici

re e, quindi di visualizzare, una parte di una curva teoricamente infinita. I componenti necessari per costruire il *dominio* sono il punto iniziale con cui si definisce il punto iniziale della curva, che in questo caso è stato impostato in modo che possa variare tra 0 e 360° e che comunque può essere modificato in relazione a specifiche esigenze, e il punto finale del *dominio*, parametro che permette di aumentare o diminuire l'estensione della curva.

Poiché l'equazione della curva si basa su funzioni goniometriche una delle principali caratteristiche è quella di essere periodica (ogni periodo è pari a $2\pi = 360^\circ$) lo *script* consente di variare l'angolo e , quindi, impostando multipli di 360° si visualizzeranno periodi interi altrimenti frazioni (Fig.15). Il *Range* definisce, come di consueto, quanti punti verranno considerati nel *dominio* definito. Quindi questo parametro influisce sull'approssimazione della curva, infatti maggiore è la scala attribuita all'intervallo, più punti saranno identificati all'interno del *dominio* e migliore sarà l'approssimazione della curva (Fig.15). Per disegnare sul piano la sviluppata di una porzione di elicoide avente come curve di bordo un'elica cilindrica e l'involuta del cerchio del cilindro dell'elica sarà sufficiente disegnare un cerchio avente il raggio del cerchio osculatore dell'elica e la sua involuta. Determinato il cerchio sul piano, che rappresenta lo sviluppo dell'elica, l'involuta potrà essere costruita indifferentemente con il *metodo geometrico descrittivo* o con il *metodo matematico*. Una volta costruite le due curve si può tracciare lo sviluppo di n generatrici dividendo il cerchio in n parti e conducendo le tangenti.

La geometria della sviluppata è composta dall'arco di circonferenza 23, dal pezzo di involuta 14 e da due segmenti rettilinei 34 e 12, che rappresentano la prima e l'ultima generatrice del pezzo di elicoide sviluppato.

Dal piano alla superficie

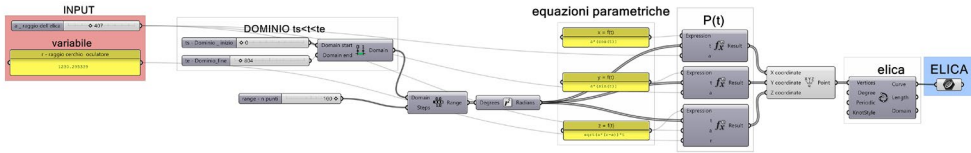


Fig. 17/ *Script* per costruire la famiglia di eliche con stessa curvatura. Il parametro a è il raggio del cilindro su cui l'elica si sviluppa, e come input r il raggio del cerchio osculatore. *Script* elaborato in collaborazione con Gianluca Barile.

Al variare di questi elementi variano i pezzi di elicoide a cui corrisponde lo sviluppo (fig. 16).

Dalla sviluppata alla superficie

La determinazione della sviluppata di una superficie è un problema che ammette un'unica soluzione. Al contrario il problema inverso ammette infinite soluzioni in un determinato intervallo.

Si può, infatti, verificare che assegnata la sviluppata di una porzione di elicoide esistono infiniti elicoidi che possono essere costruiti utilizzando la stessa forma piana¹²: sono tutti gli elicoidi generati da eliche con lo stesso cerchio osculatore e quindi con la stessa curvatura.

Per gestire il problema inverso si considera che il bordo interno della sviluppata è un arco di circonferenza AB il cui raggio è uguale al raggio r del cerchio osculatore dell'elica, pertanto r è, in questo caso, un dato del problema: un valore assegnato.

Si dimostra che tale arco di circonferenza è lo sviluppo di infinite eliche aventi la stessa curvatura $k=1/r$. Il problema è, quindi, quello di generare tutte le eliche appartenenti a questa famiglia.

Partendo da questo presupposto è stato definito uno *script* che ha come variabile a , il raggio del cilindro su cui l'elica è costruita, e come input r il raggio del cerchio osculatore.

Poiché la curvatura dell'elica è nota ed è $k=1/r$, si passa dalle funzioni parametriche dell'elica:

$$X = a(\cos(t))$$

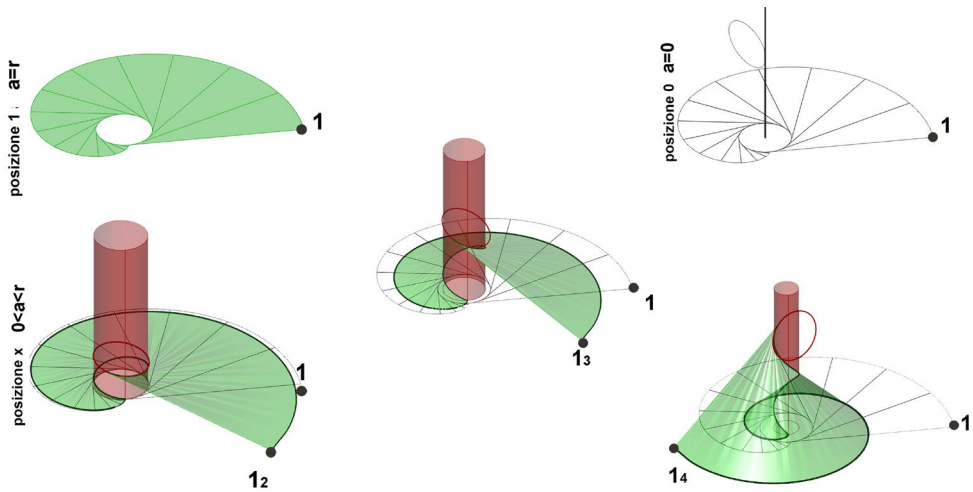
$$Y = a(\sin(t))$$

$$Z = bt$$

dove a è il raggio del cilindro e b è il passo dell'elica,

¹² Martín Pastor A. 2020.

4. Sviluppo e "spianamento" approssimato delle superfici



alle funzioni parametriche che si ottengono esprimendo b in funzione della curvatura e , e quindi, in funzione di r , del raggio del cerchio osculatore:

$$X = a(\cos(t))$$

$$T = a(\sin(t))$$

$$Z = \sqrt{a(r-a)}t$$

Infatti, poiché $k = 1/r$, e poiché la curvatura dell'elica è espressa anche dalla seguente relazione:

$$K = a\sqrt{a^2 + b^2}$$

si ha che:

$$1/r = a\sqrt{a^2 + b^2} \text{ da cui:}$$

$$r = (a^2 + b^2) / a$$

$$ra = a^2 + b^2$$

$$b^2 = ra - a^2$$

$$b = \sqrt{ra - a^2}$$

Quindi sostituendo b in $Z = -bt$, si ha:

$$Z = -(\sqrt{ra - a^2})t$$

Nel nuovo *script* a diventa così la variabile che consente di generare tutte le eliche aventi lo stesso cerchio osculatore di raggio r (Fig.17).

Impostando il valore $0 < a < r$, si ottengono le infinite eliche della famiglia cercata.

In particolare, si definiscono due posizioni limite per $a=0$ il cilindro degenera in una retta e quindi an-

Fig. 18/ Al variare del parametro $0 < a < r$ si ottengono tutte le eliche con stessa curvatura e quindi le diverse posizioni dell'elicoide. per $a=0$ e $a=r$ si ottengono le due posizioni limite.

Dal piano alla superficie

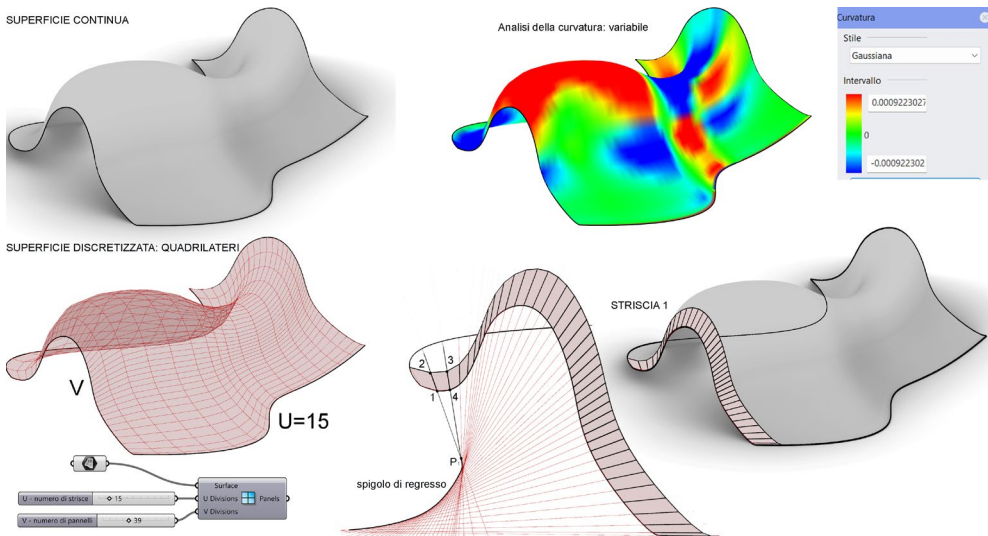


Fig.19/ "Spianamento" approssimato di una superficie a curvatura variabile. La superficie si discretizza in strisce composte da quadrilateri piani.

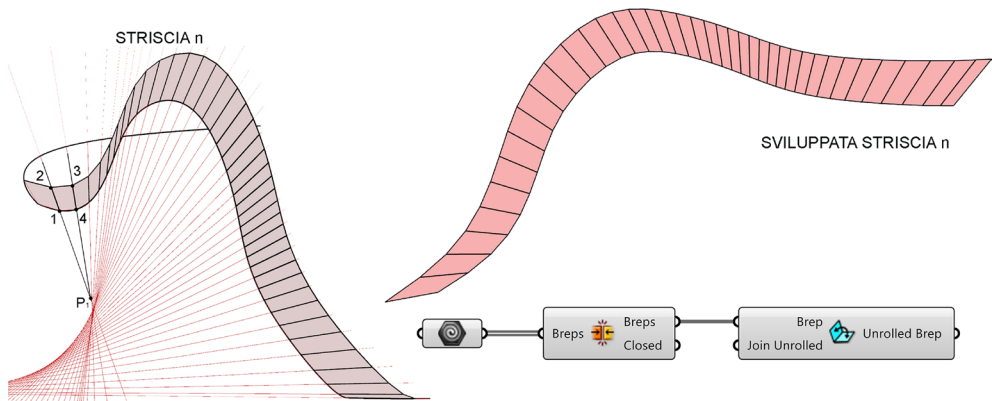
che l'elica, mentre per $a=r$ l'elica degenera nel suo sviluppo piano. Costruendo l'elicoido al variare di a si ottengono le diverse posizioni della superficie, rappresentando analiticamente il movimento che la superficie compie nel passare dalla forma piana alla sua configurazione spaziale (Fig. 18).

Superfici non sviluppabili

Le superfici a doppia curvatura gaussiana, negativa o positiva, sono superfici non sviluppabili; non possono, quindi, essere distese sul piano senza rotture o sovrapposizioni. Le strategie per poter costruire queste superfici, tagliando una forma piana, sono molteplici. Da un punto di vista metodologico, sono stati individuati due diversi approcci la cui scelta dipende dal materiale, dalla scala e delle specificità del progetto. In entrambi i casi il punto di partenza è l'approssimazione della superficie continua: nel primo caso la superficie si discretizza in strisce sviluppabili utilizzando un metodo ormai consolidato¹³ e si può costruire con un materiale flessibile e indeformabile, mentre nel secondo caso si determina uno sviluppo approssimato dell'intera superficie che

¹³ Pottmann H. 2008.

4. Sviluppo e “spianamento” approssimato delle superfici



si può costruire con un materiale che, deformandosi, consente di ottenere la forma di progetto.

Strisce sviluppabili

Per costruire una superficie a curvatura variabile utilizzando *strisce sviluppabili* si divide la superficie in quadrilateri piani, utilizzando i parametri U e V. Assegnando opportunamente i valori ad U e V si definisce il numero di strisce nella direzione considerata prevalente, ad esempio U, e il numero di quadrilateri per ogni striscia (V) (Fig. 19). Considerando la faccia 1234 di una striscia e prolungando i lati opposti 12 e 34 si determina il punto di incidenza P. Prolungando tutti gli n lati si individueranno n punti di intersezione, collegando tali punti si ottiene una curva gobba: lo spigolo di regresso della tangenziale che approssima la superficie. Esistono specifici algoritmi per ottimizzare la superficie in modo da trasformarla in parti sviluppabili che non sono oggetto di questa trattazione¹⁴. Una volta divisa la superficie in strisce poliedriche si può utilizzare un qualsiasi componente che consente di ottenere la sviluppata della striscia. Sviluppando le n strisce, in cui la superficie è stata divisa si può costruire la forma con pezzi planari, in questo caso sarà necessario progettare le connessioni.

Fig. 20/ Le strisce sono composte da quadrilateri piani. I lati opposti si incontrano sullo spigolo di regresso pertanto le strisce sono teoricamente sviluppabili. Sviluppata di una striscia.

¹⁴ La superficie di forma libera potrebbe essere eventualmente ottimizzata in funzione di specifiche esigenze costruttive che non sono oggetto di questo studio. Per approfondimenti si veda: Verhoeven F. et. al. 2022.

Dal piano alla superficie

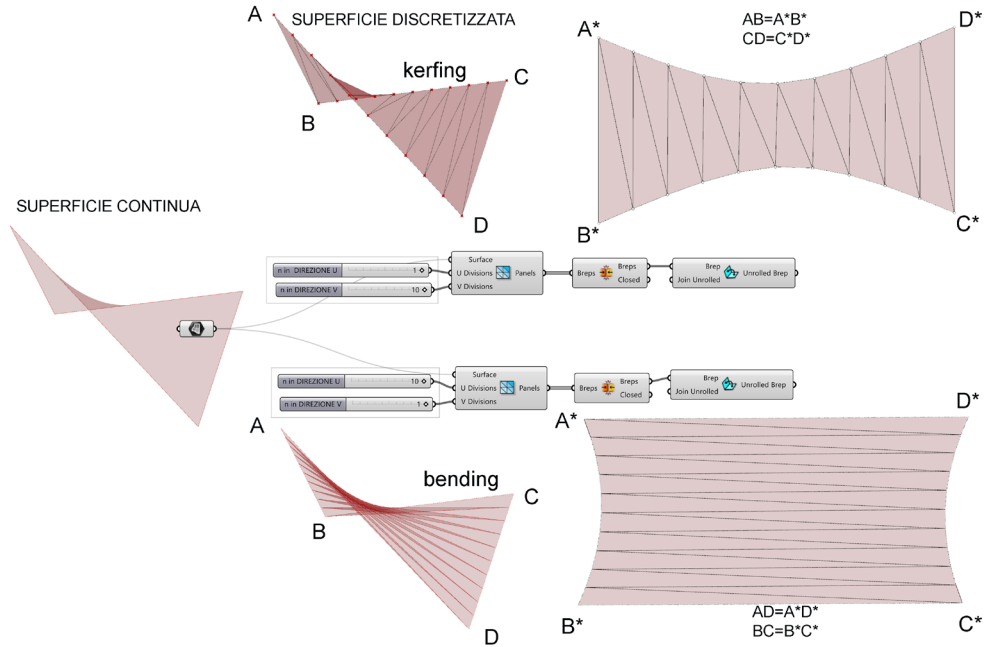


Fig. 21/ "Spianamento" approssimato di un paraboloido iperbolico. La superficie si discretizza in triangoli. La sagoma tagliata dovrà essere resa deformabile con tagli o pieghe.

"Spianamento" approssimato

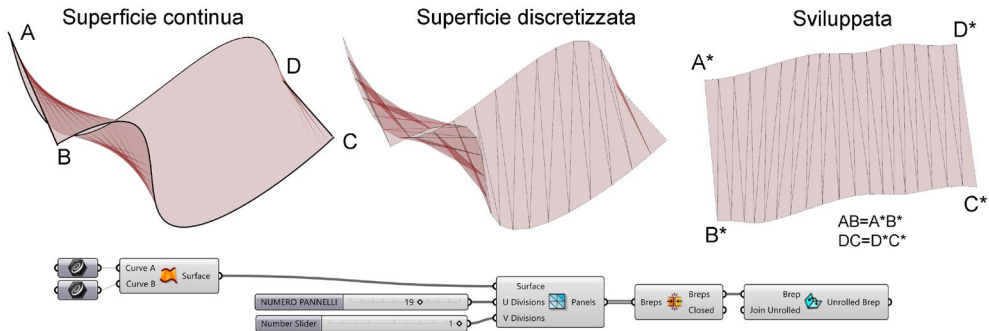
Per determinare lo "spianamento" approssimato di una superficie non sviluppabile sono stati analizzati i principi e i metodi utilizzati per definire lo sviluppo delle superfici sviluppabili e le tecniche di fabbricazione che consentono di modificare le caratteristiche del materiale per renderlo deformabile e che possono "compensare" l'approssimazione insita nell'operazione di "spianamento", grazie a "rotture", *kerfing*, o "sovrapposizioni", *bending*.

Da un punto di vista metodologico sono stati individuati i seguenti casi fondamentali: lo "spianamento" approssimato delle rigate non sviluppabili e lo "spianamento" delle superfici a curvatura variabile.

Rigate non sviluppabili

Gli approfondimenti sulle rigate non sviluppabili ed in particolare sul *paraboloido iperbolico* sono il punto di partenza per definire lo "spianamento"

4. Sviluppo e “spianamento” approssimato delle superfici



approssimato di una superficie non sviluppabile¹⁵. Una rigata è una superficie che ammette almeno una famiglia di isocurve rettilinee, in particolare il *paraboloide iperbolico* è una rigata con due piani direttori con due schiere di generatrici rettilinee parallele a tali piani.

La superficie non è sviluppabile, in quanto due generatrici consecutive sono sempre sghembe, essendo parallele al piano direttore, e la curvatura è sempre negativa. Per definire lo “spianamento” approssimato di questa superficie è stato applicato lo stesso processo utilizzato per lo sviluppo di una tangenziale generica. La superficie si trasforma in una superficie poliedrica composta da triangoli ottenuti considerando una delle due giaciture. Ad esempio, ponendo $U=1$ e $V=n$ si divide la superficie in $2 \times n$ triangoli. L’ approssimazione della sviluppata dipende, ovviamente, da n e, quindi, dal numero di triangoli (Fig. 21).

Nel caso del *paraboloide iperbolico* si possono ottenere due sviluppate in funzione della giacitura considerata: la scelta dipende dalle diverse applicazioni (Fig. 21).

Il processo per lo spianamento di una qualsiasi rigata non sviluppabile segue un approccio simile a quello definito per il *paraboloide*.

Fig. 22/ “Spianamento” approssimato di una rigata generica. Anche in questo caso si dovranno prevedere tagli o pieghe per poter passare dalla superficie piana alla superficie reale.

Dal piano alla superficie

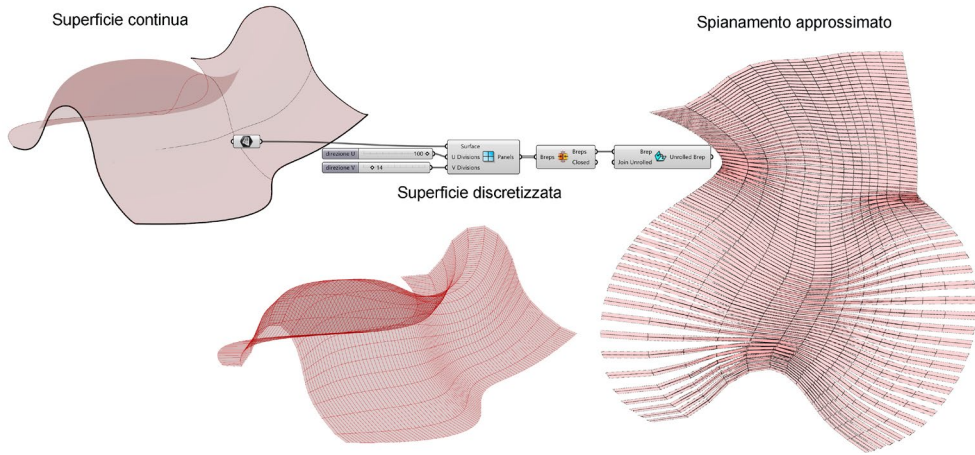


Fig. 23/ "Spianamento" approssimato di una superficie a curvatura variabile. Il disegno dello sviluppo è la rappresentazione delle deformazioni necessarie per passare dalla configurazione piana alla forma tridimensionale.

La superficie viene divisa in pannelli triangolari utilizzando le isocurve rettilinee, ad esempio utilizzando la coordinata U . Ponendo $V=1$ e $U=n$, la superficie viene divisa in $2n$ triangoli. In questo processo, i bordi rettilinei della superficie sono considerati indeformabili, mentre i bordi curvi saranno deformabili. Questo significa che i bordi curvi devono subire piegature o deformazioni per consentire alla superficie piana di configurare la superficie di progetto (Fig.22).

Superfici a curvatura variabile

Utilizzando lo stesso processo per la definizione dello "spianamento" di una qualsiasi superficie a curvatura variabile si ottengono le diverse rappresentazioni delle deformazioni necessarie per costruire la superficie, tagli o pieghe.

Attribuendo i valori ad U e V si divide la superficie in pannelli quadrilateri piani nello sviluppo della superficie poliedrica ci saranno tagli e sovrapposizioni che dipendono dalla curvatura della superficie e dalla direzione assunta come prevalente (Fig. 23).

5 Tecniche

L'evoluzione tecnologica nell'ambito della modellazione digitale offre strumenti e metodi sempre più accessibili per rappresentare, ma soprattutto per simulare processi fisici. Pur essendo insostituibile per le sue elevate potenzialità euristiche, soprattutto in alcuni ambiti come quello del design, il prototipo fisico è sempre più connesso e controllato attraverso il suo analogo digitale, spesso definito *Digital Twin*. Introdotto da Michael Grieves¹ nel 2002 il concetto di *Digital Twin* nasce dall'esigenza di effettuare test su un modello digitale in grado di consentire la valutazione degli effetti reali in un ambiente simulato. I progressi nell'ambito del digitale dalla metà del secolo scorso ad oggi hanno aumentato le capacità di elaborazione e comunicazione in modo esponenziale. È possibile creare una rappresentazione digitale sempre più attendibile del nostro mondo fisico, degli oggetti in esso contenuti e delle condizioni ambientali.

¹ Grieves M. 2017.

È possibile raccogliere, elaborare e memorizzare quantità di dati prima inimmaginabili, creare e utilizzare le informazioni in modo molto più economico ed efficace rispetto al passato, costruire *repository* di conoscenza e predisporre specifici algoritmi che possono aiutare a prendere decisioni efficaci ed efficienti anche utilizzando dei processi di AI.

Il vantaggio di prevedere effetti è uno degli scopi principali della modellazione digitale, inizialmente limitato al solo aspetto percettivo. Senza entrare nel merito delle enormi potenzialità derivanti dall'impiego dei *Digital Twins* nei diversi ambiti, in questo testo ne è stato sperimentato l'utilizzo, soprattutto per quanto riguarda la possibilità di simulare alcuni comportamenti fisici.

Le applicazioni rappresentano solo un primo passo che tende a connettere le diverse azioni del processo progettuale con un approccio computazionale. Da un punto di vista metodologico i casi studio sono esemplificativi di un percorso che ha inizio nell'ambiente digitale con la costruzione di un modello in VPL e, quindi, di uno *script*. Modificando gli input dello *script* il progettista può generare diverse soluzioni tra cui scegliere autonomamente o anche attivare processi di *machine learning* che lo affiancano nel processo decisionale. Definita la soluzione si procede alla realizzazione del prototipo fisico, il cui confronto con il gemello digitale consente di valutare lo *script* e l'attendibilità della simulazione.

Una fase cruciale del processo è rappresentata proprio dall'analisi critica del prototipo. In base ai risultati si definiscono, infatti, le azioni correttive che consentono di implementare lo *script* con l'obiettivo di ottenere un modello in VPL adattivo, in grado di simulare virtualmente, nel modo più attendibile possibile, il comportamento del sistema anche in relazione ai materiali utilizzati.

In particolare, il *Digital Twin* in questo caso dovrà,

ad esempio, consentire di simulare il movimento di una forma dalla sua configurazione piana a quella spaziale, in modo da aiutare il progettista a definire i vincoli e le forze da applicare per il funzionamento del prototipo reale.

La ricerca è, quindi, orientata a definire un *Digital Twin* sempre più prestante, cioè più vicino alle caratteristiche fisiche reali in modo da ridurre il *gap* esistente tra prototipo e prodotto. Questo significa lavorare sulla costruzione di specifici *script* che consentano di ridurre al minimo l'approccio empirico basato sui test dei prototipi fisici e, quindi, sul tradizionale metodo euristico *trial and error*.

L'obiettivo è quello di trasformare il prototipo direttamente in un prodotto, sfruttando le opportunità offerte dalla *digital fabrication* e dall'industria 4.0.

La diffusione delle tecniche di fabbricazione digitale, in particolare di quelle sottrattive (CNC e laser cut), stanno introducendo un cambiamento sostanziale soprattutto nel mondo del design, favorendo la diffusione di metodologie di fabbricazione che, a partire da un pannello piano, consentano di realizzare sia superfici sviluppabili che superfici a doppia curvatura.

La conoscenza delle caratteristiche geometriche di una superficie è la base per individuare soluzioni in grado di ottimizzare la costruzione di un oggetto basato su questi principi.

In questo ambito la sviluppabilità e i metodi utilizzati per determinare lo "spianamento" approssimato di una superficie non sviluppabile, sono la premessa fondamentale per definire possibili approcci teorici e pratici.

Inoltre, concepire una struttura che cambia stato e si trasforma passando da una configurazione piana ad una forma tridimensionale, apre il campo a sperimentazioni nell'ambito dei sistemi cinetici responsivi che sulla geometria del movimento si fondano.

Da un punto di vista metodologico sono state definite applicazioni strategiche con l'obiettivo di sperimentare l'uso di *script* per la generazione delle superfici, di definire nuovi *script* per simulare digitalmente il processo cinetico dei sistemi e per utilizzare alcune particolari tecniche che consentono di modificare le caratteristiche fisiche dei materiali, in particolare le tecniche del *kerfing* del *kirigami*.

Uno degli obiettivi fondamentali è proprio quello di esplorare le possibilità offerte dall'uso dei modelli digitali per riprodurre alcuni specifici comportamenti fisici della struttura.

Oggetto di studio è la progettazione di configurazioni complesse che possono essere costruite a partire da una superficie piana attraverso una strategia che si fonda sulla simulazione del processo cinetico ricostruito in modo biunivoco: dal piano allo spazio e viceversa.

Punto di partenza è la definizione delle due posizioni limite, quella piana e quella di progetto, che consentono di circoscrivere un range di variabilità entro il quale rappresentare le infinite configurazioni che una forma può assumere in un determinato intervallo. L'individuazione delle due posizioni limite dipende in primo luogo dalla geometria ma è anche funzione di altri fattori legati alle caratteristiche fisiche del materiale. Obiettivo è simulare il reale comportamento della struttura in ambiente digitale per progettare i vincoli in relazione alla scala e al materiale. I limiti geometrici sono solo una delle componenti del processo, tali limiti diventano più restrittivi quando si introducono i parametri che consentono di controllare anche il comportamento del materiale. Per esempio, se dal punto di vista geometrico il valore della curvatura massima dipende solo dalla configurazione della superficie, l'utilizzo di un materiale con determinate caratteristiche di elasticità e flessibilità può imporre un limite più restrittivo.

Coerentemente con la trattazione teorica le diverse tipologie di superfici oggetto della sperimentazione sono state scelte in base alla classificazione differenziale; pertanto, i casi studio sono stati raggruppati in relazione alla curvatura gaussiana:

- superfici sviluppabili a singola curvatura o a curvatura nulla;
- superfici a doppia curvatura negativa;
- superfici a doppia curvatura positiva.

In relazione ai metodi e alle tecniche tre sono le questioni fondamentali affrontate nel testo:

1. come determinare la forma piana che consenta di costruire una superficie con un materiale flessibile e/o deformabile;
2. come rendere flessibile un materiale o aumentarne la flessibilità e/o la deformabilità;
3. come progettare i vincoli di una struttura utilizzando un approccio cinetico.

La prima questione affrontata, si riferisce alla disciplina della geometria descrittiva e differenziale, mentre le altre questioni coinvolgono alcuni principi fisici fondamentali. Tali principi sono stati brevemente richiamati in questa trattazione proprio per inquadrare gli approcci sperimentali e gli scenari aperti, con l'obiettivo di stimolare ricerche interdisciplinari soprattutto nell'ambito del design.

Da un punto di vista fisico un materiale può essere più o meno flessibile, elastico o deformabile; tuttavia, esistono tecniche che consentono di modificare alcune caratteristiche fisiche del materiale, come il *kerfing* e il *kirigami*, e tecniche che consentono di simulare processi e di generare forme utilizzando materiali elastici, come la tecnica del *form-finding*.

Nel testo sono state analizzate e applicate alcune di queste tecniche che consentono di aumentare la flessibilità e la deformabilità di un materiale rigido per realizzare superfici, sia sviluppabili che non sviluppabili, a partire da un pannello piano.

Dal piano alla superficie

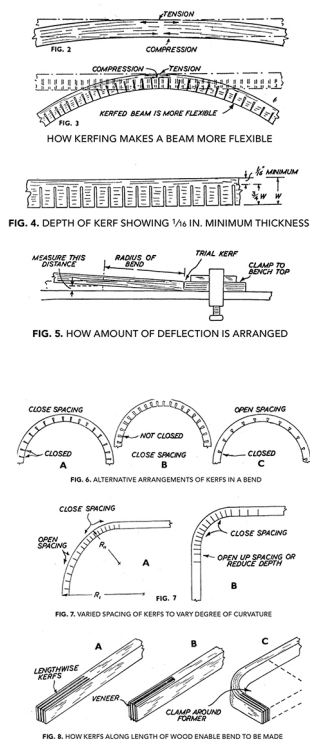


Fig. 1/ Kerfing tradizionale. Immagini da Hayward Charles Harold. *The Woodworker: 1939-1967, Volume I & II. Tools & Techniques.*

L'obiettivo è quello stimolare la sperimentazione di processi che consentono di costruire forme con materiali flessibili e/o elastici tagliando elementi planari.

Kerfing

La conoscenza delle proprietà geometriche delle superfici permette di affrontare e risolvere molti problemi legati alla costruzione di forme complesse e l'utilizzo delle regole geometriche è da sempre la guida fondamentale che accompagna il progettista dalla teoria alla pratica².

La conoscenza delle tecniche di fabbricazione digitale e la diffusione degli strumenti di progettazione parametrica, basati sulla geometria, stanno cambiando il modo di pensare del progettista.

I progressi in questo campo promuovono l'uso sperimentale di nuovi materiali ma anche l'uso innovativo di materiali tradizionali.

La ricerca nel campo della fabbricazione di superfici complesse passa dal *paneling*³ al *kerfing*, una tecnica sottrattiva antica che consente di trasformare un materiale rigido in un materiale flessibile e, in parte, deformabile tagliando opportunamente la superficie piana in modo che possa assumere determinate configurazioni. Questa tecnica consente la produzione di superfici a curvatura singola e doppia con grande precisione, ad un costo molto competitivo rispetto ad altre soluzioni costruttive. Gli elementi prodotti possono essere utilizzati in una vasta gamma di applicazioni architettoniche, funzionali, di rivestimento o anche di collaborazione strutturale minore⁴.

Il *kerfing* è una tecnica che combina tradizione e innovazione. Utilizzando tagli strategici su un materiale, come il legno, è possibile piegarlo senza l'uso di stampi o metodi di piegatura tradizionali. Questo permette di mantenere la continuità della superficie

² Pottmann H. 2015.

³ Lanzara E. 2019.

⁴ Loyola M. 2017.

di progetto, evitando la necessità di giunti visibili o interruzioni nella superficie.

Inoltre, l'integrazione di strumenti digitali di ottimizzazione parametrica e le tecniche di produzione per manifattura digitale ampliano le possibilità di questa tecnica. Questi strumenti consentono di progettare in modo preciso i tagli necessari e di ottimizzare il processo per ottenere risultati consistenti e di alta qualità.

Questa combinazione di antica conoscenza artigianale e moderna tecnologia digitale apre nuove possibilità nel campo della lavorazione del legno e non solo, consentendo la realizzazione di progetti complessi e innovativi con una maggiore efficienza e precisione.

“Un kerf è un taglio fatto da una sega, e un certo numero di tagli fatti su un pezzo di legno gli permetterà di essere piegato e modellato senza vapore. Questo processo è noto come kerfing e può essere utilmente impiegato in tutti i tipi di costruzione.”

Così il noto ebanista editore inglese Charles Harold Hayward introduce questa tecnica ai primi del Novecento, considerandola alternativa alla piegatura a vapore⁵. Sottraendo materiale in alcuni punti del pannello in modo da migliorarne la flessibilità, il massimo raggio di curvatura che il pannello può raggiungere dipende dal materiale, dallo spessore del pannello, dalla tipologia del taglio e dalle diverse modalità di distribuzione dei tagli sul pannello in relazione alla curvatura della superficie di progetto (Fig.1). La tecnica tradizionale consente di costruire solo superfici a singola curvatura ed è particolarmente adatta a realizzare superfici cilindriche (Fig.2).

Tipologie di taglio

Le tipologie di taglio possono essere classificate in funzione di tre diverse modalità di incisione del pannello⁶ (Fig.4): incisioni su un solo lato, incisioni su

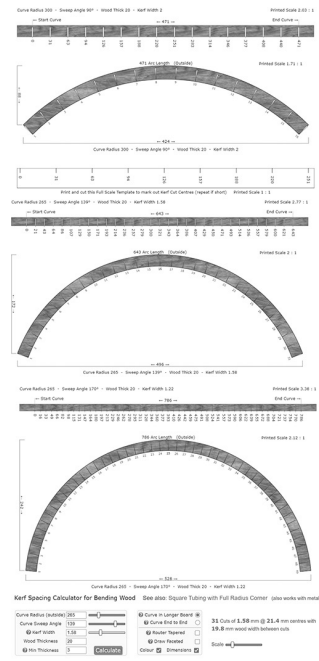


Fig. 2/ Kerfing tradizionale: in un pannello di un determinato spessore la curvatura dipende dalla larghezza, dalla profondità e dalla distanza dei tagli.

Fig. 3/ Applicazione kerfing tradizionale per la realizzazione di superfici cilindriche.

⁵ Charles Harold Hayward è stato un ebanista inglese, editore della rivista *The Woodworker*, illustratore e autore di numerosi libri sulla lavorazione del legno del XX secolo.

⁶ Capone M. 2019.

Dal piano alla superficie

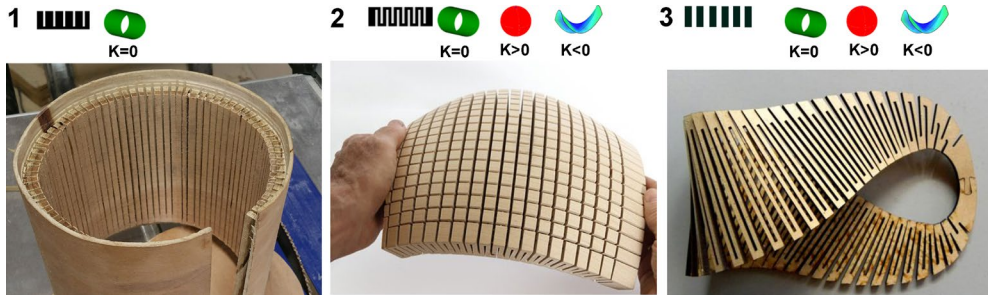


Fig.4/ Classificazione delle diverse tipologie di taglio. Taglio su un solo lato, tagli su entrambi i lati e tagli passanti.

entrambi i lati e tagli passanti. La classificazione ha l'obiettivo di esplicitare le caratteristiche di ciascuna tipologia soprattutto in relazione alla curvatura di progetto in modo da definire un processo replicabile che contribuisca a diffondere la sperimentazione di tale tecnica in campi diversi.

Tagli su un solo lato

Il *kerfing* tradizionale consiste in una serie di tagli praticati su un lato del pannello, con questa tecnica il lato opposto al taglio appare come una superficie continua.

La distanza, la larghezza e la profondità dei tagli determinano la flessibilità del pannello e il raggio di curvatura. Gestendo parametricamente i rapporti tra queste variabili è possibile ottimizzare la geometria dei tagli in funzione della curvatura di progetto, in questo modo quando il pannello è messo in forma i bordi interni dei tagli si uniscono per creare la curva desiderata (Fig.5).

La profondità dei tagli e lo spessore residuo del pannello per la piegatura dipendono dai diversi materiali e dallo spessore complessivo del pannello. In altri termini se il materiale è troppo rigido rischierà comunque di spaccarsi; pertanto, è necessario calcolare la curvatura massima in funzione dell'elasticità del materiale.

Per flettere un materiale con la minima perdita di resistenza, la giusta profondità di intaglio e la spazia-



tura, generalmente si determinano in base ai risultati di test empirici. Per evitare la concentrazione di sollecitazioni nella parte terminale del taglio si può variare la profondità dei tagli in relazione alla curvatura. Utilizzando tagli costanti si possono ottenere superfici con una stessa curvatura, modificando la geometria dei tagli in funzione della curvatura di progetto si possono, invece, ottenere distribuzioni ottimizzate.

La forma del taglio dipende dallo strumento utilizzato, sega, fresa o *laser cutter*, ogni strumento ha le proprie caratteristiche e limitazioni, e la scelta dipende dalle esigenze specifiche del progetto.

L'impiego combinato di macchine a controllo numerico (CNC) e strumenti parametrici offre un'enorme flessibilità nel processo di taglio e piegatura.

La programmazione parametrica consente al progettista di definire in modo preciso i parametri dei tagli in base alla forma desiderata, consentendo una maggiore personalizzazione e adattabilità del processo alla geometria specifica del progetto.

Le ricerche in questo campo si concentrano principalmente sulla definizione di approcci parametrici che possano supportare il progettista nell'ottimizzazione dei tagli in base alle caratteristiche del materiale, alla forma desiderata e ad altri fattori rilevanti. Questo approccio consente di massimizzare l'efficienza del processo, riducendo gli sprechi di materiale e migliorando la qualità del risultato finale⁷ (Fig. 6).

Fig. 5/ Tagli su un solo lato del pannello. Distribuzione dei tagli in funzione della configurazione di progetto. Menges 2011.

Fig. 6/ Approccio computazionale per la definizione della geometria dei tagli in funzione della superficie di progetto.

⁷ Menges A. 2011.

Dal piano alla superficie

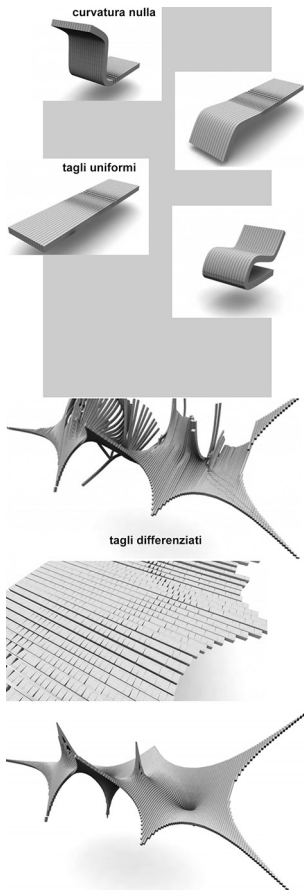
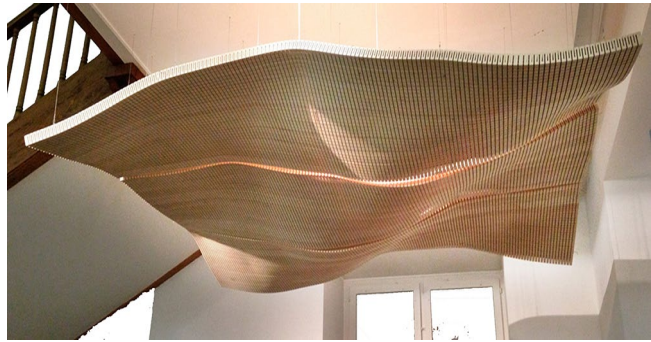


Fig. 7/ Pannelli con griglia di incisione bifacciale prodotti da Dukta.

Fig. 8/ Tagli su due lati differenziata: sperimentazione di LMN Tech Studio.

8 In questa sperimentazione di LMN Tech Studio l'approccio computazionale consente di realizzare i tagli in funzione della superficie di progetto.

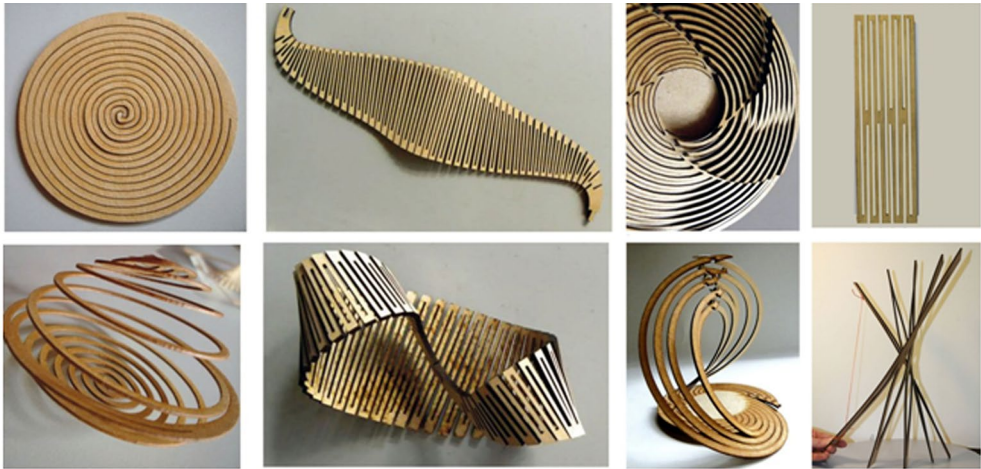


Tagli su entrambi i lati

Evoluzione del metodo tradizionale è la tecnica di incisione su entrambi i lati del pannello. Anche in questo caso i tagli possono essere uniformemente distribuiti sui due lati, oppure distribuiti in modo differenziato in funzione della superficie di progetto. Esistono prodotti industriali basati sulla distribuzione uniforme dei tagli, si tratta di pannelli che, grazie alla griglia di incisione bifacciale, possono assumere anche curvature variabili (Fig. 7).

Processi di progettazione ottimizzati sono, invece, quelli che tendono ad individuare solo i tagli indispensabili e funzionali ad una determinata configurazione. In questo caso l'approccio computazionale consente di ottenere una grande flessibilità nella fase di progetto e un risparmio per la fabbricazione sia in termini di tempo che di materiale. La tendenza è quella di definire una geometria dei tagli customizzata in modo tale che le facce all'interno di ogni taglio risultino essere a filo quando l'oggetto assume la sua configurazione finale. Questa tecnica consente di progettare la geometria del taglio in modo da ottimizzarne la produzione con un risparmio che aumenta in modo esponenziale in funzione della complessità della superficie⁸.

Il taglio sui due lati del pannello consente teoricamente di realizzare tutte le superfici: sviluppabili, a curvatura positiva, negativa e variabile.



Tagli passanti

Il taglio passante è una delle tipologie più diffuse, soprattutto in relazione all'utilizzo delle tecnologie di fabbricazione digitale. Anche questo tipo di taglio consente teoricamente la costruzione di qualsiasi tipo di superficie in relazione alle diverse geometrie di taglio.

Il taglio passante offre, infatti, un'enorme flessibilità in termini di configurazioni possibili, poiché non solo consente di ottenere superfici curve tagliando un pannello piano, ma può anche generare infinite configurazioni variando la geometria e la distribuzione dei tagli. Questo significa che i progettisti possono sfruttare questa tecnica per creare forme anche molto complesse, definendo i pattern di taglio in relazione alle esigenze specifiche del progetto.

Da un punto di vista metodologico sono state individuate quattro categorie principali in relazione alle diverse geometrie utilizzate per il taglio⁹: taglio a *spirale*, taglio a *zig-zag*, taglio a *frange* e taglio a *fessura* (Fig.9).

Il taglio a *spirale* è un taglio continuo (singolo o doppio) che parte dal centro fino al bordo del pannello che in questo modo diventa flessibile in direzione ortogonale al piano.

Fig. 9/ Tagli passanti diverse tipologie: taglio a spirale, taglio a zig-zag, taglio a frange e taglio a fessura.

⁹ Munoz P. 2012.

Dal piano alla superficie

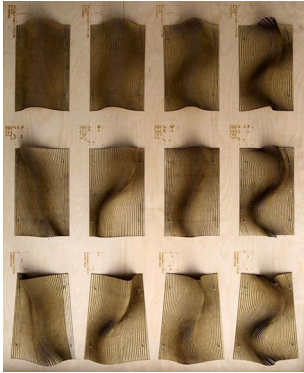


Fig. 11/ Tagli passanti. Distribuzione dei tagli in funzione della superficie di progetto. Mamou-Mani Architects and Buro Happold Engineering, the Wooden Waves, vincitore del Golden Winner 2016 - American Architecture Prize.

La forma tridimensionale dipenderà dalla geometria delle linee di taglio.

Il taglio a *zig zag* consiste in una serie di tagli che partono dal bordo del pannello in modo sfalsato. L'elasticità che si può ottenere dipende dalla frequenza, dalla sovrapposizione dei tagli e dallo spessore del pannello.

La flessibilità può anche essere multidirezionale.

Il taglio a *frangia* consiste in una serie di tagli distribuiti sulla superficie e che giungono fino al bordo, con una regola geometrica che dipende dalla forma di progetto. La flessibilità dipende dalla lunghezza dei tagli e dalla geometria.

Il taglio a *fessura* è caratterizzato da tagli lineari distribuiti generalmente secondo un reticolo. Il piano diventa flessibile lungo la direzione dei tagli e questa flessibilità può essere controllata in funzione della curvatura utilizzando diverse densità di taglio. Lo spazio vuoto è molto importante perché il contatto dei bordi rappresenta un limite fisico al movimento. L'obiettivo è quello di sviluppare processi che consentano di controllare i tagli in base alla curvatura della superficie di progetto e alle caratteristiche del materiale.

Questo approccio mira a migliorare la precisione e l'efficienza del processo di lavorazione, consentendo di ottenere risultati sempre più accurati.

Per raggiungere questo obiettivo, è necessario sperimentare e sviluppare nuove tecniche e metodologie che consentano di adattare i tagli alle specifiche esigenze della superficie e del materiale.

L'utilizzo combinato di algoritmi di ottimizzazione, che tengano conto della geometria tridimensionale dell'oggetto, e dei risultati di test empirici realizzati per comprendere meglio come i tagli influenzano la deformazione e la forma finale, è la metodologia utilizzata per migliorare le tecniche di taglio in modo da ottenere risultati sempre più efficienti.

La tecnica del *kerfing* offre una maggiore flessibilità al pannello attraverso la rimozione di materiale, modificandone però la resistenza. Le ricerche più innovative in questo campo si concentrano sulla definizione di processi che individuino soluzioni ottimizzate, cioè tagliare solo dove è necessario per ottenere la superficie di progetto desiderata senza compromettere la struttura.

A tal proposito sono stati presi in considerazione alcuni fondamentali casi studio per comprendere i diversi approcci per la distribuzione ottimizzata dei tagli per la fabbricazione di superfici a curvatura variabile.

I casi studio analizzati tendono ad utilizzare metodi empirici per individuare le soluzioni ottimali, valutando criticamente i risultati dei test. Un esempio emblematico è l'installazione *Wooden Waves* di Mamou-Mani Architects e Buro Happold Engineering, vincitrice del Golden Winner 2016 - American Architecture Prize.

Questo progetto è il risultato di sperimentazioni su pattern di taglio distribuiti e dimensionati in base alla curvatura variabile della superficie di progetto. L'installazione è un esempio di struttura sospesa, non strutturale, generata utilizzando un modello di taglio che segue le linee di curvatura. Più di cento prototipi sono stati testati per definire il modello

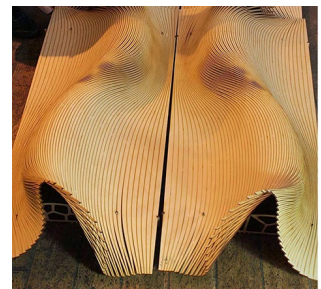
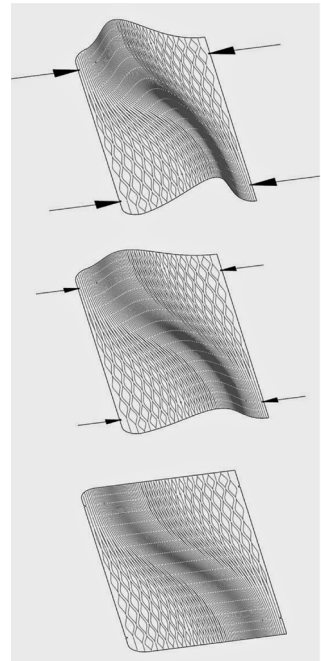


Fig. 12/ Tagli passanti. Distribuzione dei tagli in funzione della superficie di progetto. Mamou-Mani Architects and Buro Happold Engineering, the *Wooden Waves*, vincitore del Golden Winner 2016 - American Architecture Prize.

Dal piano alla superficie

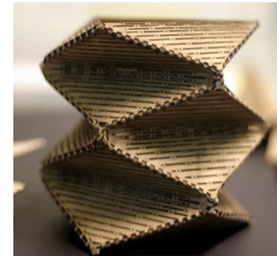
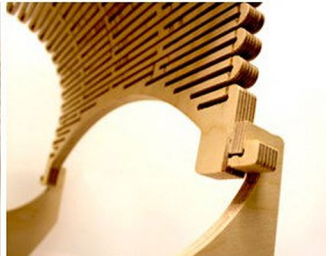
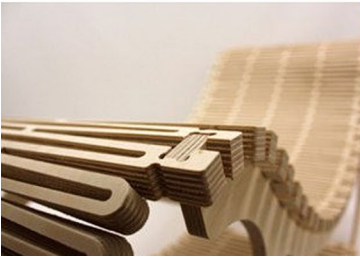
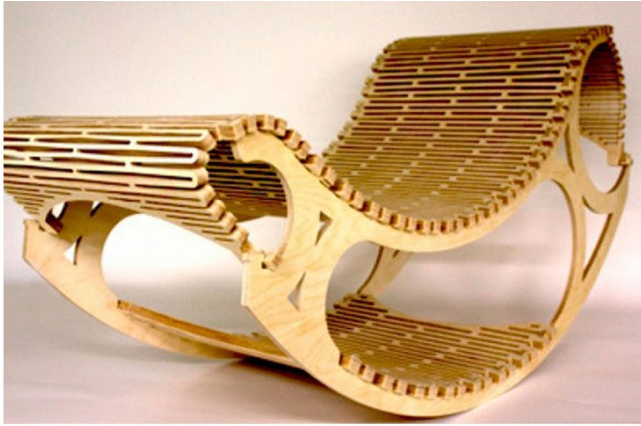


Fig. 13/ Tagli lineari. Distribuzione uniforme dei tagli.

digitale finale (Figg. 11 e 12), controllare la curvatura del pezzo finale e generare i file necessari per la fabbricazione digitale dei singoli componenti.

La tendenza della ricerca attuale è quello di sviluppare percorsi che conferiscano maggiore rigore ai processi definiti empiricamente, sfruttando la conoscenza della geometria per simulare processi e controllare la forma in modo da individuare la soluzione progettuale più adatta al caso.

Estrapolare questi principi meccanici per la costruzione di superfici a doppia curvatura è la sfida principale della ricerca in corso, poiché per consentire curvature positive o negative è necessario definire pattern di taglio multidirezionali.

Pattern di taglio

L'approccio al tema del *kerfing* si basa sulla definizione dei diversi pattern di taglio che possono esse-



Fig. 14/ pattern di taglio uniformemente distribuiti su una griglia.

re uniformemente distribuiti su un pannello oppure possono adattarsi ad una griglia che si genera in funzione della configurazione della superficie.

Moltissimi sono i pattern di taglio in corso di sperimentazione con geometrie variabili, che possono comunque essere raggruppati in due categorie principali: quelli lineari e quelli non lineari (Fig. 14).

Nei pattern lineari, il disegno è composto da elementi che seguono tracciati rettilinei. Questi tracciati possono essere disposti in modo regolare o irregolare sulla superficie del materiale, a seconda delle necessità del progetto.

Nei pattern non lineari, invece, il disegno è composto da figure geometriche più complesse, che spesso si combinano con andamenti a spirale o altre forme curve. Questi pattern possono offrire una maggiore flessibilità e adattabilità alla forma della superficie di progetto.

L'approccio computazionale consente di sperimentare e analizzare in modo efficiente queste diverse geometrie di taglio, valutando le loro prestazioni e caratteristiche in relazione al materiale e alla forma

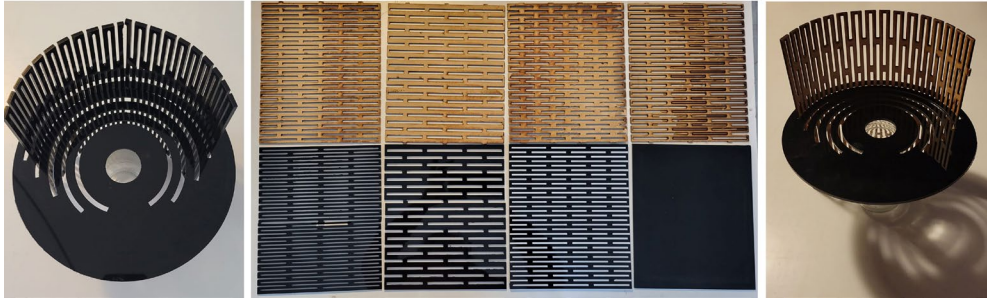


Fig. 15/ Alcuni dei campioni realizzati per definire la distribuzione del pattern in funzione della curvatura. Materiali utilizzati: MFD 3 mm e plexiglass 3 mm

di progetto. L'analisi critica delle applicazioni aiuta a definire metodologie replicabili e ottimizzate per l'utilizzo di ciascuno di questi pattern in relazione agli obiettivi definiti.

Pattern lineare

Tra i pattern lineari il più diffuso è il pattern noto come *living hinges*, che introducendo una discontinuità nel materiale lo rende flessibile in una direzione. Questo pattern di taglio è caratterizzato da tagli sfalsati distribuiti sulla superficie in un'unica direzione.

Il materiale è riconfigurato come un insieme di elementi lineari, quando il pezzo è sottoposto a carichi di flessione, i tagli sfalsati permettono alla superficie di flettersi lungo la direzione dei tagli stessi. Il materiale si comporta, quindi, come un insieme di elementi lineari che si torcono nel senso del loro asse maggiore, collegati tra loro da elementi longitudinali corti e rigidi. La forma e la lunghezza di questi elementi determinano la flessibilità complessiva del sistema. Dal punto di vista metodologico, la prima fase di sperimentazione consiste nella produzione di campioni cilindrici senza alcuna ottimizzazione. Questi campioni vengono realizzati utilizzando materiali diversi con spessori variabili e tagliati con *laser cutter*. L'obiettivo è acquisire familiarità con il problema tecnico e identificare eventuali soluzioni potenziali attraverso un approccio empirico.

Questa fase esplorativa fornisce una base per lo sviluppo successivo del processo, permettendo di comprendere meglio le caratteristiche del materiale e i comportamenti del pattern di taglio *living hinges*, così da poter ottimizzare il processo nelle fasi successive.

Realizzare diversi campioni per testare la flessibilità e il comportamento del materiale in risposta ai diversi parametri del pattern di taglio è fondamentale per comprendere appieno le caratteristiche del processo e per ottimizzarne l'efficacia.

Nel caso della realizzazione di una semplice porzione di cilindro circolare retto, la definizione dei parametri per controllare il raggio di curvatura massimo è cruciale. Questi parametri includono la lunghezza, la larghezza, la distanza e l'accavallamento dei tagli, oltre allo spessore e alle proprietà fisiche del materiale utilizzato.

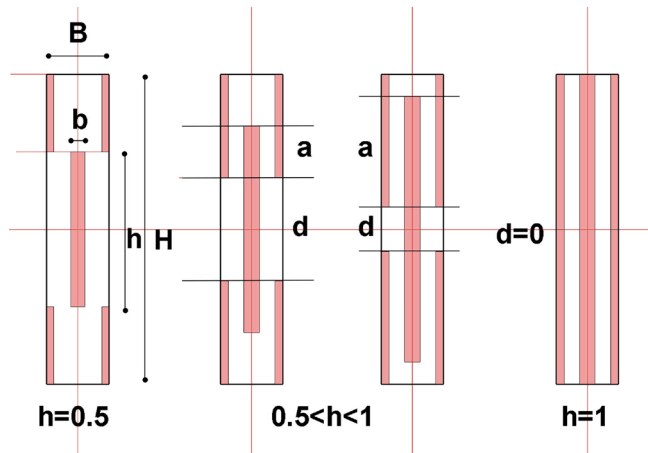
La costruzione dei campioni ottenuti con le diverse combinazioni di questi parametri permette di determinare quali configurazioni producono il risultato desiderato in termini di curvatura massima, flessibilità e resistenza del materiale. Questo processo di sperimentazione iterativa aiuta a raffinare e ottimizzare il processo di taglio per ottenere le prestazioni desiderate con il minor numero possibile di prove ed errori.

Una volta identificati i parametri ottimali, è possibile utilizzarli per guidare la progettazione e la produzione di superfici più complesse, applicando la conoscenza acquisita durante la fase di sperimentazione sui campioni.

Lo *script* per definire le diverse geometrie di taglio parte dal modulo di base, matrice di taglio, un rettangolo in cui l'altezza H si pone uguale ad 1 e la base $0 < B < 1$ in modo da generare gli infiniti rettangoli con diversi rapporti tra i lati tra due posizioni limite: quando $B=0$ il rettangolo si riduce

Dal piano alla superficie

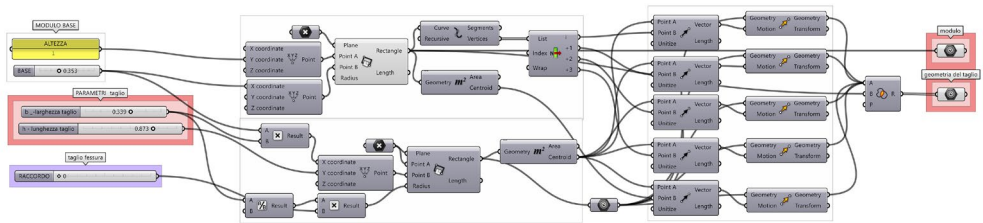
Fig.16/ Definizione dei parametri per il controllo della matrice di taglio.



ad un segmento uguale ad H e quando $B=1$ si ottiene un quadrato (Fig. 16). I parametri utilizzati per controllare la geometria del pattern di taglio sono la base b e l'altezza h del rettangolo che rappresenta, appunto, il taglio. Anche in questo caso sono stati individuati intervalli di variazione tra posizioni limite. In particolare il valore della base è $0 < b < 0.5$, per $b=0$ il taglio si riduce ad un segmento per $b=0.5$ il taglio è largo $B\sqrt{2}$, analogamente h varia $0.5 < h < 1$, per $h=0.5$ la lunghezza del taglio è $H\sqrt{2}$, per $h=1$ la lunghezza del taglio $h=H$.

Il parametro h definisce l'accavallamento a dei tagli adiacenti o la distanza d tra i tagli consecutivi da cui dipende la flessibilità del pannello (Fig.16). In particolare, per b tendente ad 1 la distanza d tra i tagli tende a 0 e maggiore sarà l'accavallamento, maggiore sarà la flessibilità del pannello. Fondamentale è stabilire i valori minimi della distanza tra i tagli in funzione del materiale affinché possa assumere la massima flessibilità senza rompersi. La variazione dei parametri tra le posizioni limite permette di esplorare una vasta gamma di configurazioni di taglio e di valutare il loro impatto sul comportamento del materiale.

I prototipi presentati in questo testo sono basati



sui risultati dei test effettuati su diversi materiali, con diversi spessori, variando la distribuzione del pattern. L'ottimizzazione del pattern di taglio è uno degli obiettivi fondamentali del processo. Ridurre il numero di tagli al minimo necessario è importante per massimizzare l'efficienza e minimizzare lo spreco di materiale, senza compromettere la flessibilità e la resistenza del pannello finale.

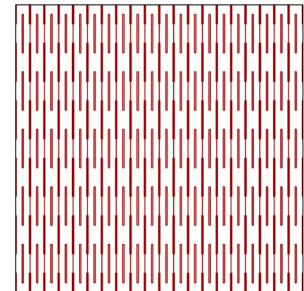
Oltre al pattern *living hinges* esistono molti altri *patterns* di taglio lineare che si sviluppano in più direzioni e che, quindi, consentono di realizzare superfici a doppia curvatura non rigate.

Tra questi pattern uno dei più efficienti è il pattern a Y che consente la torsione rotazionale e quindi consente l'espansione e la compressione della superficie in più direzioni (Fig. 26).

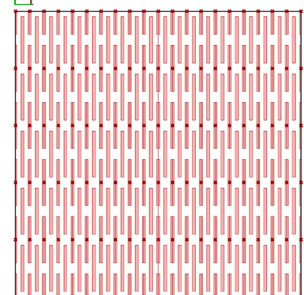
Distribuzione del pattern lineare

È interessante notare come la distribuzione del pattern di taglio sulla superficie dipenda dalla natura stessa della superficie e dalle sue caratteristiche geometriche. Per le superfici rigate, sia sviluppabili che non sviluppabili, il pattern di taglio viene distribuito utilizzando una griglia ottenuta tramite le isocurve rettilinee della superficie stessa.

Per le superfici non rigate a doppia curvatura, sia positiva che negativa, la distribuzione del pattern dipende dalle strategie utilizzate per discretizzare e determinare lo sviluppo approssimato della superficie quindi varia in base alla forma piana di partenza e alla curvatura della superficie.



matrice 1

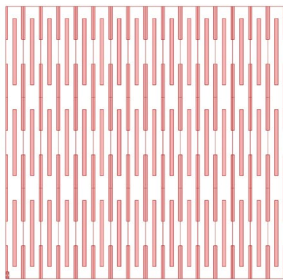
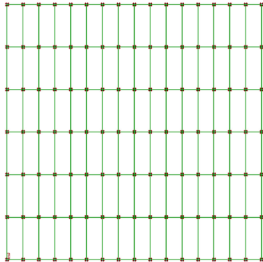
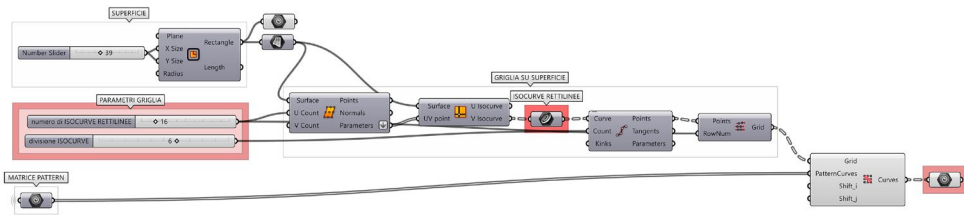


matrice 2

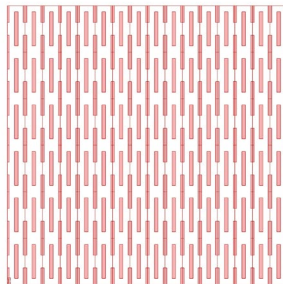
Fig.17/ Script per la distribuzione del pattern: stessa griglia matrici diverse.

Fig.18/ Distribuzione del pattern: stessa griglia matrici diverse.

Dal piano alla superficie



Griglia 1: 16 \ 3



Griglia 2: 16 \ 6

Fig.19/ Script per il controllo della griglia per la distribuzione del pattern di taglio.

Fig.20/ Distribuzione del pattern di taglio per la realizzazione dei campioni realizzati con la stessa matrice e griglie diverse.

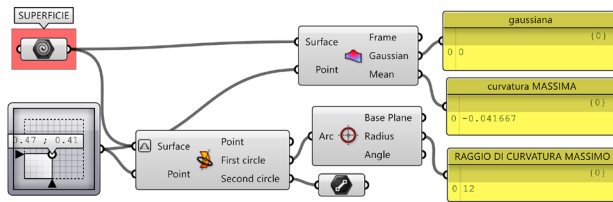
Lo *script* per distribuire il pattern su una superficie è stato definito a partire dalla superficie più semplice: il piano. In questo caso, la superficie viene divisa e considerata una qualsiasi schiera di isocurve rettilinee, poiché la direzione è indifferente nel caso del piano. I parametri che controllano la griglia includono il numero di isocurve rettilinee e il numero di parti in cui sono divise, variando questi parametri si ottengono griglie diverse e quindi distribuzioni diverse (Fig. 17).

La distribuzione uniforme del pattern sul piano ha permesso di ottenere i campioni che sono stati utilizzati per definire la distribuzione ottimale del pattern in funzione della massima curvatura prevista in relazione al materiale e al suo spessore.

La realizzazione dei prototipi ha consentito di definire alcuni approcci distinti soprattutto in relazione alla natura delle superfici. Da un punto di vista metodologico i casi studio possono essere raggruppati in tre categorie con crescente complessità: superfici rigate a singola curvatura, superfici rigate a doppia curvatura e superfici non rigate a doppia curvatura o a curvatura variabile.

Questa suddivisione riflette l'evoluzione e la diversificazione delle tecniche utilizzate per affrontare le sfide specifiche presentate da ciascuna categoria di superfici.

Per quanto riguarda le superfici rigate a singola curvatura la griglia si costruisce sulle isocurve rettilinee che saranno parallele, nel caso delle superfici cilindriche, incidenti, nel caso delle superfici coniche,



e tangenti allo spigolo di regresso, nel caso delle tangenziali. La distribuzione del pattern può essere uniforme o ottimizzata in base alle esigenze del progetto. Ad esempio, per una superficie cilindrica generica a curvatura variabile, il pattern di taglio può essere distribuito in modo differenziato in base alla curvatura della superficie (Fig. 24).

In questo caso poiché si tratta di una semplice superficie rigata di traslazione, per definire la distribuzione ottimizzata in funzione della curvatura si può far riferimento alla generatrice, alla curva di profilo. Il pattern di taglio unidirezionale si distribuisce utilizzando una griglia composta dalle isocurve rettilinee che non saranno equidistanti ma variano in funzione della curvatura della generatrice.

Una volta definita la griglia basata sulle isocurve rettilinee della superficie, i parametri per dimensionare la matrice e la distribuzione del pattern dipenderanno dai valori massimi della curvatura determinati in ambiente VPL (Figg.21, 22 e 23).

Questi valori massimi di curvatura saranno fondamentali per stabilire la densità della griglia e la distribuzione ottimale dei tagli lungo la superficie. Maggiore è la curvatura, più stretti saranno gli intervalli tra le isocurve rettilinee e più compatta sarà la distribuzione dei tagli. Viceversa, per curvature minori, gli intervalli tra le isocurve saranno più ampi e i tagli saranno distribuiti in modo più distanziato.

L'utilizzo di valori massimi di curvatura determinati in ambiente VPL assicura che la distribuzione del pattern di taglio sia ottimizzata per soddisfare le

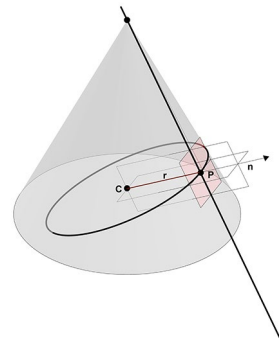
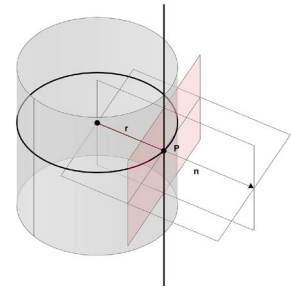


Fig.21/ In ambiente VPL è possibile conoscere il valore della curvatura e determinare agevolmente il raggio di curvatura massimo visualizzando cerchi osculatori in un qualsiasi punto della superficie

Fig.22/ In un cilindro circolare retto la curvatura è costante. Determinato il raggio di curvatura, si può ottimizzare la distribuzione del pattern di taglio

Fig.23/ In un cono circolare retto la curvatura è variabile quindi il pattern si definisce in base alla massima curvatura del pezzo.

Dal piano alla superficie

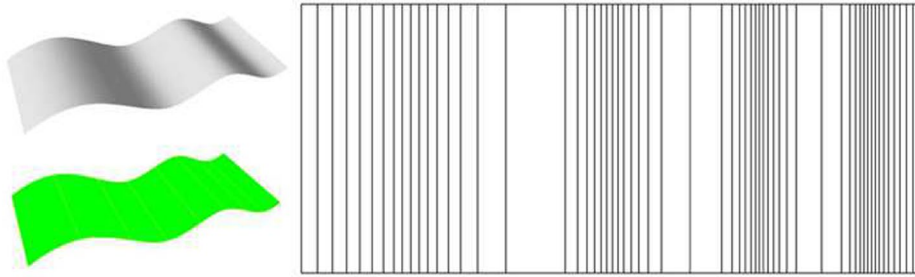
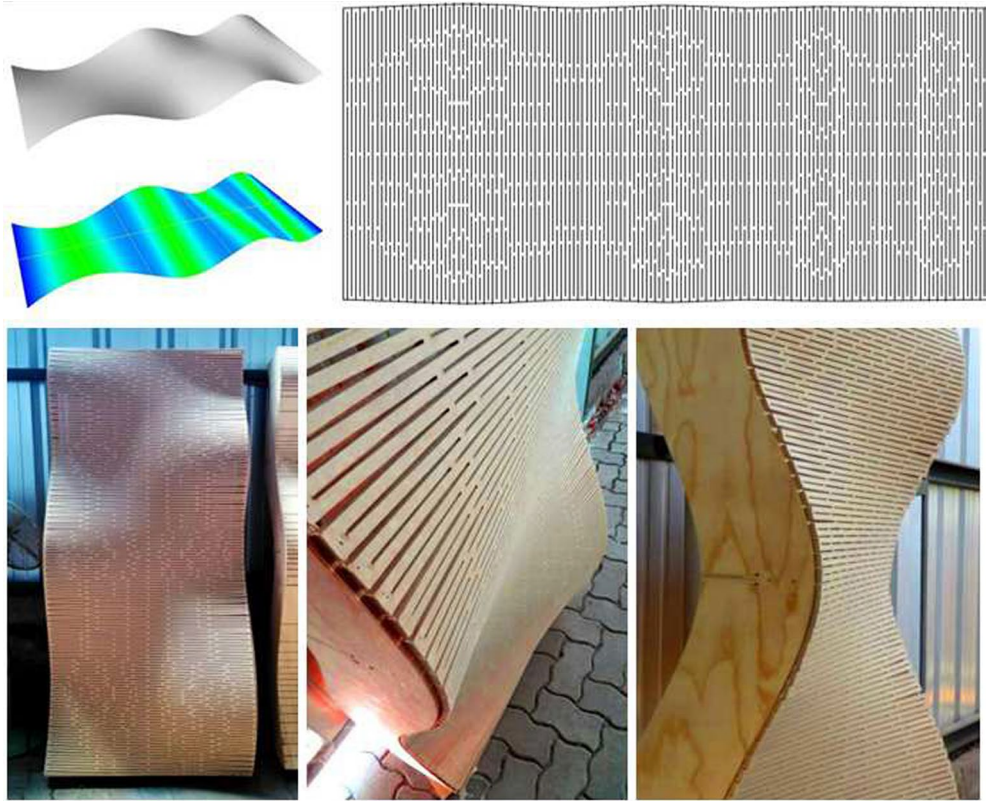


Fig.24/ Distribuzione ottimizzata su superfici a singola curvatura: tecnica tradizionale tagli su un solo lato. Prototipo di Loyola M. et al. 2017.

esigenze specifiche del progetto, garantendo al contempo che il materiale lavorato mantenga la sua integrità strutturale raggiungendo la flessibilità necessaria.

Questo approccio consente di adattare la distribuzione del pattern di taglio in modo efficace alle variazioni della curvatura della superficie, garantendo una distribuzione uniforme e ottimizzata dei tagli per ottenere il risultato desiderato (Fig. 24)

Analogamente per definire la distribuzione del pattern *living hinges* su una rigata a doppia curvatura si utilizza una griglia costruita sulle isocurve rettilinee della superficie. Nel caso di una superficie rigata generica a doppia curvatura, le generatrici saranno inclinate in modo diverso e più o meno distanti in funzione della curvatura della superficie.



Costruendo la griglia utilizzando queste isocurve, si otterrà una diversa deformazione della matrice di taglio, che permetterà una distribuzione ottimizzata dei tagli lungo la superficie. La deformazione della matrice sarà influenzata dalla variazione della curvatura della superficie, garantendo che i tagli siano distribuiti in modo uniforme e adattato alle caratteristiche geometriche specifiche della superficie. Anche in questo caso, questo approccio consente di adattare il pattern *living hinges* in modo efficace alle variazioni della curvatura della superficie, garantendo una distribuzione ottimizzata dei tagli. Le superfici a doppia curvatura non rigate rappresentano un caso estremamente complesso nel contesto del *kerfing*. Queste superfici richiedono una deformazione del materiale che deve essere in gra-

Fig.25/ Distribuzione ottimizzata su superfici rigate a doppia curvatura: pattern *slice hinges*. Prototipo di Loyola M. et al. 2017.

Dal piano alla superficie

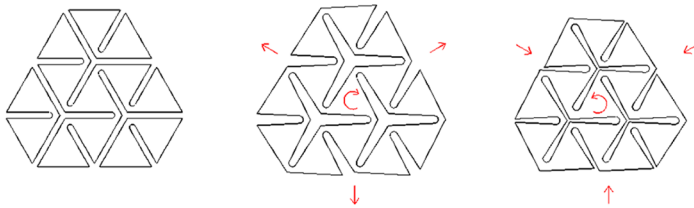


Fig.26/ Distribuzione del pattern multidirezionale su una superficie a curvatura variabile. Pattern Y. Prototipo di Loyola M. et al. 2017.

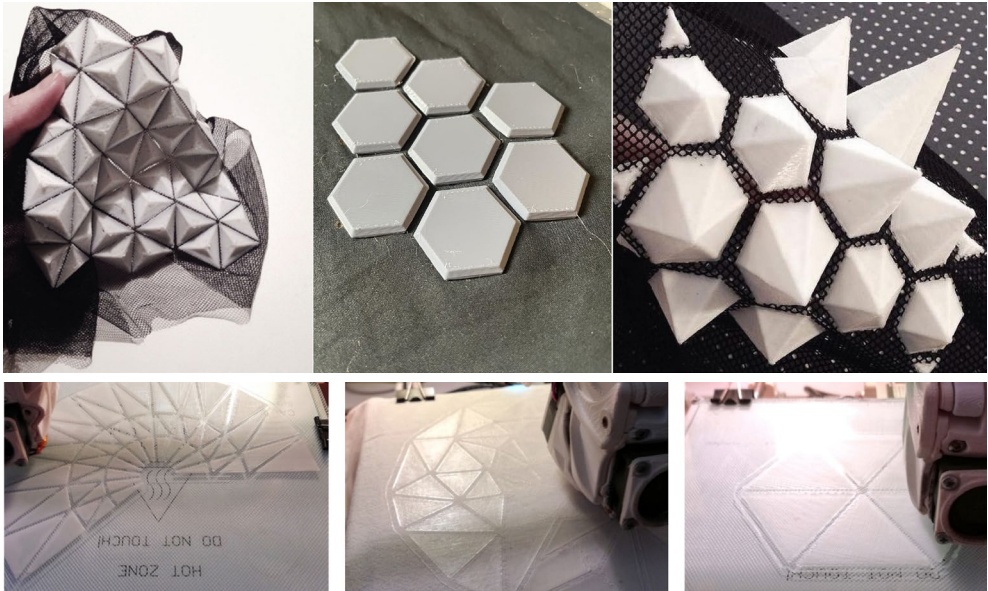
do di contrarsi ed espandersi nel suo piano senza compromettere la continuità della superficie.

Questo processo richiede una combinazione di competenze tecniche avanzate e progettuali, insieme a una profonda conoscenza delle proprietà del materiale utilizzato. Il pattern a Y, un motivo a tre braccia con simmetria centrale, è particolarmente adatto per costruire questa tipologia di superfici¹⁰. Calcolando la curvatura gaussiana media della superficie, è possibile determinare la dimensione della matrice base per il pattern.

Successivamente, uno *script* ricorsivo consente di definire una distribuzione ottimizzata dei tagli in funzione della curvatura della superficie.

In questo modo, nelle zone con valori di curvatura maggiore, la distribuzione del pattern sarà più compatta e la densità dei tagli aumenterà, consentendo

¹⁰ Loyola M. 2017.



una maggiore espansione o compressione del materiale. Questo approccio permette di adattare efficacemente il pattern di taglio alle variazioni complesse della curvatura della superficie, garantendo una distribuzione ottimizzata dei tagli in relazione alla superficie di progetto.

Tecniche sperimentali

Diverse sono le tecniche di sperimentazione in corso per la costruzione di superfici complesse a partire da una forma piana. La maggior parte di queste tecniche tende ad ibridare i diversi approcci e le diverse tecnologie di fabbricazione digitale. Tra queste l'utilizzo della stampa 3D su tessuto è una tecnica innovativa con molteplici potenzialità e applicazioni che vanno dal design alla moda.

In questo caso l'utilizzo di due materiali, il supporto tessile e il materiale utilizzato per la stampa 3D, implicano una serie di considerazioni complesse che sarebbe riduttivo generalizzare. Dal punto di vista geometrico, questa sperimentazione si basa sui

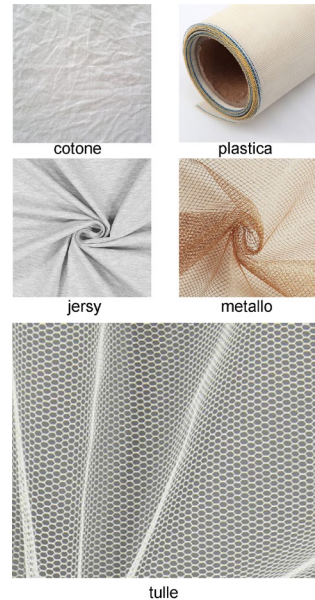


Fig. 27/ In alto: stampa 3D su tessuto sperimentazione.

Fig. 28/ In basso: supporti tessili.

principi del *kerfing*, dove il vuoto è rappresentato dal tessuto e il pieno dalla parte stampata. Questo approccio, sperimentato per la realizzazione di uno dei prototipi presentati nel testo, offre il vantaggio che il vuoto può estendersi senza le limitazioni legate al materiale, consentendo la creazione di forme complesse e flessibili. Inoltre, il supporto tessile può essere più o meno elastico.

Nel primo caso, la configurazione geometrica segue le regole definite per il *kerfing* e potenzialmente potrebbe essere utilizzata per costruire anche origami o in genere strutture pieghevoli. Nel caso in cui il supporto sia elastico, si aprono ulteriori possibilità di sperimentazione e applicazione.

Una delle possibili applicazioni di questa tecnica è la costruzione di *strutture auxetiche*, che si caratterizzano per la capacità di espandersi in tutte le direzioni quando vengono sottoposte a forze di trazione. Questo tipo di strutture offre interessanti opportunità nel campo dell'ingegneria dei materiali e del design avanzato.

A queste tecniche, che consentono di costruire superfici complesse a partire da una forma piana, si può sicuramente aggiungere, per completezza, la tecnica del *form-finding* che si basa sull'utilizzo di materiale tessile elastico.

Questa tecnica, come è noto, sfrutta le proprietà di deformazione del materiale tessile elastico per creare forme organiche e dinamiche, applicando forze e vincoli a una membrana di tessuto.

Il processo di *form-finding* inizia solitamente con la creazione di una membrana di tessuto elastico tesa su un telaio o supporto, a cui successivamente vengono applicate forze o vincoli per modellare la superficie.

Questo processo tradizionalmente simulato utilizzando modelli fisici si realizza facilmente in ambiente VPL utilizzando gli ormai diffusi simulatori fisici.

6 Applicazioni

L'interazione tra modellazione digitale e fisica consente al progettista di esplorare nuove modalità per controllare e definire strategie per la costruzione di geometrie complesse. L'approccio integrato tra i principi fondativi della geometria, le tecniche di fabbricazione digitale e gli strumenti computazionali apre nuovi scenari per i designer in cui la continua interazione tra modelli fisici e modelli computazionali consente, attraverso la simulazione dei processi, la definizione di approcci innovativi.

Il tema della costruzione di una superficie a partire dalla sua configurazione piana è un tema estremamente vasto; le sperimentazioni hanno interessato una serie di questioni che riguardano la scala, i materiali, le tecnologie costruttive, il progetto dei vincoli e delle connessioni.

Tali sperimentazioni non sono sicuramente esaustive, ma rappresentano un contributo per definire approcci metodologici, basati su un processo che parte

Dal piano alla superficie

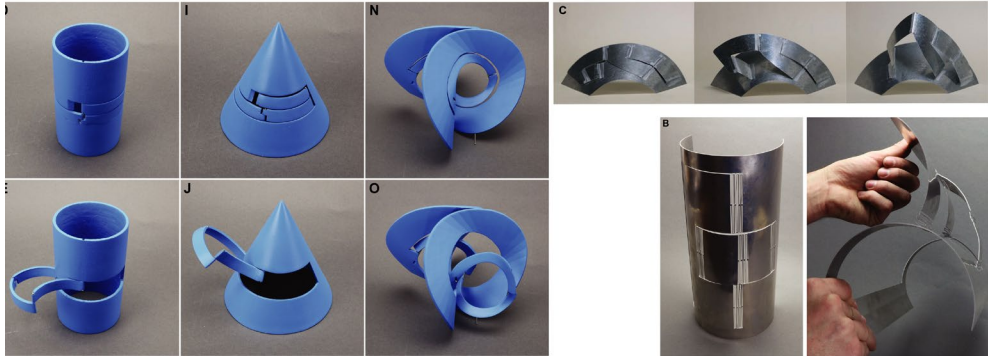


Fig.1/ Sistemi meccanici basati sullo studio delle superfici sviluppabili (immagine di Nelson et al 2019).

dai principi geometrici per individuare alcuni possibili scenari applicativi. Se da un lato la questione teorica sembra esaurirsi nell'ambito della geometria e della matematica, la progettazione dei prototipi implica il continuo confronto con strumenti, metodi, tecniche e ambienti sia accademici che industriali, per esplorare nuovi approcci innovativi e per costituire nuova conoscenza.

La possibilità di simulare digitalmente i processi in ambiente VPL è la base di partenza di moltissime ricerche attive in questo ambito, che spesso trovano applicazioni anche a livello industriale in relazione a specifiche questioni, dalla scala micro a quella architettonica. Applicazioni spesso molto specialistiche che spaziano, solo per citarne alcune, dal progetto per una nuova generazione di sistemi meccanici basati sull'utilizzo della geometria delle sviluppabili¹ (Fig.1) alle applicazioni nano basate sulla tecnica del *kerfing* e del *kirigami*², che consentono di modificare le caratteristiche dei materiali applicando diverse geometrie di taglio o di stampa 3D³, alle esplorazioni per la costruzione di oggetti con specifiche prestazioni, come alcune tipologie sperimentali di pannelli acustici⁴ (Fig.2), alla realizzazione di installazioni e di padiglioni⁵.

In questo panorama vasto due sono stati i temi principali che si è inteso esplorare con le applicazioni

1 Nelson T. 2019.

2 Cheng S. 2020.

3 Aryabahat D. 2023.

4 Liu D. 2023.

5. <https://www.iaacblog.com/programs/minimal-surface-complex-forming>.

6. Applicazioni

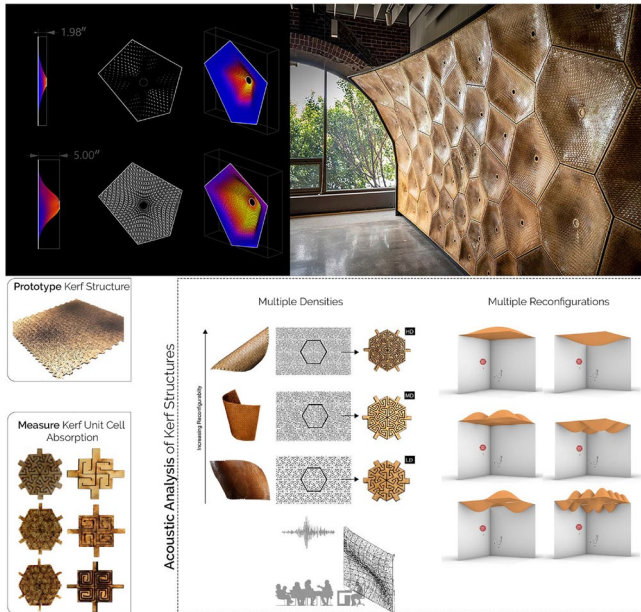


Fig.2/ Sperimentazione della tecnica del *kerfing* per la realizzazione di pannelli acustici (Liu et al 2023).

presentate in questo testo: la questione del rapporto geometria/materiale/costruzione con particolare attenzione al problema di come costruire, mettere in forma, il prototipo partendo dalla sua forma piana, e la questione dell'utilizzo di una specifica tecnica, quella del *kerfing*, per la configurazione di geometrie complesse, anche non sviluppabili, a curvatura negativa, positiva e variabile.

Per la realizzazione dei prototipi sono state utilizzate tre famiglie di materiali raggruppati in funzione del loro coefficiente elastico: materiali poco elastici, materiali molto elastici e materiali plastici.

Senza entrare in una trattazione approfondita in relazione alle caratteristiche fisiche dei materiali è fondamentale, in questa sede, richiamare sinteticamente i principi fisici fondamentali su cui si basa la sperimentazione.

Un materiale si definisce *elastico* quando si deforma sotto l'azione di una forza e ritorna nella sua configurazione iniziale quando viene meno la causa. In particolare, se il corpo ritorna esattamente nella sua

Dal piano alla superficie

6 Per approfondimenti sul comportamento dei materiali elastici si veda la *legge di Hooke*, applicabile entro il limite di elasticità. Oltre il quale il materiale può deformarsi in modo permanente oppure può fratturarsi. In particolare si definisce:

Comportamento Elastico: quando un materiale è sottoposto a una sollecitazione, generalmente si deforma temporaneamente, ritornando alla sua forma originale una volta che la sollecitazione è rimossa. Questa regione di comportamento è chiamata *regione elastica*. La sollecitazione massima che un materiale può sopportare senza entrare nella *regione plastica* è chiamata *limite elastico*.

Comportamento Plastico: oltre il limite elastico, il materiale inizia a deformarsi permanentemente, anche se la sollecitazione viene rimossa. Questa regione di comportamento è chiamata *regione plastica*. In questa fase, il materiale può subire deformazioni permanenti senza rompersi, se è duttile, o può rompersi, se è fragile. **Sollecitazione Massima:** la sollecitazione massima che un materiale può sopportare prima di entrare nella regione plastica è chiamata resistenza alla trazione o resistenza alla compressione, a seconda del tipo di sollecitazione. Questo rappresenta il punto in cui il materiale inizia a deformarsi plasticamente.

Fragilità vs Duttilità: materiali fragili, come alcuni metalli a bassa temperatura o materiali ceramici, tendono a rompersi senza mostrare una significativa deformazione plastica prima del cedimento. Al contrario, i materiali duttili, come l'acciaio e l'alluminio, mostrano una significativa deformazione plastica prima del cedimento e possono essere modellati senza rompersi facilmente.

configurazione iniziale si può considerare perfettamente elastico. In teoria, ogni materiale si deforma plasticamente e per ogni materiale si definisce la sollecitazione massima che ne garantisce il comportamento elastico, oltre al quale si entra nella regione di comportamento plastico, dove il corpo cede o si deforma plasticamente a seconda che il materiale sia fragile o duttile⁶.

Dal concetto di elasticità, proprietà intrinseca del materiale, si deriva il concetto di *flessibilità*, proprietà meccanica, che si può definire come la capacità del corpo di flettersi senza rompersi.

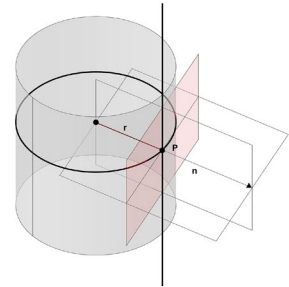
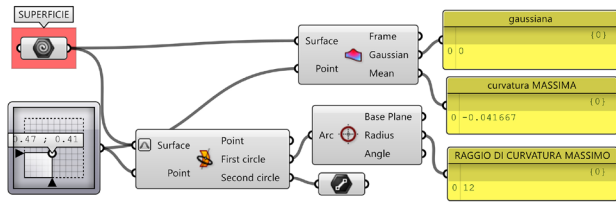
La comprensione del comportamento elastico e plastico dei materiali è fondamentale per la progettazione dei prototipi poiché consente di prevedere la risposta dei materiali alle diverse sollecitazioni e di progettare configurazioni e vincoli in modo consapevole.

Ogni materiale ha caratteristiche specifiche che lo rendono adatto a determinate applicazioni sperimentali. La scelta del materiale dipende dalle proprietà richieste per il prototipo e, nel caso in questione, le caratteristiche considerate sono l'*elasticità*, la *flessibilità* e la *duttilità*.

Basandoci su questi principi fondamentali per realizzare i diversi prototipi sono stati utilizzati fogli di cartoncino, fogli di polipropilene, pannelli di legno multistrato, MDF, plexiglass e alluminio, il cui comportamento è stato analizzato in relazione alla possibilità di costruzione dei diversi prototipi con diverse configurazioni geometriche.

Fogli di cartoncino: il cartoncino è un materiale leggero, flessibile poco elastico e non deformabile, che può essere facilmente modellato e manipolato per creare modelli preliminari. Ideale per la costruzione di qualsiasi superficie sviluppabile, può essere utilizzato anche per costruire superfici a doppia curvatura positiva o negativa se trasformato in un materiale

6. Applicazioni



deformabile tramite tagli (*kerfing* o *kirigami*) oppure pieghe (*origami*).

Pannelli di polipropilene (1 mm): il polipropilene è un materiale flessibile, molto elastico ma non deformabile. Può essere trasformato in un materiale deformabile tramite tagli (*kerfing* o *kirigami*). Adatto per costruire superfici sviluppabili o superfici a doppia curvatura se trasformato in un materiale deformabile tramite tagli specifici. Ideale per applicazioni che richiedono una certa flessibilità e elasticità.

Pannelli di multistrato (3 mm) o **plexiglass** (3 mm): si tratta di materiali poco flessibili e non deformabili in relazione alla scala degli oggetti considerati poiché, la flessibilità di un pannello dipende anche dalle dimensioni del pannello stesso. L'utilizzo di questi materiali per la costruzione di superfici sviluppabili e a doppia curvatura è condizionato dall'applicazione dei diversi pattern di taglio per modificarne la flessibilità e la deformabilità. Applicando la tecnica del *kerfing* si possono costruire tutte le superfici sviluppabili ma anche superfici a doppia curvatura. Questi materiali sono ideali per applicazioni che richiedono una maggiore rigidità rispetto al cartoncino e una minore elasticità rispetto al polipropilene.

Pannelli di alluminio (0.02 mm): l'alluminio con uno spessore così sottile è estremamente duttile e plastico. Questo significa che può essere facilmente modellato e deformato senza rompersi, permettendo di costruire superfici curve anche complesse.

Estremamente flessibile e facilmente deformabile

Fig.3/ In ambiente VPL è possibile analizzare la superficie, conoscere il valore della curvatura e determinare agevolmente il raggio di curvatura massimo visualizzando cerchi osculatori in un qualsiasi punto.

Fig.4/ Il cilindro circolare retto è una superficie a curvatura costante. In ambiente VPL si può determinare semplicemente il raggio di curvatura visualizzando il cerchio osculatore.

Dal piano alla superficie

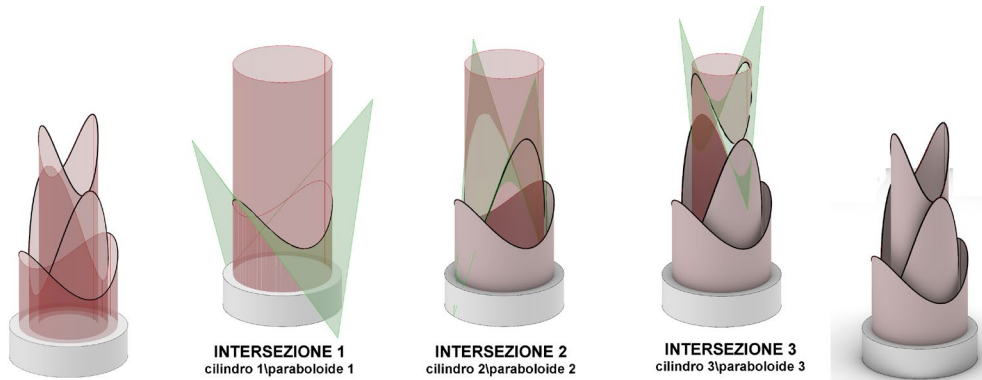


Fig.5/ Prototipo Cilindri: genesi geometrica della composizione. La lampada è composta da tre pezzi. Ogni pezzo è definito come intersezione di un cilindro con un paraboloido iperbolico.

il pannello può essere facilmente tagliato, piegato, curvato e sagomato per adattarsi a varie configurazioni e geometrie senza perdere la sua integrità strutturale.

Il pannello di alluminio con uno spessore di 0.02 mm offre una combinazione unica di duttilità, flessibilità e resistenza, che lo rende ideale per la creazione di superfici e prototipi sperimentali che richiedono materiali sottili ma robusti, particolarmente adatto per costruire tutte le superfici sviluppabili che una volta modellate conservano la forma senza necessità di particolari vincoli.

Rigate sviluppabili

La costruzione di prototipi realizzati componendo parti di superfici sviluppabili rappresenta un'importante pratica che consente di esplorare e visualizzare concetti geometrici complessi in modo tangibile.

Partendo dai casi più semplici, come il cilindro circolare, fino ad arrivare alle più complesse sviluppabili tangenziali, i prototipi possono essere utilizzati per scopi educativi, di ricerca e di progettazione, consentendo di sperimentare e comprendere meglio i principi teorici e le applicazioni pratiche e aiutando i designer a valutare le prestazioni e le caratteristiche di alcune specifiche superfici complesse.

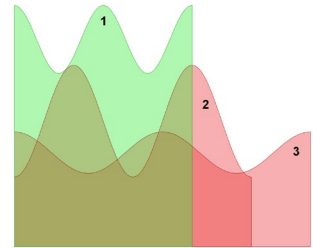
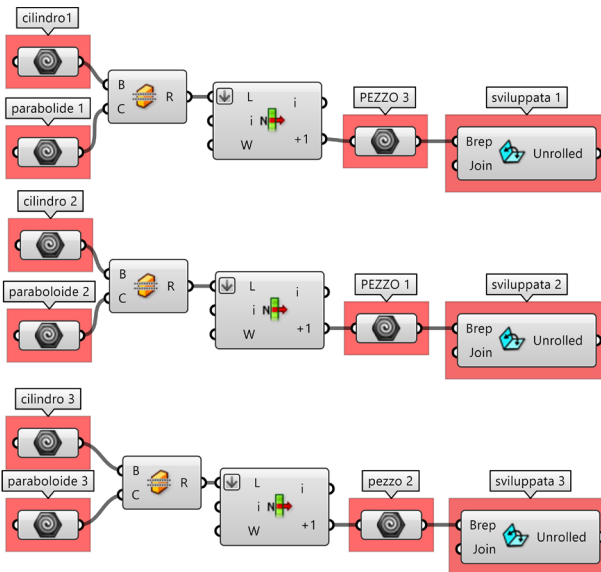


Fig.6/ Prototipo cilindri: lo *script* consente di generare infinite varianti controllando parametricamente le dimensioni del cilindro esterno e la configurazione del bordo di ciascun pezzo.

Fig.7/ Tagliando le tre sviluppate si può realizzare il prototipo con un qualsiasi materiale flessibile. Nel nostro caso solo il cilindro interno è stato realizzato direttamente tagliando un pannello di polipropilene mentre sugli altri pezzi è stato applicato un pattern di taglio con la tecnica del *kerfing*.

Comprendere i principi della geometria, ed in particolare il concetto di curvatura minima e massima, è essenziale per la progettazione, la ricerca delle soluzioni e la realizzazione di prototipi, soprattutto nei casi in cui si utilizza un materiale rigido che si rende flessibile con la tecnica del *kerfing*.

La distribuzione ottimizzata di un pattern di taglio su una superficie dipende, infatti, proprio dalla sua curvatura massima.

Nel caso delle rigate sviluppabili le superfici si flettono in ogni punto in una sola direzione ed in particolare nella direzione ortogonale alla generatrice rettilinea, quindi, per queste superfici il pattern più adatto è quello lineare e la distribuzione deve necessariamente seguire le isocurve rettilinee dalla superficie.

Si dimostra infatti che seguendo le isocurve rettilinee, il pattern di taglio si adatta alla direzione naturale della flessione della superficie, migliorando la sua integrità strutturale e ottimizzando le sue prestazioni.

Dal piano alla superficie

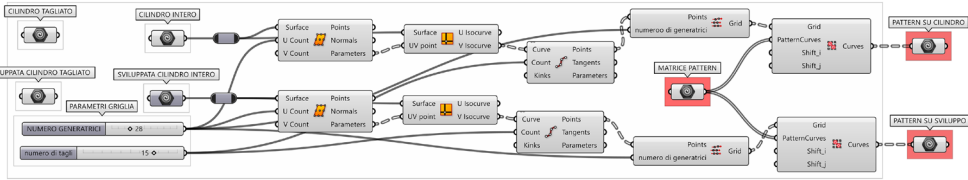
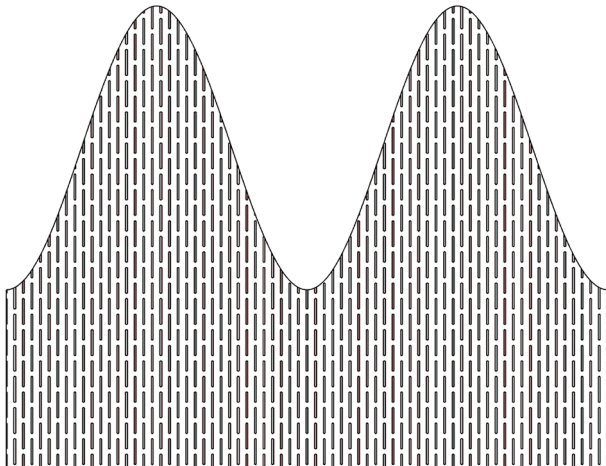
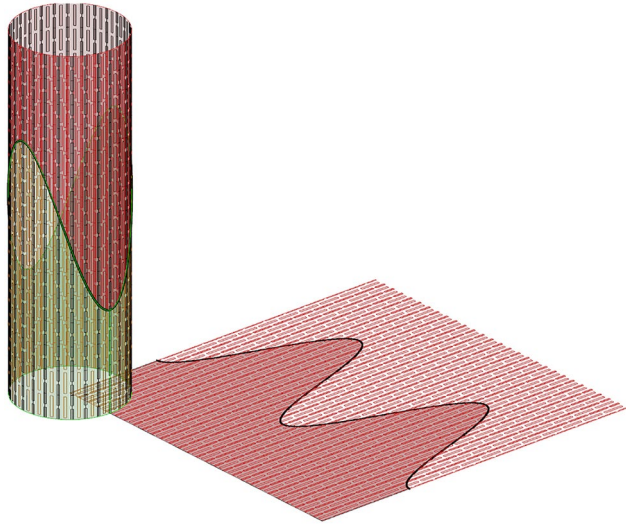


Fig.8/ Prototipo cilindri: script per l'applicazione del *kerfing* sulla superficie e sullo sviluppo. *Script*: Mara Capone e Natalia Querioz Nome.

Fig.9/ Prototipo cilindri: applicazione del *kerfing* sulla superficie e sullo sviluppo.

Fig.10/ Pezzo 2: disegno del *kerfing* per il taglio.



Superfici cilindriche

Le superfici cilindriche sono superfici rigate a curvatura gaussiana nulla e, quindi, sviluppabili. La sviluppata della superficie si ottiene facilmente e, come precedentemente illustrato, il pattern di taglio si distribuisce utilizzando le generatrici rettilinee della superficie che, in questo caso particolare, saranno tutte parallele. Per determinare la geometria del pattern più adatta e la distribuzione ottimizzata in relazione allo spessore e al materiale, sono stati utilizzati i risultati dei test fatti sui campioni dei diversi materiali che indicano per ciascun materiale e ciascuna tipologia di pattern il raggio di curvatura ammissibile.

In generale, in ambiente VPL è possibile conoscere i valori delle curvature principali e determinare agevolmente il raggio di curvatura visualizzando i cerchi osculatori in un qualsiasi punto di una superficie.

Nel caso particolare del cilindro circolare e, di tutte le sviluppabili, uno dei due cerchi osculatori è una retta, quindi una delle due curvature principali è sempre nulla, motivo per cui questa famiglia di superfici si può anche definire a singola curvatura (Fig. 3 e 4).

Una volta determinato il raggio di curvatura si può procedere nella distribuzione del pattern più adatto in relazione allo spessore e al materiale scelto.

In questo caso, poiché la curvatura è costante anche la distribuzione del pattern sulla superficie sarà costante.

Il primo prototipo, in MDF e polipropilene, è stato realizzato utilizzando parti di cilindri circolari. I pezzi in MDF sono stati resi flessibili applicando un pattern di taglio, mentre per il pezzo in polipropilene è stato necessario definire i vincoli in relazione all'elasticità del materiale.

La costruzione di questo prototipo mostra un approccio alla progettazione e alla realizzazione di og-

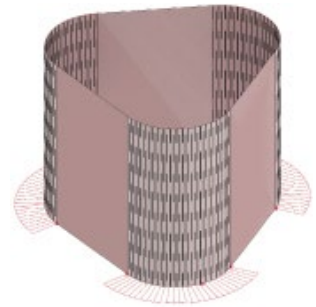


Fig. 11/ La distribuzione del *kerfing* può essere uniforme o ottimizzata in funzione della curvatura. In questo caso l'ottimizzazione consente di indebolire il meno possibile la struttura

Dal piano alla superficie

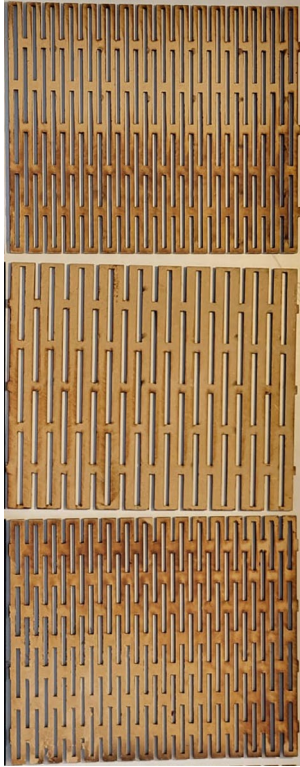
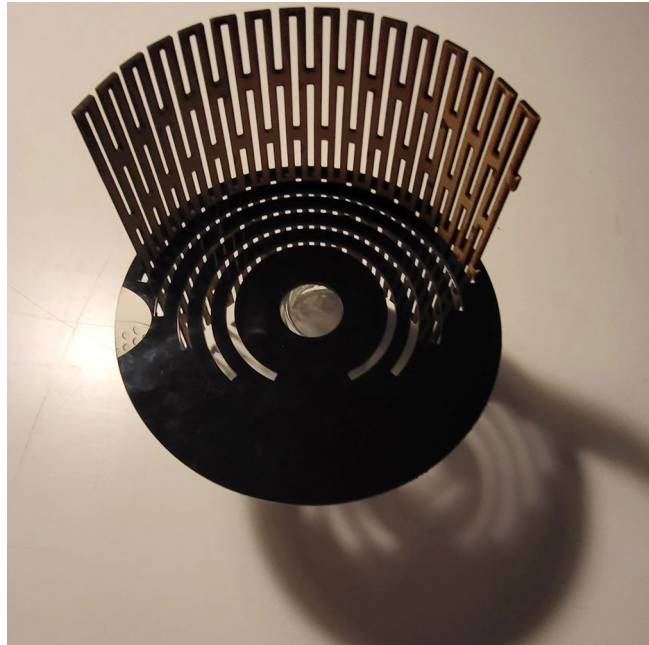


Fig.12/ Utilizzando i risultati dei test effettuati per definire la massima curvatura di un materiale in funzione dello spessore e del pattern si può definire la distribuzione ottimale per la superficie di progetto.



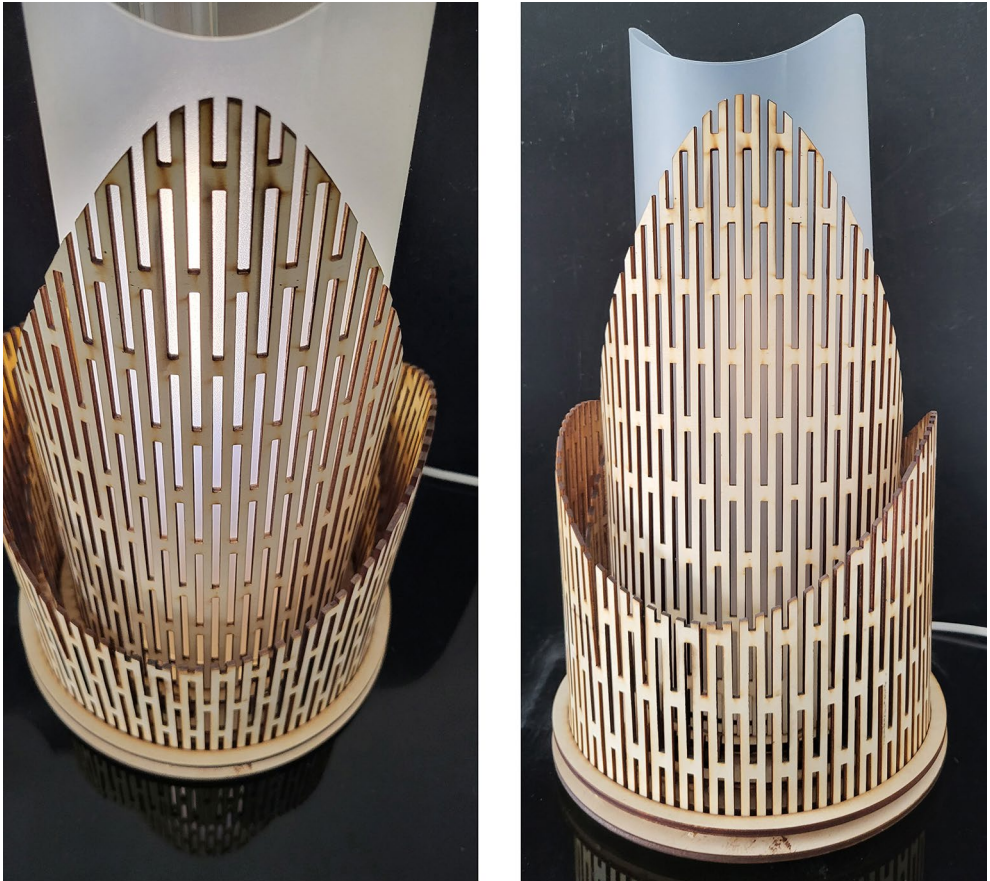
getti complessi basato sull'utilizzo delle intersezioni controllate parametricamente per definire il bordo delle diverse parti che compongono l'oggetto.

L'uso di materiali diversi, come il multistrato e il polipropilene, permette di ottenere una combinazione di flessibilità e giochi di trasparenza nella creazione del prototipo.

La lampada è composta da tre porzioni di cilindro concentriche, il cui bordo è definito dall'intersezione dei tre cilindri con tre paraboloidi iperbolici.

Per generare le varie parti del prototipo stato sviluppato uno *script* che consente la creazione di infinite varianti che, agendo su alcuni parametri scelti come riferimento, come la misura del raggio del cilindro esterno e la configurazione dei paraboloidi, consentono di definire le dimensioni dei singoli pezzi e la configurazione dei bordi curvilinei (Fig.6). Questo approccio offre una grande flessibilità nella progettazione e nella personalizzazione dell'oggetto.

I due cilindri esterni sono stati realizzati in multistrato-



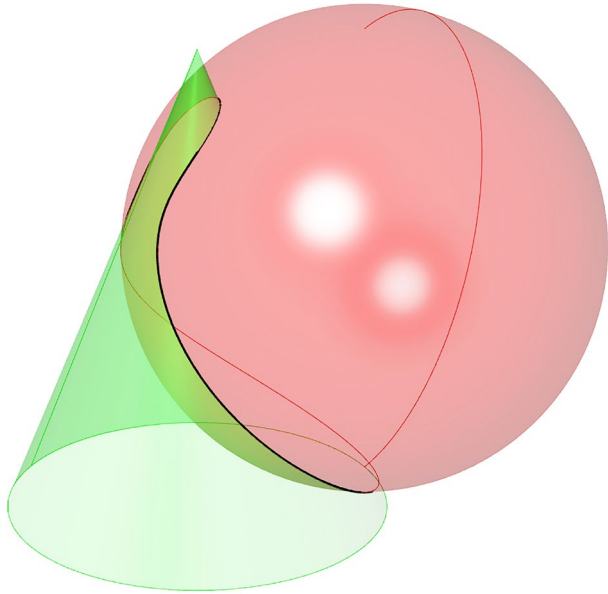
to con spessore 3 mm, a cui è stato applicato un pattern di taglio. Questo ha consentito di conferire al materiale una maggiore flessibilità consentendo la costruzione delle superfici curve.

Per distribuire il pattern di taglio sulle parti di cilindro in MDF in funzione del materiale e della curvatura, si costruisce una griglia dividendo le isocurve rettilinee. I parametri che consentono di controllare la griglia sono il numero di isocurve e il numero di parti in cui le isocurve possono essere divise (Fig.8). Per il cilindro interno è stato utilizzato polipropilene bianco opaco con spessore 1 mm. Grazie alle proprietà flessibili ed elastiche del polipropilene, è stato

Fig.13/ Lampada da appoggio: DEVELOPABLE 1.0. Prototipo realizzato da Sara De Toro.

Dal piano alla superficie

Fig.14/ Approccio metodologico per la gestione parametrica del processo. In questo caso per definire il bordo della porzione di cono è stato definito uno *script* che consente di variare le dimensioni delle due superfici e la reciproca posizione. Si possono quindi generare infinite configurazioni tra cui scegliere.



possibile realizzare il pezzo tagliando semplicemente la superficie sviluppata e definendo i vincoli per mettere in forma la superficie in relazione all'elasticità del materiale. In questo caso sono stati praticati dei fori sui bordi della superficie che, tramite una cucitura, ne hanno consentito la costruzione.

Superfici coniche

Il secondo dei prototipi presentati è una lampada da sospensione, *Yin_Yang*, composta da due superfici coniche tra loro semplicemente connesse. La sperimentazione rappresenta un esempio di utilizzo delle intersezioni geometriche e dello *script* parametrico per generare forme complesse. Questo approccio offre una grande flessibilità e possibilità di personalizzazione nel processo di progettazione.

Il prototipo è composto da due pezzi di un cono circolare retto, che sono collegati tra loro tramite due fori praticati nelle porzioni di superfici sovrapposte. I bordi delle due superfici sono due curve gobbe, definite dall'intersezione dei cono con una



sfera. Anche in questo caso l'intero processo è stato gestito parametricamente definendo uno *script* che consente di generare infinite soluzioni modificando le dimensioni delle due superfici e la posizione della sfera rispetto al cono. Questo approccio si rivela estremamente flessibile, consente di adattare il design alle diverse esigenze e può essere utilizzato per definire una porzione di qualsiasi superficie sviluppabile.

Utilizzando le intersezioni tra forme geometriche di base, come coni e sfere, è possibile creare forme complesse e interessanti per una vasta gamma di applicazioni.

Una volta definita la sviluppata sono stati realizzate diverse varianti della lampada Yin_Yang, utilizzando materiali diversamente accostati: polipropilene, multistrato, plexiglass e alluminio.

Fig. 15/ Yin_Yang. Versione del prototipo in polipropilene e alluminio. Per passare dalla sviluppata alla superficie sono stati definiti i diversi vincoli in funzione delle diverse caratteristiche del materiale: l'alluminio è duttile quindi una volta modellato non è necessario inserire vincoli particolari per mantenere la forma, mentre per il pezzo in polipropilene, che è elastico, è necessario inserire un vincolo che impedisca alla forma di ritornare nella sua configurazione piana (design Mara Capone).

Dal piano alla superficie

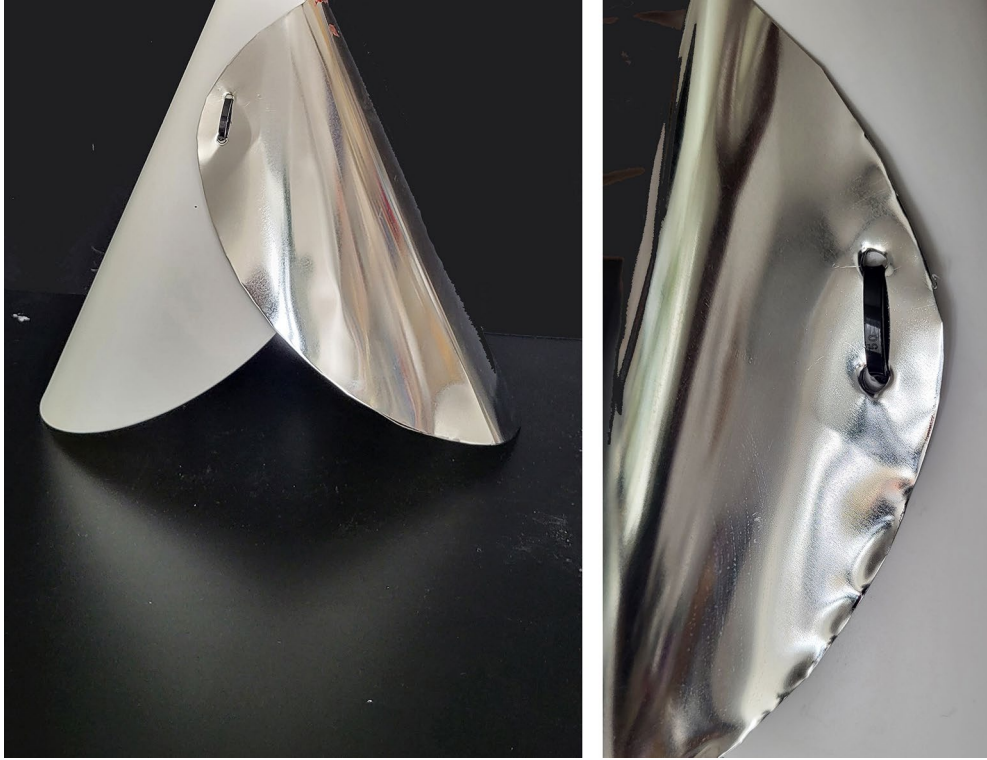
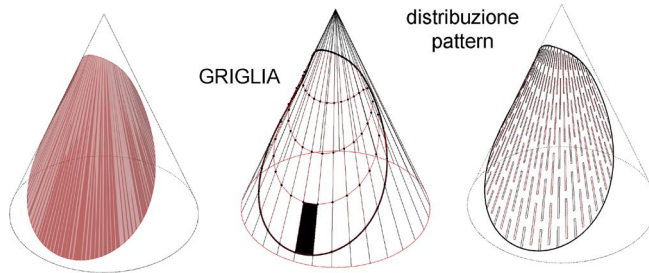
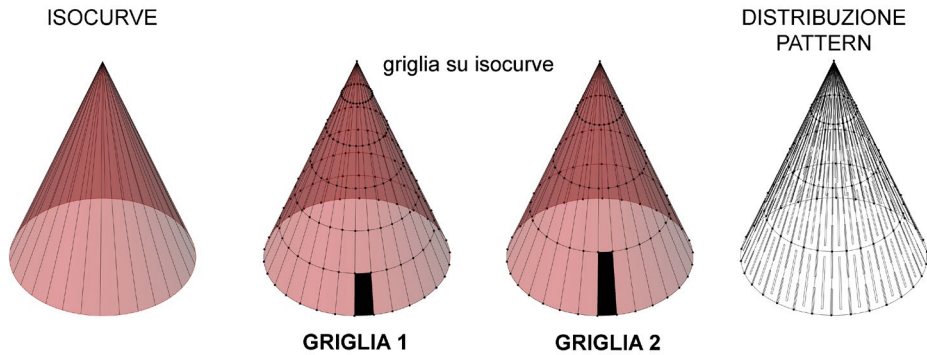


Fig.16/ Yin_Yang. Versione del prototipo in polipropilene e alluminio. In questo caso la sperimentazione consiste nell'utilizzo di materiali con diverse caratteristiche: un materiale duttile ed un materiale elastico. Due fori passanti consentono di collegare i due pezzi.

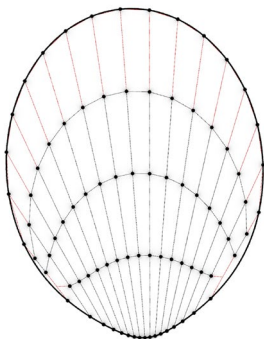
Per i pezzi in polipropilene e alluminio è stato sufficiente tagliare la forma piana, la sviluppata, poiché questi materiali sono flessibili, elastici o duttili, e possono essere facilmente modellati senza l'applicazione di pattern di taglio. Per i pezzi in multistrato e plexiglass, materiali rigidi, è stato necessario applicare un pattern di taglio per costruire la forma modellata.

Come per tutte le superfici cilindriche, anche per le superfici coniche il pattern di taglio si distribuisce utilizzando le generatrici rettilinee della superficie. In questo caso le generatrici convergono in un punto, il vertice del cono e, quindi, la griglia che consente di adattare la matrice alla superficie è composta da celle diverse tra loro.

Anche in questo caso, è stato sviluppato uno *script* che consente di variare la griglia e il pattern di taglio



**GRIGLIA
su sviluppata**



**PATTERN
su sviluppata**

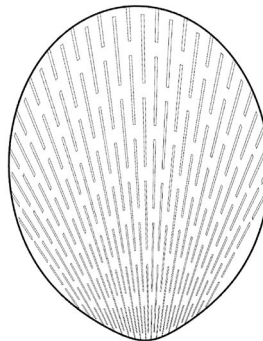


Fig. 17/ Costruzione della griglia sulle isocurve di una superficie conica. Lo *script* consente di modificare la griglia e quindi le celle, modificando il numero di generatrici e il numero di divisione delle generatrici.

Fig. 18/ Definizione della griglia e distribuzione del pattern sul modello 3D della superficie di progetto.

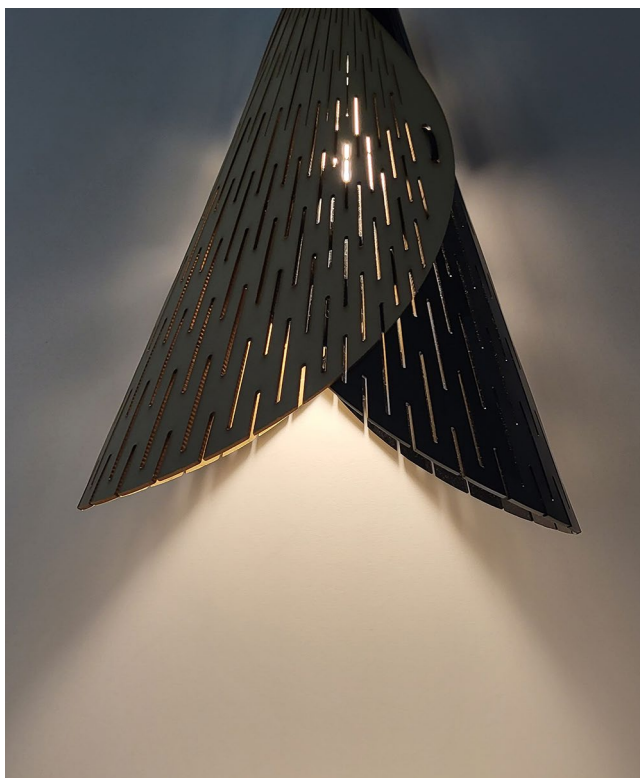
Fig. 19/ Definizione della griglia e della distribuzione del pattern sulla sviluppata. Disegno della superficie da tagliare.

in base alla geometria della superficie conica e alle caratteristiche dei materiali. Lo *script* consente di variare la griglia utilizzando come parametri il numero di generatrici e il numero di tagli per ogni generatrice offrendo una grande flessibilità

Dal piano alla superficie

Fig.20/ Yin_Yang. Versione del prototipo con plexiglass e legno.

Fig.21/ Taglio dei diversi pezzi con diversi materiali.





nel processo di progettazione e consentendo di adattare la matrice di taglio in funzione della massima curvatura della superficie in relazione alle caratteristiche del materiale.

Per garantire la massima efficienza e la migliore distribuzione del pattern di taglio la matrice e la griglia sono state proporzionate in relazione alla massima curvatura della superficie. Questo processo di ottimizzazione assicura che il taglio sia adeguato alla geometria della superficie e alle proprietà dei materiali, evitando la rottura durante la lavorazione. Questo approccio permette di ottenere risultati ottimizzati e personalizzati per ogni variante della lampada.

Fig. 22/ Yin_Yang. Versione del prototipo con plexiglas e legno.

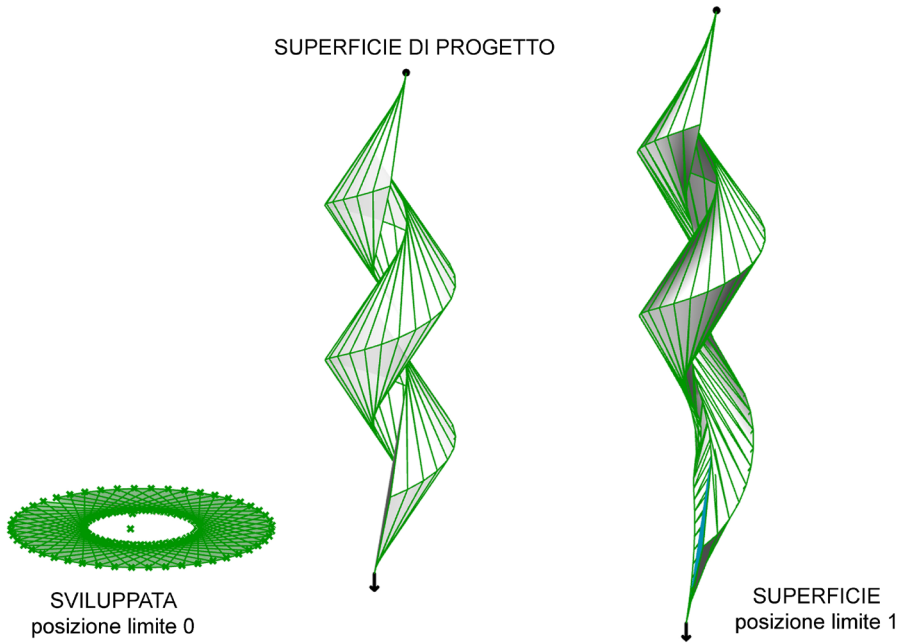


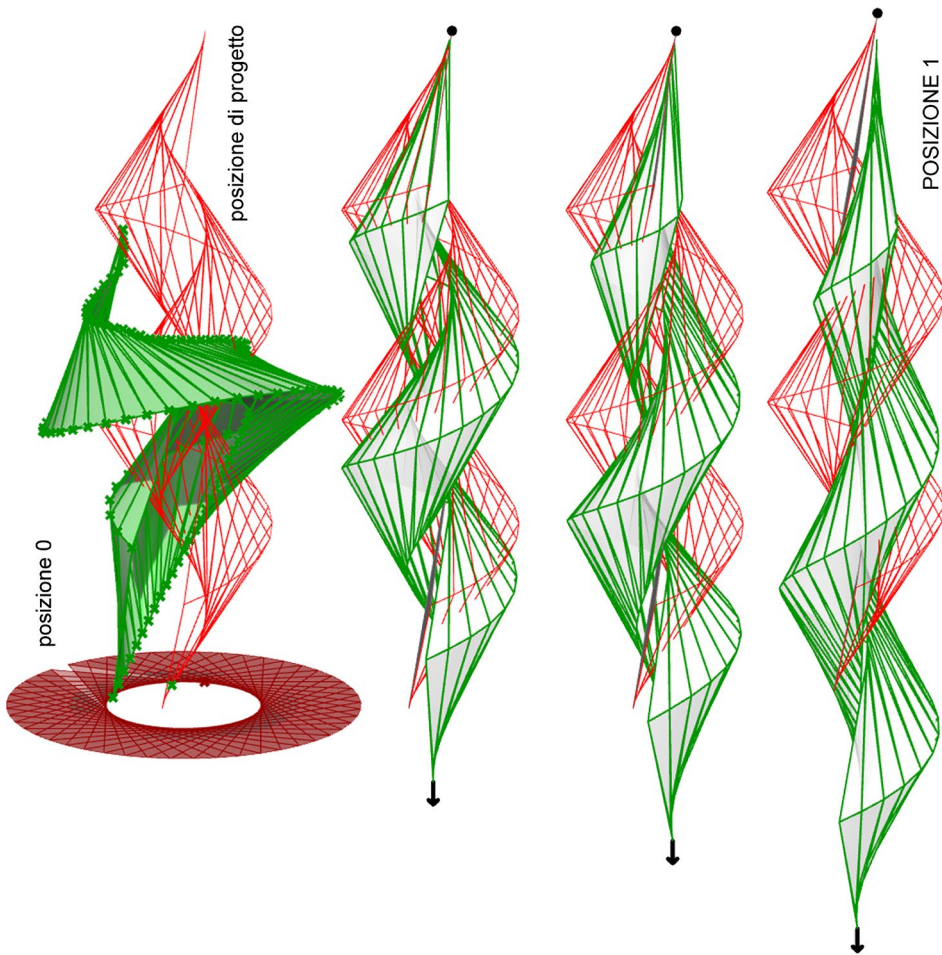
Fig.23/ Elicoide sviluppabile. Dalla sviluppata di un elicoide si possono ottenere infinite configurazioni comprese tra la posizione limite 0_sviluppata, posizione limite 1. La superficie di progetto è compresa tra queste due posizioni.

Tangenziale: elicoide

Le questioni da affrontare per costruire una superficie complessa utilizzando pannelli piani riguardano il disegno della forma piana da tagliare, la definizione delle modalità per passare dalla configurazione piana alla superficie e il progetto dei vincoli e delle connessioni necessarie per ottenere una superficie in equilibrio.

Da un punto di vista metodologico la sperimentazione consiste nel progettare diverse configurazioni utilizzando gli stessi principi geometrici, diversi materiali, diversi modi di assemblare e vincolare i pezzi, simulando il movimento che consente di mettere in forma la superficie piana.

Partendo dai prototipi si propone un approccio sperimentale basato sulla definizione del processo che, tradotto in un modello computazionale, consenta al designer di valutare le possibili alternative per definire i vincoli e le modalità di assemblaggio del sistema. Quella degli *elicoidei sviluppabili* è una particola-



re famiglia di tangenziali generata conducendo le tangenti ad una qualsiasi elica. Come è stato ampiamente illustrato in precedenza il controllo della superficie avviene modificando i parametri che consentono di generare l'elica, mentre l'estensione della superficie si determina assegnando la lunghezza delle generatrici⁷.

Due prototipi sono stati costruiti utilizzando questa geometria: il *Prototipo 1* è composto da due porzioni di elicoide con generatrici della stessa lunghezza disposte in senso opposto, mentre il *Prototipo 2* è

Fig. 24/ Elicoide sviluppabile. Simulazione del processo dinamico della struttura. Tra le infinite configurazioni possibili il progettista può scegliere la configurazione di progetto.

⁷ Cfr. Casi notevoli: l'elicoide sviluppabile p. 90.

Dal piano alla superficie

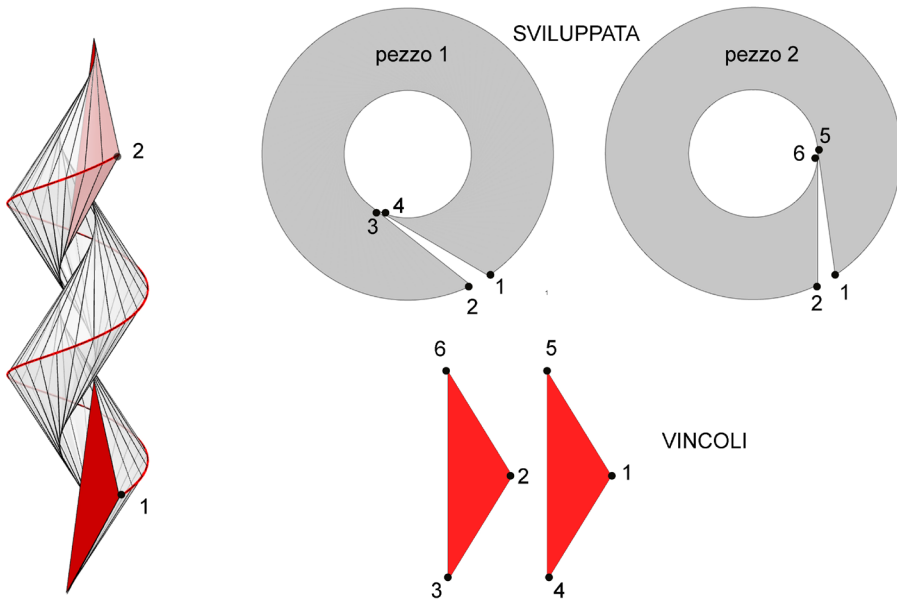


Fig.25/ Elicoide sviluppabile. Per passare dalla configurazione piana alla configurazione di progetto è necessario definire la geometria dei vincoli. in questo caso sono stati definiti due triangoli rigidi che consentono di bloccare il sistema.

una porzione di elicoide delimitata da un'elica e da un piano ortogonale all'asse.

Le tecniche precedentemente illustrate⁸ sono state applicate per definire la sviluppata di ciascun pezzo. Anche in questo caso sono stati realizzati diversi prototipi utilizzando materiali con diverse caratteristiche.

Prototipo 1_geometria

il progetto del *Prototipo 1* si basa su una rigorosa definizione parametrica della geometria. L'uso di modelli computazionali consente di simulare il movimento e valutare l'efficacia dei vincoli per mantenere in equilibrio la forma desiderata.

L'elica e l'estensione della superficie sono definiti parametricamente. Questo permette di controllare la forma e le dimensioni della superficie in modo flessibile, consentendo di valutare le possibili varianti senza dover riprogettare l'intero prototipo.

Definita, quindi l'elica e l'estensione della superficie si costruisce la sviluppata di ciascun pezzo delimita-

⁸ Cfr. Sviluppata di un elicoide tangenziale p. 95.

to da due eliche cilindriche e due generatrici rettilinee. Lo sviluppo della superficie, in questo caso, è composta da due cerchi concentrici, i cui raggi sono i raggi dei cerchi osculatori delle due eliche di bordo, e da due segmenti rettilinei coincidenti con le generatrici⁹.

Poiché esistono infinite eliche con la stessa curvatura, il progetto dei vincoli è in questo caso fondamentale, in quanto la stessa sviluppata consente di generare infinite configurazioni comprese tra le due posizioni limite: la posizione piana e quella in cui l'elica interna tende all'asse¹⁰. La configurazione di progetto è sempre compresa tra queste due posizioni limite.

Vincolando le due porzioni di paraboloide con una cerniera in corrispondenza dell'elica di bordo esterna il modello computazionale consente di simulare il movimento e quindi di definire fisicamente il vincolo necessario a bloccare la forma in una determinata posizione (Fig. 24).

In questo caso tale vincolo è rappresentato da due triangoli rigidi dalla cui forma dipende la configurazione scelta.

Prototipo 1.1_polipropilene

Per analizzare le diverse problematiche connesse alla progettazione dei vincoli sono stati realizzati due prototipi in scala diversa utilizzando pannelli di polipropilene spessi 1mm e plexiglass da 3mm per i triangoli rigidi, i vincoli.

Il materiale nella configurazione scelta si rivela flessibile e molto elastico. Il prototipo in scala maggiore, con raggio esterno della sviluppata pari a 55 cm, si costruisce facilmente collegando le due falde opposte con una cucitura lungo l'elica esterna che funziona come una cerniera.

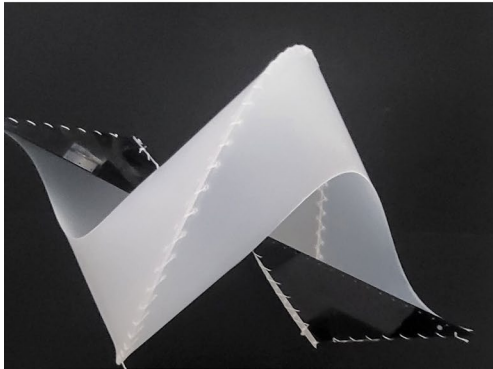
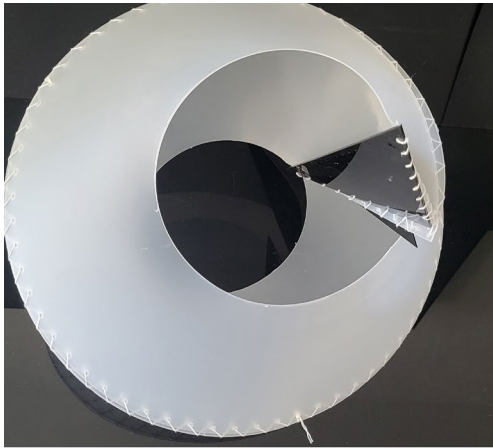
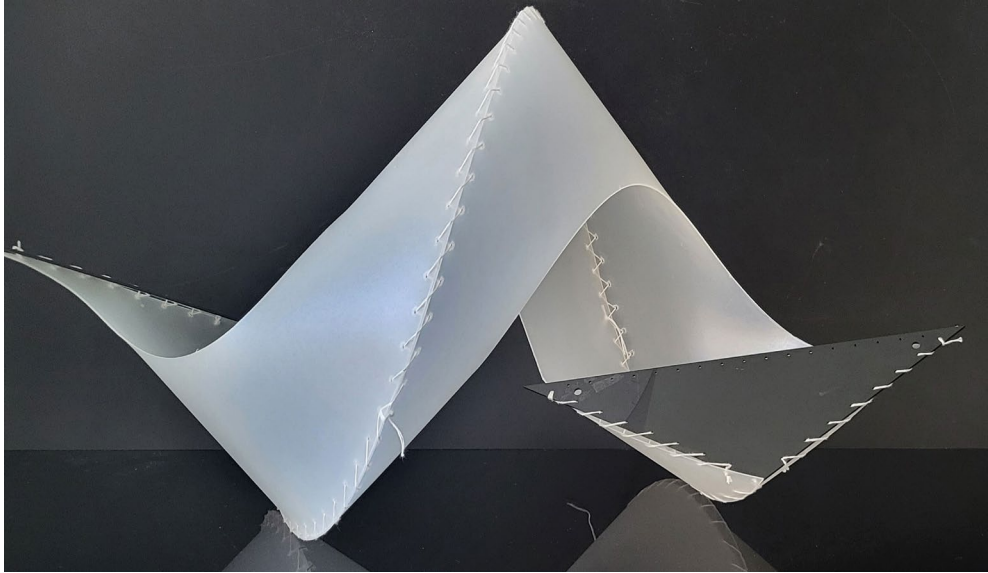
La superficie si configura utilizzando i due triangoli di plexiglas la cui forma è stata definita in fase di



Fig. 26/ Elicoide sviluppabile. Prototipo 1.1_polipropilene. Il prototipo costruito con un pannello di polipropilene 0.2 mm è tanto più elastico minore è la dimensione del prototipo.

⁹ Cfr. Sviluppata di un elicoide tangenziale, p. 95.

¹⁰ Martin-Pastor A. 2020.



progetto scegliendo una delle infinite possibili configurazioni comprese tra le due posizioni limite.

La struttura si rivela comunque elastica. Infatti, si può verificare che, come previsto nella simulazione digitale (Fig. 24), applicando una forza verticale, il prototipo si allunga. Per vincolare in modo stabile la configurazione è necessario introdurre ulteriori vincoli, in questo caso è stato inserito un elemento lineare rigido, avente la stessa direzione dell'asse dell'elica, in modo da fissare i due triangoli alla distanza definita in fase di progetto (Fig. 27).

La costruzione di un modello in scala minore ha evidenziato che, nonostante la forma e il materiale siano gli stessi, è necessaria una forza decisamente maggiore per mantenere la configurazione in equilibrio, per contrastare la "tendenza" della superficie a ritornare nella sua configurazione piana. Questo è dovuto alle dimensioni ridotte del modello, che influenzano la distribuzione delle tensioni e delle deformazioni nel materiale (Fig. 26). È importante considerare questo aspetto durante la progettazione e la realizzazione dei prototipi per progettare i vincoli in relazione caratteristiche del materiale.

Prototipo 1.2_multistrato

Per realizzare il prototipo in multistrato da 3 mm è stato necessario applicare un pattern di taglio, poiché il materiale, in relazione alla dimensione del prototipo e allo spessore del pannello, si può considerare rigido. Per poterlo rendere flessibile è stato applicato un pattern *live hinges* calibrato in modo da non comprometterne la resistenza strutturale. Applicando lo stesso processo illustrato in precedenza si costruisce una griglia utilizzando le generatrici rettilinee dell'elicoide. Anche in questo caso le variabili che consentono di modificare la griglia sono il numero di generatrici e il numero di tagli per generatrice. Calcolata la curvatura massima della

Fig.27/ Elicoide sviluppabile. Prototipo 1.1_polipropilene. Il prototipo si comporta comunque elasticamente entro i limiti della geometria definita. I soli triangoli di plexiglass irrigidiscono la struttura ma non impediscono il movimento in direzione dell'asse dell'elica.

Dal piano alla superficie

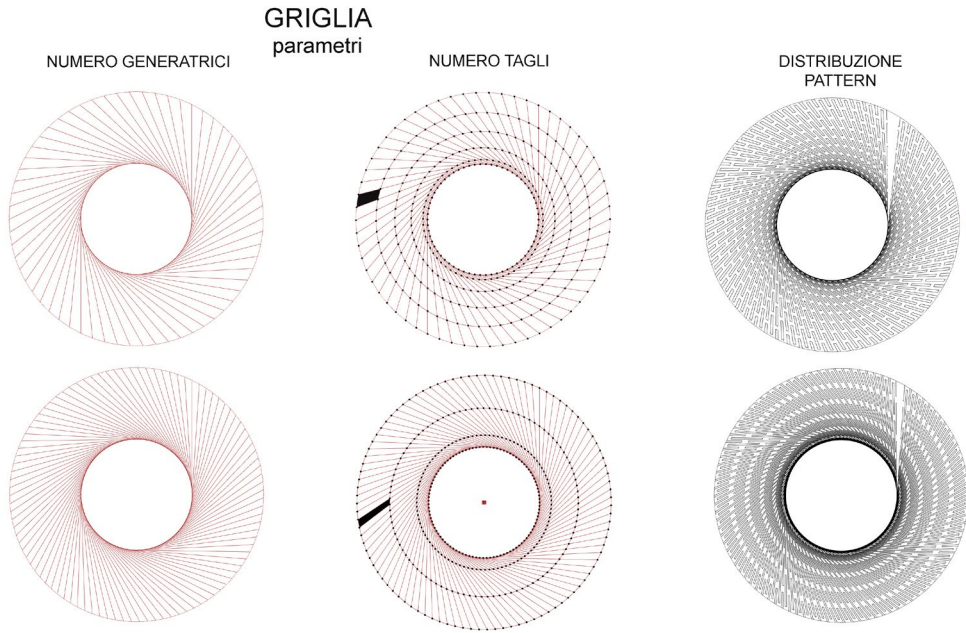


Fig. 28/ Elicoide sviluppabile. Prototipo 1.2_multistrato. Distribuzione del pattern di taglio. Il pannello è reso flessibile applicando un pattern di taglio lineare utilizzando la griglia di isocurve costruita sulle tangenti.

superficie la griglia viene modificata di conseguenza per garantire una distribuzione ottimale del pattern. Questo processo tiene conto dei risultati dei test iniziali sui materiali e sui diversi pattern di taglio per garantire la compatibilità e la flessibilità del multistrato.

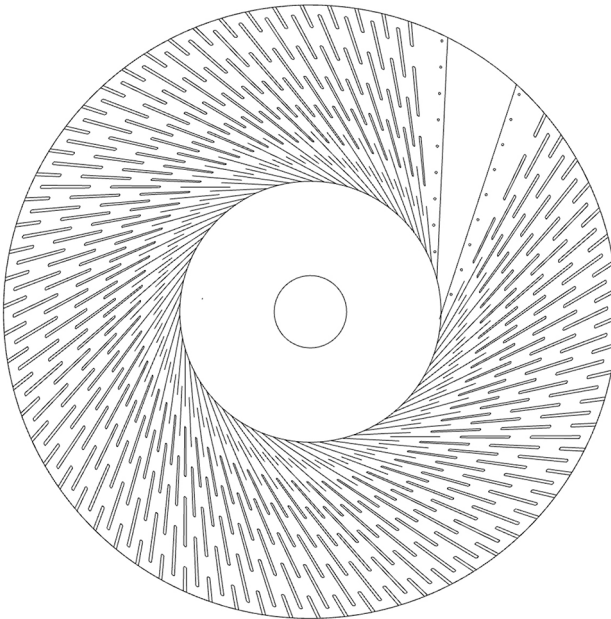
La realizzazione del prototipo ha evidenziato un problema comune quando si utilizza la tecnica del *kerfing*: la necessità di gestire la distribuzione del pattern di taglio in modo da evitare eccessiva fragilità e problemi legati alla tecnologia di fabbricazione. Punto cruciale del processo è considerare la distribuzione del pattern di taglio in relazione alla curvatura della superficie e alla tecnologia di fabbricazione utilizzata.

La distribuzione molto fitta del pattern di taglio in prossimità del bordo interno può, infatti, causare fragilità e altri problemi.

In particolare, per evitare le bruciature dovute a linee di taglio troppo ravvicinate, è importante otti-

6. Applicazioni

Fig.29/ Elicoide sviluppabile. Prototipo 1.2_multistrato. Disegno del pattern di taglio.



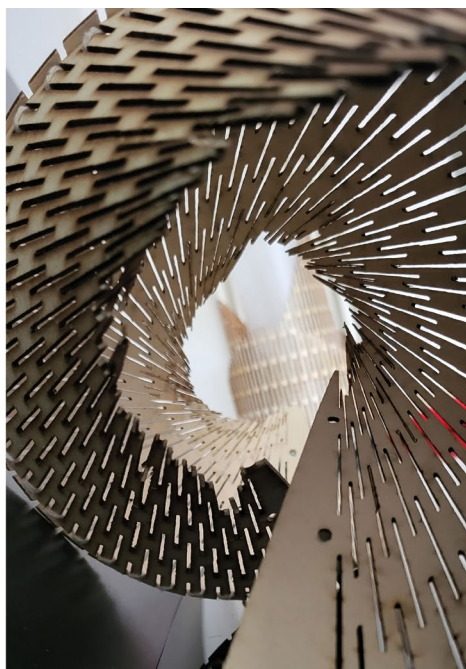
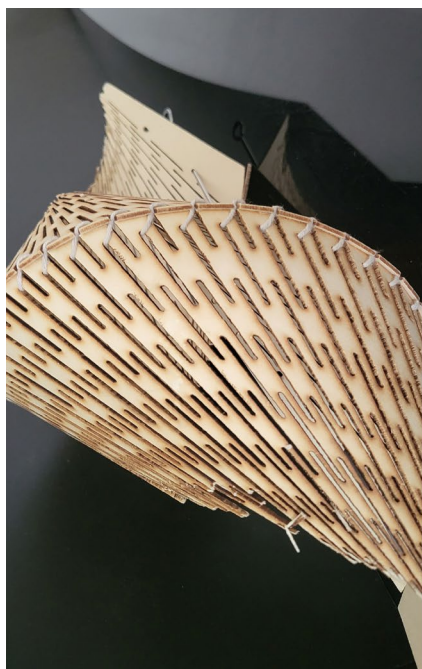
mizzare la matrice di taglio in modo da rispettare la distanza minima delle linee in base alla tecnologia di fabbricazione utilizzata. Pertanto dall'osservazione delle problematiche riscontrate nella realizzazione del *prototipo 1.2* con taglio laser sono state definite specifiche strategie che consentono di ridurre localmente la complessità della matrice di taglio con l'obiettivo di minimizzare i problemi connessi alla tecnologia di fabbricazione (Fig. 32).

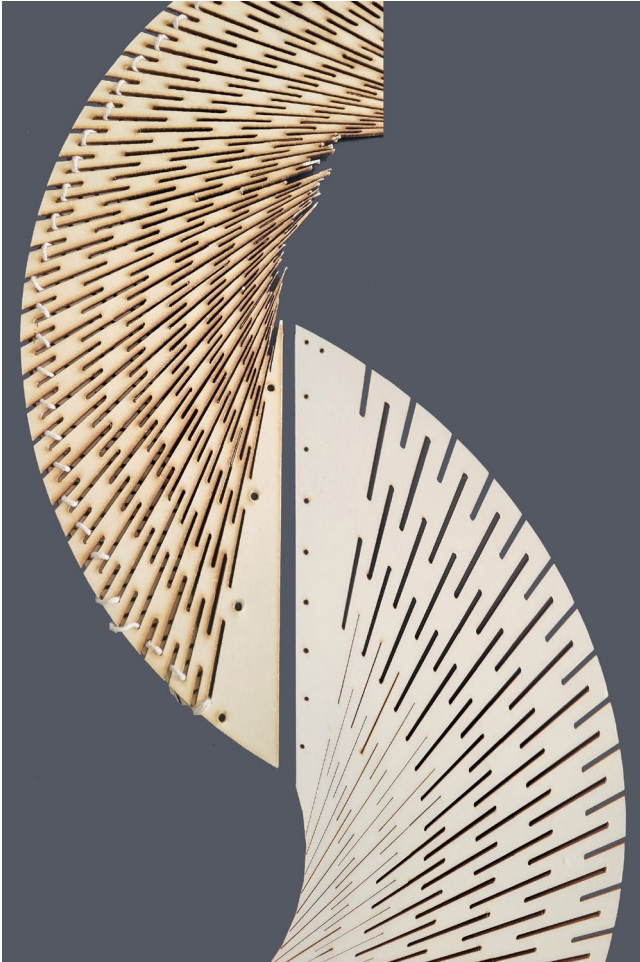
Affrontare le sfide legate alla distribuzione del pattern di taglio in relazione alla tecnologia di fabbricazione richiede quindi un approccio che tenga conto delle caratteristiche della superficie, della tecnologia utilizzata e delle esigenze specifiche del progetto.

Per l'assemblaggio del modello, una volta tagliato il materiale secondo la griglia definita, le due falde opposte di multistrato sono state cucite insieme per formare la superficie desiderata.

Per mantenere la configurazione in equilibrio, sono stati costruiti i due triangoli rigidi la cui geometria

Dal piano alla superficie





è stata definita in modo da vincolare la forma nella configurazione di finale.

In questo caso, poiché il multistrato con il *kerfing* risulta essere poco elastico, i due triangoli sono sufficienti per stabilizzare la struttura e mantenere la configurazione in equilibrio.

Prototipo 1.3_ polipropilene e multistrato

La realizzazione di prototipi utilizzando materiali diversi, con differenti moduli di elasticità, ha offerto l'opportunità di affrontare ulteriori aspetti della

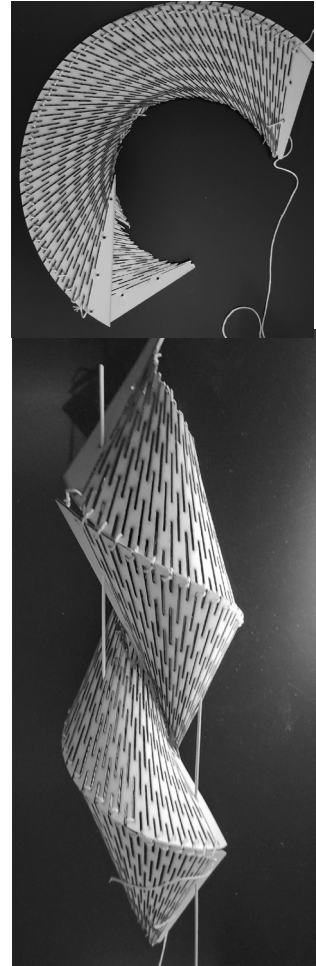


Fig.30/ Elicoide sviluppabile. Prototipo 1.2_multistrato.

Fig.31/ Elicoide sviluppabile. Prototipo 1.2_multistrato. Configurazione piana e superficie. Le due falde con il pattern di taglio sono poco elastiche in questo caso è molto semplice passare dalla configurazione piana a quella di progetto.

Fig.32/ Elicoide sviluppabile. Prototipo 1.2_multistrato. Confronto tra due diverse distribuzioni del pattern per evitare i difetti quali rotture e bruciature.

Dal piano alla superficie

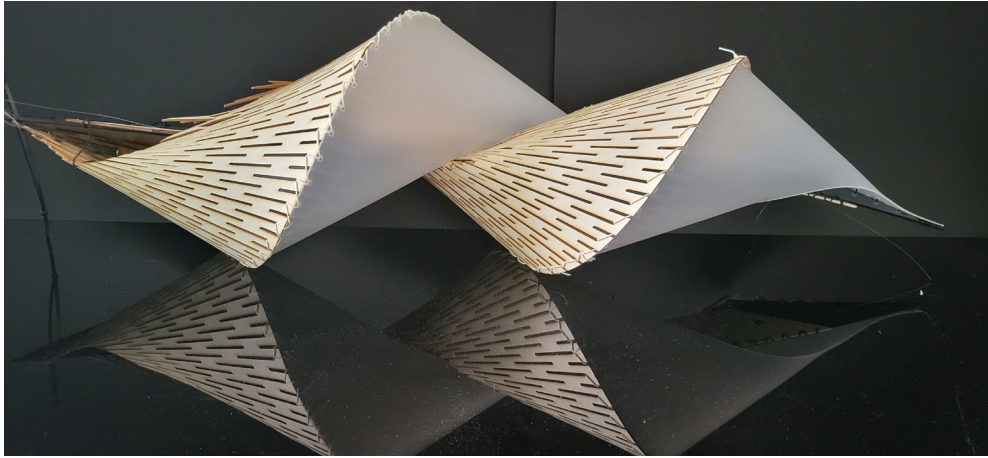
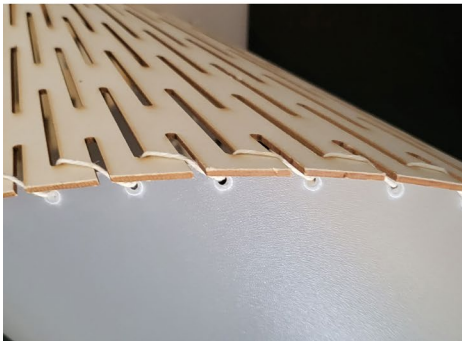


Fig. 33/ Elicoide sviluppabile. Prototipo 1.2_multistrato _ polipropilene. Dalla forma piana alla costruzione del prototipo.

questione per garantire la coerenza strutturale e la resistenza dell'oggetto finale.

Affrontare la questione della realizzazione di prototipi con materiali diversi richiede una attività sperimentale che includa l'analisi dei materiali, l'ottimizzazione del processo e lo sviluppo di strumenti computazionali per guidare il processo decisionale. Attraverso un ciclo iterativo di sperimentazione e miglioramento, è possibile ottenere prototipi più solidi e affidabili.

Il *prototipo 1.3* è costruito con una falda di elicoide



in multistrato, su cui è stato applicato un pattern di taglio per rendere flessibile il materiale, e una falda in polipropilene.

Per la distribuzione del pattern di taglio sono state messe in atto le strategie precedentemente definite per evitare le problematiche connesse alle tecnologie di fabbricazione, la matrice di taglio è stata localmente semplificata in modo da ottenere un pezzo integro, senza bruciature (Fig. 32).

Una volta messe in forma le due falde nel modo analogo ai prototipi precedenti, si sono evidenzia-

Fig.34/ Elicoide sviluppabile. Prototipo 1.3_ polipropilene e multistrato. Dettagli del sistema di vincoli. Le diverse caratteristiche dei due materiali generano tensioni che determinano alcune rotture della falda di multistrato.

te alcune problematiche fondamentali dovute al diverso coefficiente di elasticità dei due materiali. In particolare il prototipo si rompe in alcuni punti poiché l'elasticità del polipropilene induce tensioni maggiori nella struttura che spaccano in alcuni punti la parte in legno.

Da questo esperimento emerge la necessità di condurre un'analisi dettagliata dei materiali utilizzati e delle tensioni che si verificano durante il processo. La differenza nei moduli di elasticità tra il multistrato e il polipropilene causa tensioni incompatibili che portano alla rottura della struttura.

Un'analisi delle tensioni e delle deformazioni può aiutare a prevenire tali problemi.

Sulla base dei risultati ottenuti con i prototipi sperimentali, è importante sviluppare un processo di distribuzione del pattern ottimizzato che tenga conto delle caratteristiche specifiche dei materiali utilizzati. Questo potrebbe includere l'adattamento delle procedure, la scelta di materiali complementari con proprietà simili o la modifica del design per ridurre le tensioni nei punti critici.

Il progetto è basato su un approccio iterativo, che prevede la valutazione continua dei prototipi, l'analisi dei risultati e la revisione del processo in relazione alle nuove informazioni acquisite.

L'obiettivo è quello di costruire un modello computazionale che sia in grado di controllare digitalmente il processo, spesso gestito solo empiricamente osservando i prototipi.

Il modello computazionale rappresenta una risorsa preziosa per prevedere il comportamento dei materiali durante la produzione dei prototipi.

La costruzione di un modello in grado di simulare le tensioni e le deformazioni nei materiali, consente ai progettisti di ottimizzare il processo e prevenire eventuali problemi strutturali introducendo le opportune modifiche.



Prototipo 1.4_alluminio

L'utilizzo di un foglio di alluminio con spessore 0.2mm rappresenta un'interessante alternativa nei processi di prototipazione per la costruzione di superfici sviluppabili, un'opzione che offre un controllo preciso della forma e grandi possibilità nell'ambito del design. Il foglio di alluminio con spessore ridotto offre una combinazione di duttilità, flessibilità e resistenza, che lo rende adatto per la costruzione di superfici complesse.

In questo caso, una volta tagliata la forma sviluppata, si devono applicare le forze necessarie per deformare il materiale per ottenere la forma desiderata che si conserva senza la necessità di introdurre vincoli particolari. Come più volte sottolineato, dalla superficie sviluppata si possono ottenere infinite configurazioni. I vincoli consentono di bloccare la superficie nella forma di progetto, definendo un

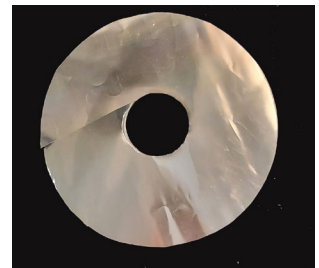


Fig.35/ Elicoide sviluppabile. Prototipo 1.4_alluminio. Il prototipo in alluminio composto da una sola falda si modella facilmente grazie alla duttilità del materiale. Una volta definita la forma non sono necessari vincoli per bloccarla.

Fig.36/ Elicoide sviluppabile. Prototipo 1.4_alluminio. Sviluppata.

Dal piano alla superficie

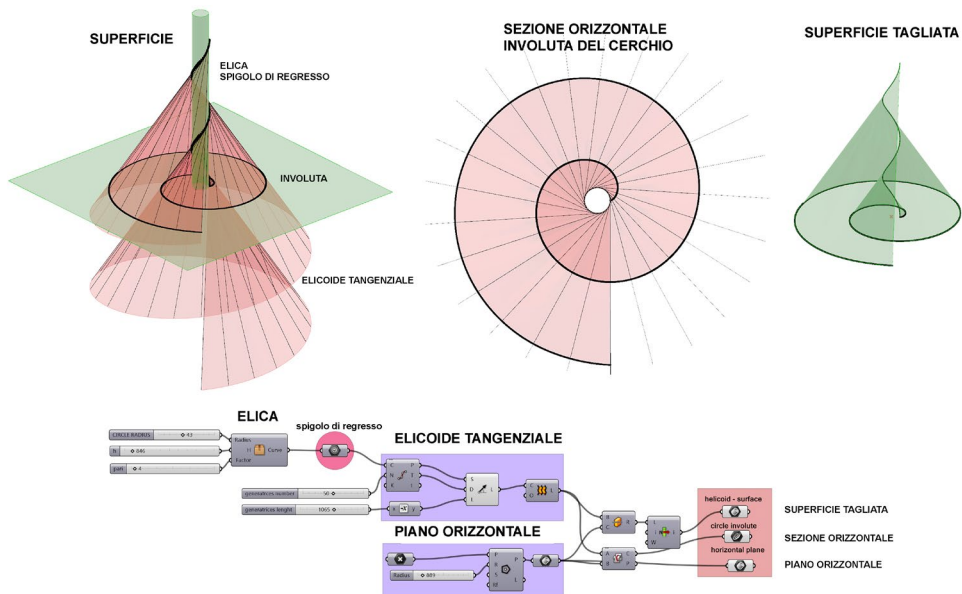


Fig.37/ Prototipo 2. La geometria è generata tagliando una falda di elicoide con un piano orizzontale. La definizione di uno script consente di controllare la superficie in fase di progettazione.

processo controllato e ripetibile. L'alluminio offre la possibilità di ritornare alla configurazione piana applicando semplicemente le stesse forze consentendo di esplorare liberamente diverse configurazioni senza la preoccupazione di danneggiare il materiale o di rendere irreversibili le modifiche apportate. Questo approccio offre vantaggi significativi, soprattutto in termini di controllo della forma e versatilità nel design. L'uso di un materiale come l'alluminio permette di esplorare nuove soluzioni in modo efficiente ed efficace, consentendo ai progettisti di testare e valutare rapidamente diverse possibili configurazioni.

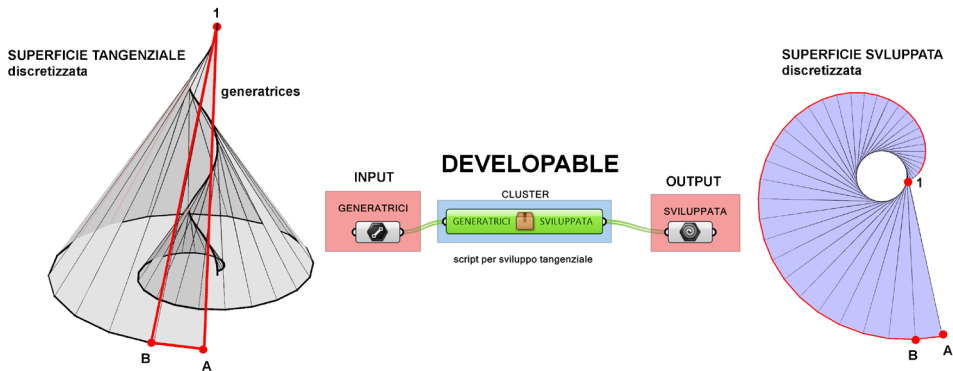
Prototipo 2_geometria

Per la realizzazione del *prototipo 2* è stata utilizzata una porzione di elicoide compresa tra l'elica ed un piano ortogonale all'asse dell'elica.

Anche in questo caso la geometria è stata gestita definendo uno *script* che consente di controllare i parametri per la generazione dell'elica e la posizione del piano orizzontale (Fig. 37). I bordi della super-

11 Cfr. Sviluppata di un elicoide tangenziale p. 95.

12 Cfr. Sviluppata di una tangenziale generica p. 83.



ficie sono definiti dall'elica, da due porzioni di generatrici rettilinee e dalla sezione dell'elicoide con il piano orizzontale che, come è noto, è l'involuta del cerchio il cui raggio è pari al raggio del cilindro dell'elica.

Una volta delimitata la porzione di elicoide da costruire si può disegnare la sviluppata con uno dei metodi precedentemente descritti, quindi, sfruttando le proprietà geometriche della superficie¹¹, oppure utilizzando l'algoritmo DEVELOPABLE che è stato dettagliatamente definito in questo testo¹². Nel primo caso la sviluppata si costruisce disegnando le curve di bordo che sono una parte di circonferenza avente raggio pari al raggio del cerchio osculatore dell'elica, parte della sua involuta e due segmenti rettilinei che coincidono con le generatrici che delimitano la superficie di progetto.

Nel secondo caso, utilizzando l'algoritmo DEVELOPABLE, sarà sufficiente inserire come input n generatrici della superficie e si ottiene la superficie sviluppata già discretizzata (Fig.38).

Determinata la forma piana della superficie di progetto, sono stati definiti i dettagli per la costruzione dei prototipi utilizzando diversi materiali con lo scopo di valutare prestazioni, caratteristiche e potenzialità in relazione a questa attività sperimentale.

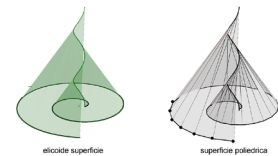
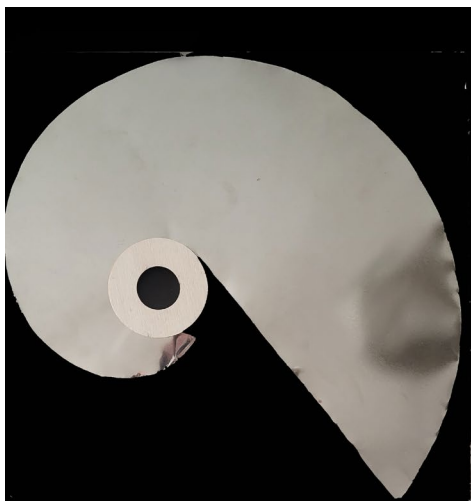


Fig. 38/ Prototipo 2. Definizione della sviluppata utilizzando lo *script* DEVELOPABLE definito per sviluppare una tangenziale qualsiasi.

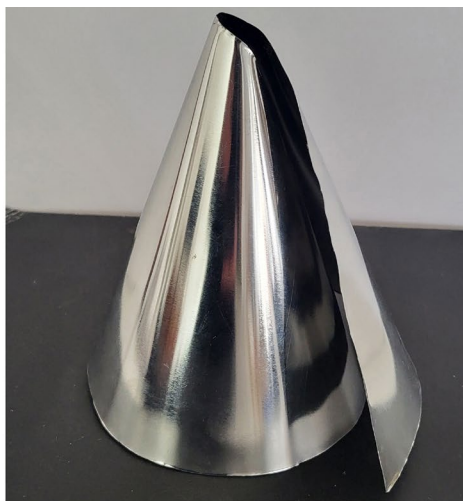
Fig. 39/ Trasformazione della superficie di progetto in una superficie poliedrica.

¹³ Cfr. Dalla sviluppata alla superficie, p. 102.

Dal piano alla superficie

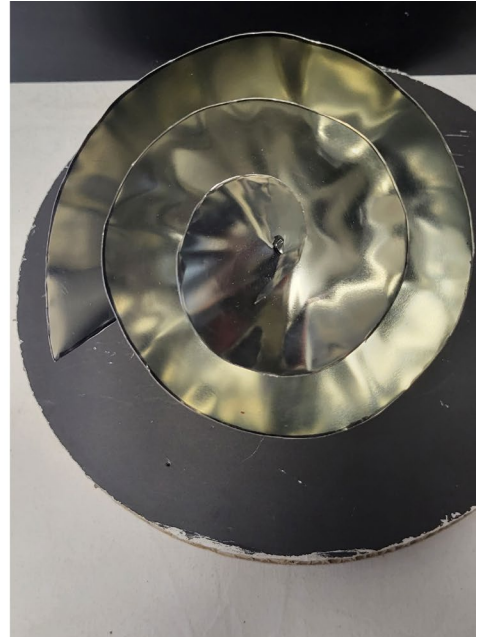
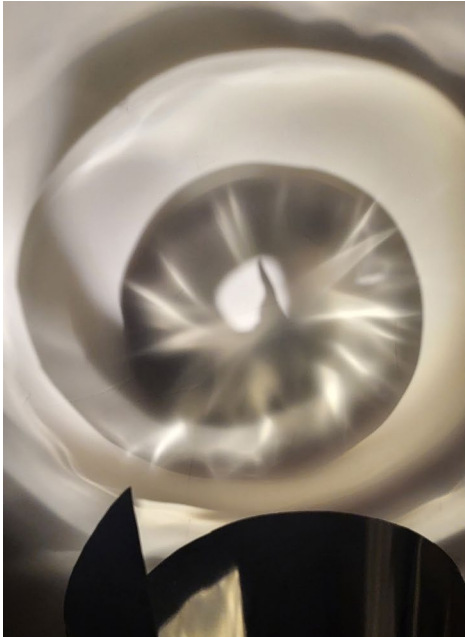


SVILUPPATA



SUPERFICIE IN FORMA
configurazione di progetto





Prototipo 2.1_alluminio

Il *prototipo 2.1* è stato realizzato utilizzando un foglio di alluminio spesso 0,2 mm.

Definita la forma della superficie sviluppata e tagliato il pannello è stato sufficiente applicare la forza necessaria per deformare la superficie piana utilizzando la direzione delle tangenti (Fig.40). Poiché il materiale è duttile una volta modellata la forma non è necessario aggiungere vincoli bloccarla, infatti, per poter ritornare alla configurazione iniziale è necessario applicare nuovamente la forza. Anche in questo caso, alla sviluppata corrispondono infinite possibili configurazioni comprese tra due posizioni limite, la posizione 0 che coincide con la configurazione piana e la posizione 1 che coincide con la configurazione limite in cui l'elica tende al suo asse¹³.

La configurazione del *prototipo 2.1* coincide con una delle infinite possibili compresa tra $0 < \text{prot. 2.1} < 1$. Sfruttando le proprietà geometriche della superficie sviluppata, è stata sperimentata la possibilità di

Fig.40/ Elicoida sviluppabile. Prototipo 2.1_alluminio. Il materiale duttile consente facilmente di mettere in forma la superficie che mantiene la configurazione assunta senza necessità di aggiungere vincoli.

Fig.41/ Prototipo 2.1. Il prototipo in alluminio consente una serie di esplorazioni sulle potenzialità di questa forma che può trasformarsi in un dispositivo luminoso in cui l'ombra proiettata è l'involuto del cerchio del cilindro su cui si sviluppa l'elica che rivela la natura geometrica della superficie.

creare un dispositivo luminoso basato su tali proprietà. Si può infatti verificare che, quando il piano di proiezione è posizionato in modo tale da essere ortogonale all'asse dell'elica, l'ombra proiettata è la proiezione del bordo che assume, quindi, la forma dell'involuta del cerchio.

Questo crea un effetto visivo suggestivo che potenzialmente genera interesse anche nell'osservatore non esperto, contribuendo così a creare un'esperienza visiva coinvolgente (Fig. 41).

Prototipo 2.2_legno

Il *prototipo 2.2* è un meccanismo cinetico che consente di muovere la superficie sviluppata dal piano alla configurazione di progetto. Il prototipo è composto da due parti: una base fissa e la superficie che rappresenta il pezzo mobile.

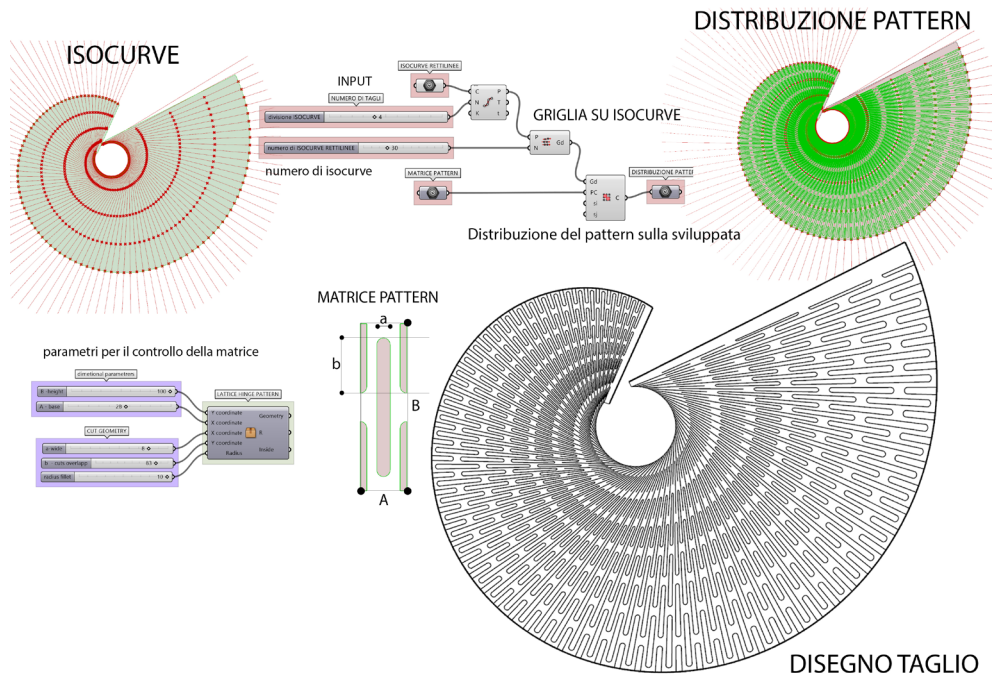
Per la realizzazione del pezzo mobile è stato utilizzato un multistrato spesso 3 mm, materiale che si considera rigido e che è stato reso flessibile utilizzando la tecnica del *kerfing*.

L'obiettivo è stato quello di trasformare il materiale originale in un materiale flessibile, ma non troppo elastico, in modo da poter trasformare facilmente la forma 2D in una configurazione 3D, costruendo un meccanismo che consenta di muovere agevolmente la struttura e bloccarla in diverse posizioni utilizzando semplici connessioni.

Partendo dalla sviluppata della porzione di elicoide definita è stato applicato un pattern di taglio lineare, che è stato distribuito in funzione della curvatura utilizzando le isocurve rettilinee della superficie, come illustrato in precedenza¹⁴.

Per ottenere una distribuzione ottimizzata e un pattern adeguato si agisce sui parametri che consentono di modificare la matrice di taglio in relazione alla massima curvatura della superficie. In particolare si modificano i parametri dimensionali (A e B, base e

¹⁴ Cfr. Distribuzione del pattern lineare, p. 127.



altezza del rettangolo della matrice) e i parametri geometrici (a e b , larghezza e sovrapposizione dei tagli) (Fig.42).

Per definire correttamente i valori di tali parametri in funzione della curvatura massima della superficie sono stati utilizzati i risultati dei test e quindi i valori della curvatura massima ammissibile, prima del punto di rottura, in relazione al materiale e allo spessore. Sfruttando i risultati dei prototipi precedentemente realizzati sono stati, inoltre, risolti tutti i problemi connessi alla tecnologia di fabbricazione ottenendo un pezzo senza bruciature, ottimizzato da un punto di vista strutturale, che si flette senza necessità di applicare forze troppo intense che provocherebbero tensioni, rotture e soprattutto instabilità.

Ulteriore sperimentazione è stata portata avanti per il progetto della base del meccanismo che dimostra come la geometria possa essere utilizzata per individuare specifiche soluzioni costruttive.

Fig.42/ Prototipo 2.2_legno. Progetto del pezzo mobile. Distribuzione del pattern di taglio lineare per rendere flessibile il materiale in funzione della curvatura. I parametri scelti consentono di modificare la griglia e la matrice di taglio in coerenza con i risultati dei test.

15 Cfr. Dalla sviluppata alla superficie, p. 102.

Dal piano alla superficie

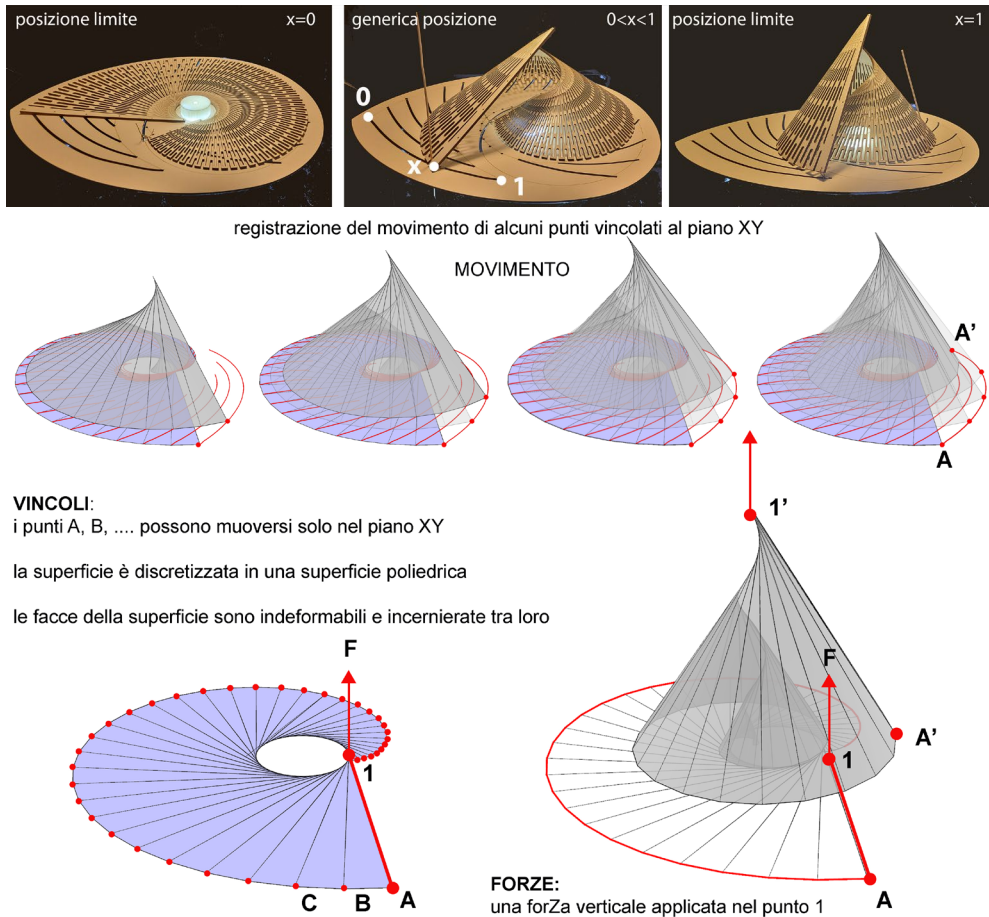
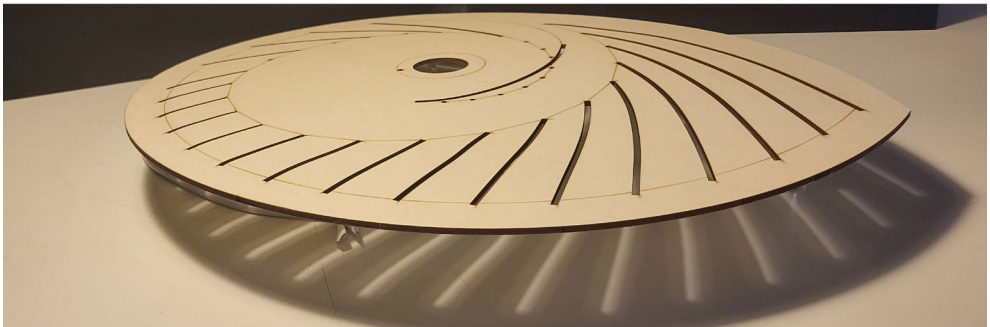
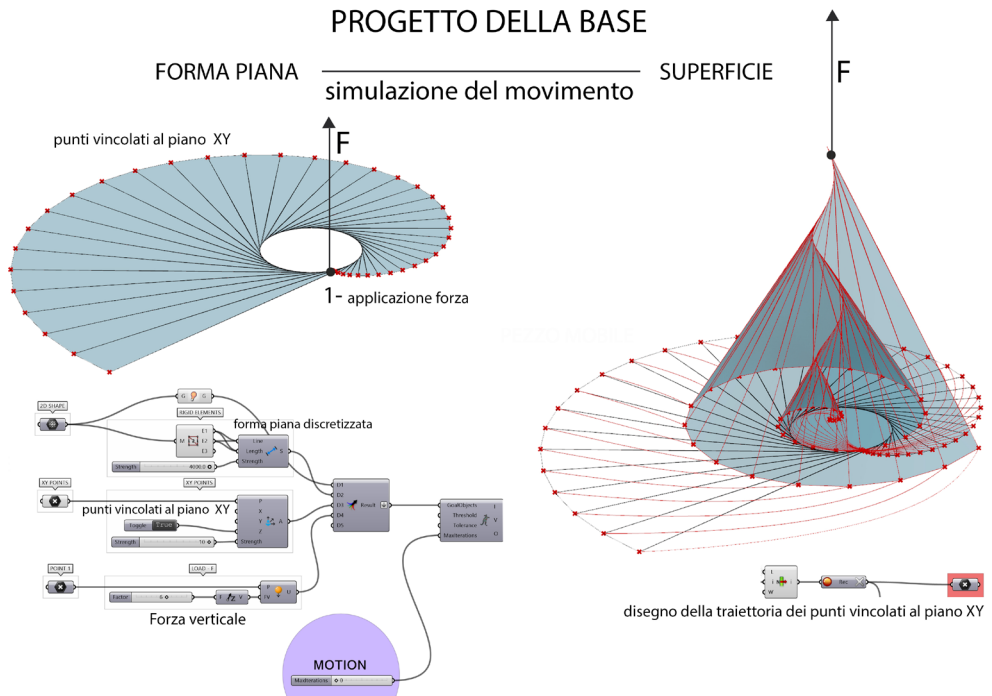


Fig. 43/ Prototipo 2.2_legno. Progetto del sistema dei vincoli e del meccanismo cinetico. Confronto del modello digitale del meccanismo con il modello fisico.

Da un punto di vista teorico si dimostra, infatti, che a partire dalla superficie si definisce in modo univoco la sua sviluppata ma non viceversa¹⁵.

Ciò significa che la sviluppata disegnata sul piano è la sviluppata di infiniti elicoidi che hanno come spigolo di regresso porzioni di eliche con la stessa curvatura e stessa lunghezza.

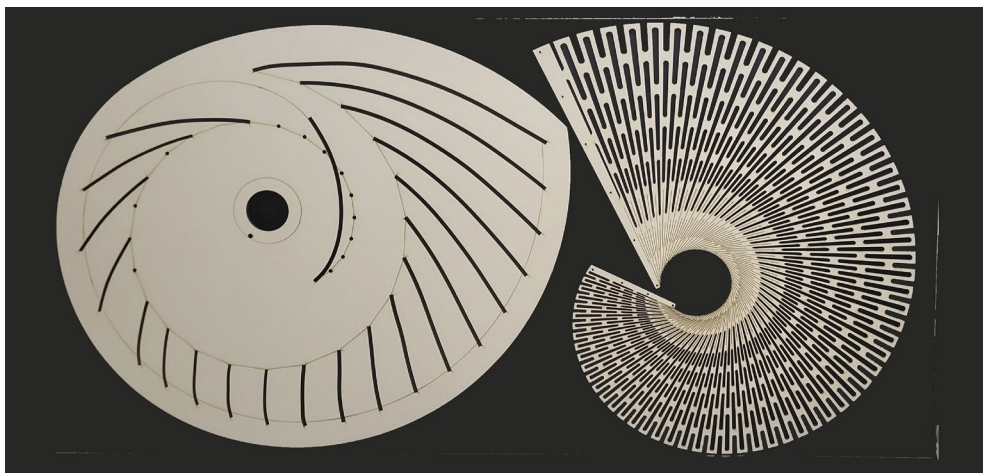
Pertanto, per poter mettere in forma la superficie piana è necessario definire in modo consapevole i vincoli del sistema. Il progetto del prototipo cinetico si fonda proprio sulla simulazione del processo dinamico che consente di trasformare la forma pia-



na nella configurazione stabilita (Fig.43). Partendo dalla sviluppata discretizzata in facce piane, che si considerano indeformabili ed incernierate tra loro, si vincolano al piano xy n punti appartenenti al bordo esterno della sviluppata. In ambiente VPL, applicando una forza verticale nel punto 1 si può simulare il movimento e si possono definire le infinite configurazioni tra le due posizioni limite: quella piana in cui

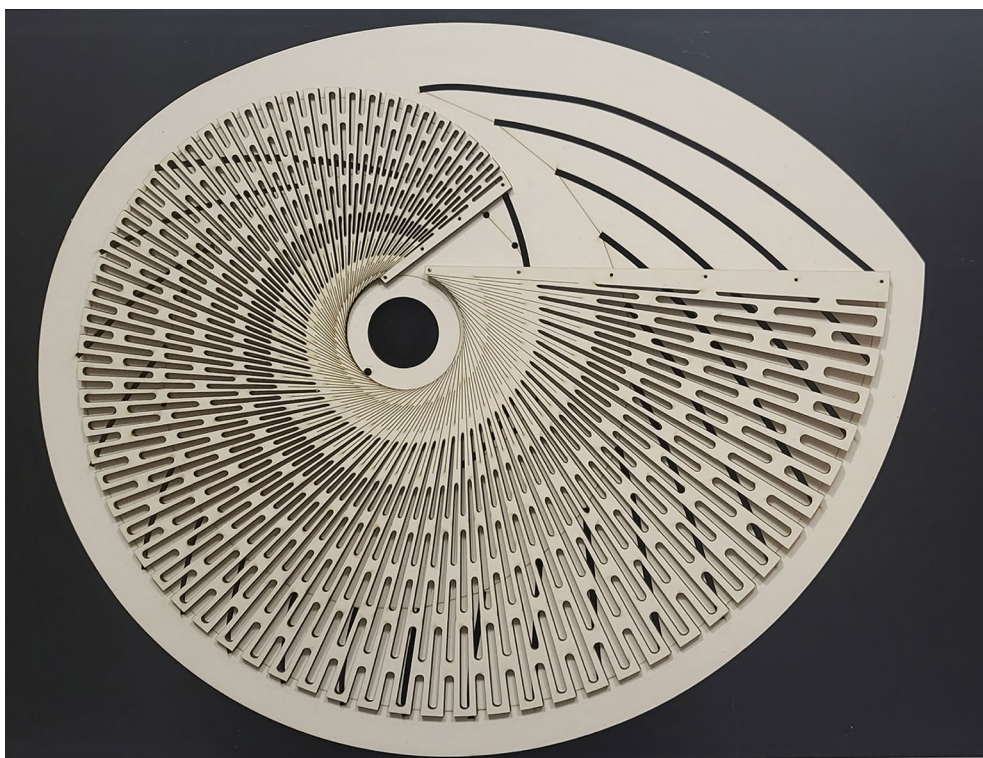
Fig.44/ Prototipo 2.2_legno. Script per la simulazione del cinematismo per il progetto della base. La registrazione del movimento consente di disegnare i binari per costruire il meccanismo.

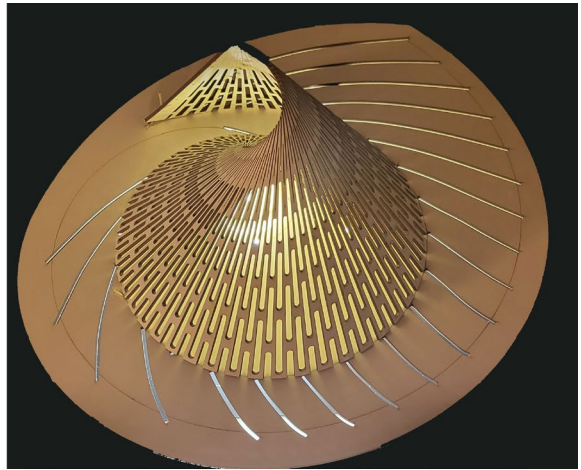
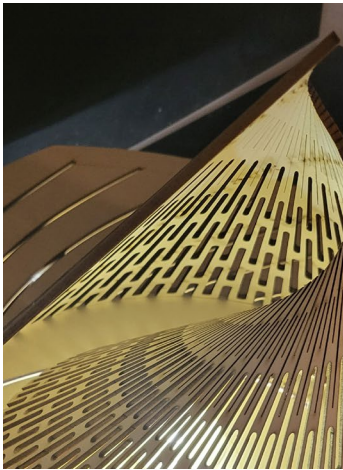
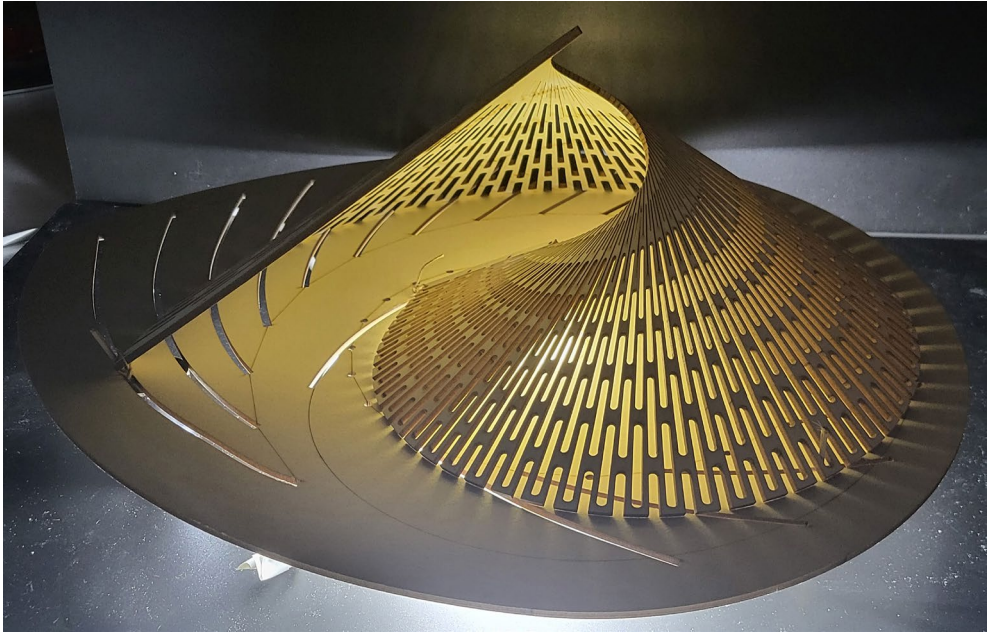
Dal piano alla superficie



BASE

PEZZO MOBILE





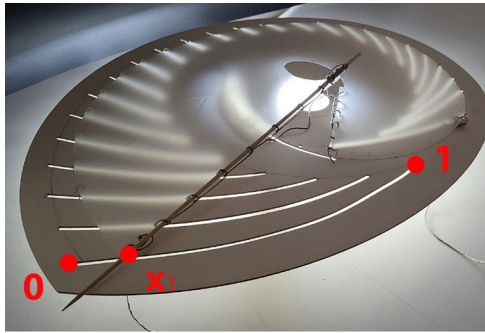
l'elica coincide con il suo sviluppo e, quindi, con il cerchio osculatore, e quella in cui l'elica tende al suo asse. In questo caso la configurazione di progetto, configurazione 1, rappresenta una posizione intermedia tra le due posizioni limite (Fig.43).

Per costruire fisicamente il prototipo è stata definita

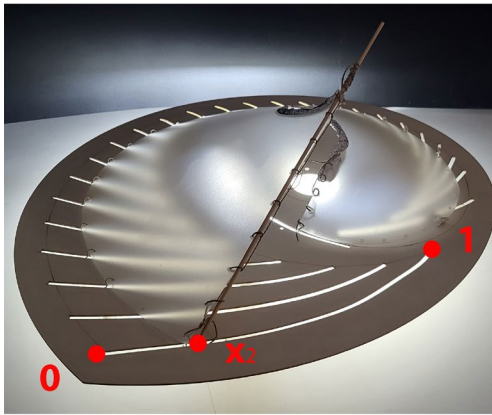
Fig.45/ Prototipo 2.2_legno. Pezzi piani costruiti con taglio laser.

Fig.46/ Prototipo 2.2_legno. Prototipo assemblato. Esplorazione delle potenzialità del prototipo cinetico.

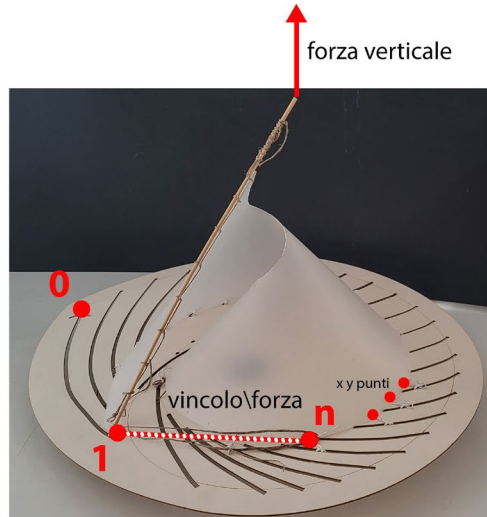
Dal piano alla superficie



posizione 1



posizione 2



posizione 3

Fig.47/ Prototipo 2.3_polipropilene. Definizione dei vincoli necessari per mantenere la forma in equilibrio in relazione alle tensioni che si determinano per l'elasticità del materiale.

una strategia progettuale basata sulla rappresentazione del movimento. La registrazione della traiettoria di alcuni punti scelti ha consentito di definire il disegno dei binari e il disegno dei tagli che consentono di vincolare con dei carrelli i punti assunti come riferimento e, quindi, di costruire il meccanismo cinetico (Fig. 44).

Il prototipo finale è composto da due pezzi, la base con i binari e la superficie con il *kerfing*, collegati tra loro con dei carrelli che scorrono nei solchi della base (Fig. 45).

Il meccanismo si attiva semplicemente applicando una forza verticale (Fig. 46).

Da un punto di vista metodologico questa esperien-

za apre la strada a numerosi altri esperimenti basati sull'utilizzo della simulazione cinetica per la progettazione dei meccanismi che consentono la costruzione di forme che cambiano configurazione, in altri termini strutture adattive.

Prototipo 2.3_polipropilene

L'esplorazione di alternative per lo stesso prototipo cinetico ha portato alla realizzazione di una versione in cui sulla stessa base è montato un pezzo mobile realizzato in polipropilene.

Questo materiale è elastico, cambia forma quando vengono applicate le forze e ritorna nella sua configurazione originale una volta che le forze vengono rimosse (fig. 47).

Si può verificare che in questo caso per passare dalla forma iniziale piana alla configurazione finale non sarà sufficiente applicare una sola forza verticale, come illustrato per il *prototipo 2.2*, ma sarà necessario introdurre altri vincoli per ottenere una forma in equilibrio.

I vincoli necessari devono contrastare le sollecitazioni interne che dipendono dalla curvatura e dall'elasticità del materiale, nel caso in esame tali vincoli sono stati definiti empiricamente, osservando il prototipo. È stato notato che, passando dalla posizione iniziale con $x = 0$ alla posizione finale con $x = 1$, la forza necessaria per mantenere il sistema in equilibrio aumenta progressivamente, raggiungendo il massimo per $x = 1$.

I risultati di questa sperimentazione sono la base di ricerche in corso, che hanno come obiettivo quello di definire un modello computazionale più dettagliato e accurato per simulare il comportamento del materiale in funzione della sua elasticità.

Questo modello potrebbe consentire una progettazione più precisa e ottimizzata dei vincoli necessari per ottenere la configurazione di progetto.

Dal piano alla superficie

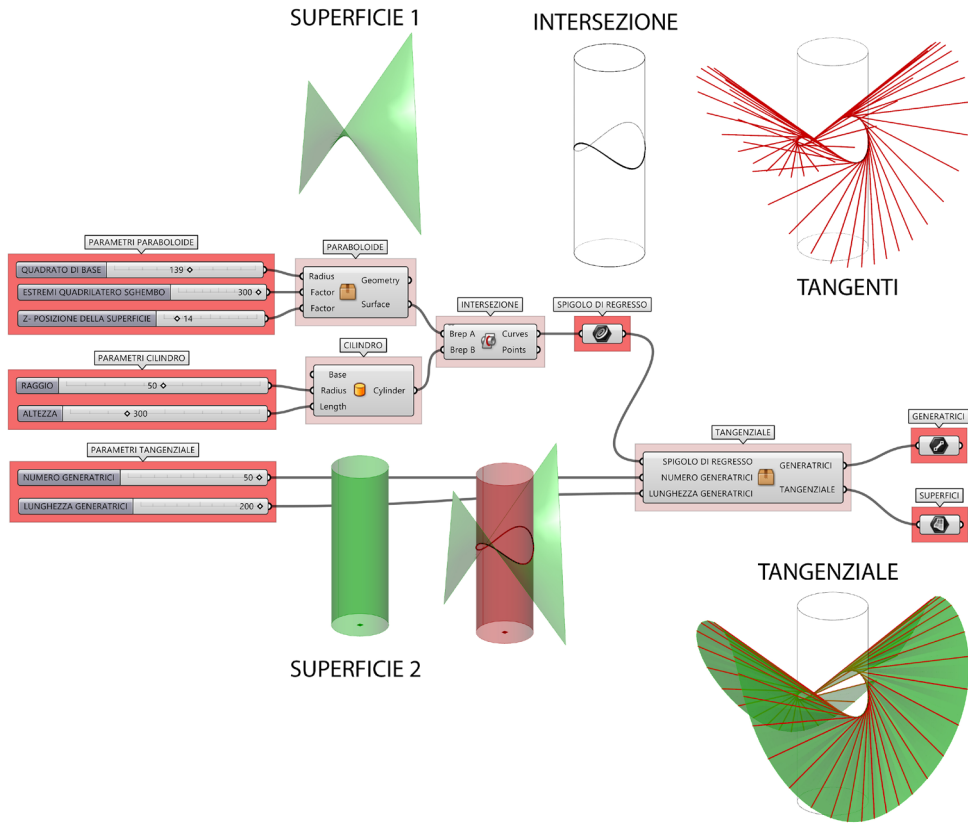


Fig.48/ Tangenziale intersezione. Script elaborato per controllare la generazione della superficie tangenziale in funzione dello spigolo di regresso definito come intersezione di due superfici..

Tangenziale: spigolo di regresso intersezione

La tangenziale è una particolare superficie sviluppabile ottenuta conducendo le tangenti ad una curva gobba, detta spigolo di regresso o direttrice della rigata. Da un punto di vista teorico, la superficie può essere controllata in funzione della natura di questa curva direttrice, che può essere una curva luogo geometrico, una linea grafica oppure, come nel caso considerato, un'intersezione di due superfici¹⁶.

Dal punto di vista metodologico, il controllo della geometria può essere definito utilizzando un processo in cui i parametri di riferimento sono quelli specifici delle due superfici utilizzate e quelli che consentono di definire la posizione di una superficie rispetto all'altra.

¹⁶ Cfr. Costruzione e controllo delle tangenziali, p. 63.

L'obiettivo è sempre quello di definire un metodo generale utilizzabile anche in altri casi analoghi.

I prototipi basati su questo principio sono stati realizzati utilizzando come spigolo di regresso una curva chiusa determinata come intersezione di un cilindro circolare retto con un paraboloido iperbolico. Le diverse configurazioni sono state controllate parametricamente in modo da gestire interattivamente la generazione della superficie tangenziale in relazione alle dimensioni del cilindro e alla configurazione del paraboloido e, quindi, alla direttrice¹⁷ (Fig. 48).

L'algoritmo che è stato definito consente di generare infinite soluzioni alternative basate sulla stessa logica (Fig. 48).

Tuttavia, la tangenziale generata con questo processo non è una superficie notevole, il che significa che non sono note specifiche proprietà geometriche per determinare lo sviluppo.

Proprio per affrontare e risolvere questo problema una volta definita la forma di progetto, è stato testato il funzionamento di DEVELOPABLE¹⁸ che ha consentito di definire la sviluppata della superficie di progetto.

In questo caso, come spesso accade, lo sviluppo della superficie si sovrappone su sé stesso, è stato quindi necessario dividere in due parti la superficie per poterla costruire. Lo *script* è stato progettato per risolvere anche questo problema e per consentire al progettista di dividere lo sviluppo in due o più parti, a seconda del caso e della necessità, semplicemente variando il numero delle generatrici, unico input richiesto (Fig. 49).

Una volta definita la sviluppata, la superficie può teoricamente essere costruita utilizzando un qualsiasi materiale flessibile, con vincoli e connessioni che dipendono dal tipo di oggetto ma soprattutto dalle caratteristiche del materiale.

La realizzazione di diversi prototipi dimostra la ver-

¹⁷ Cfr. Costruzione e controllo delle tangenziali, p. 63.

¹⁸ Cfr. Sviluppata di una tangenziale generica, p. 83.

Dal piano alla superficie

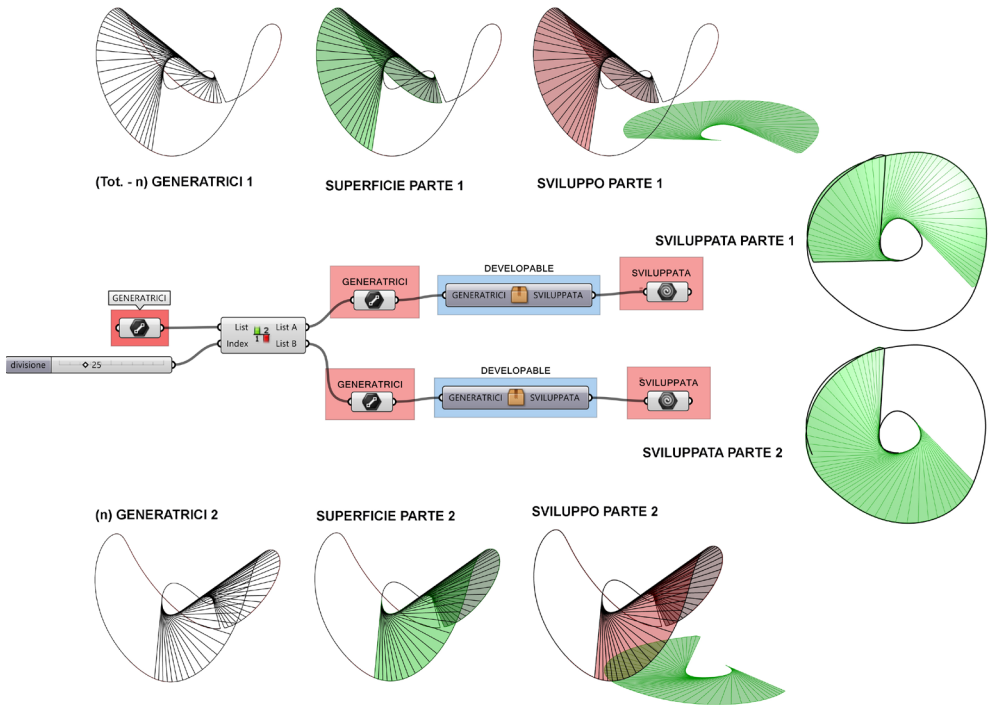


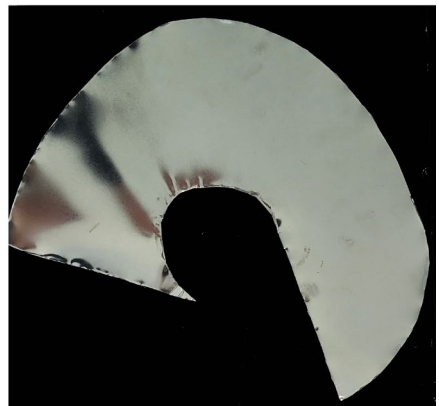
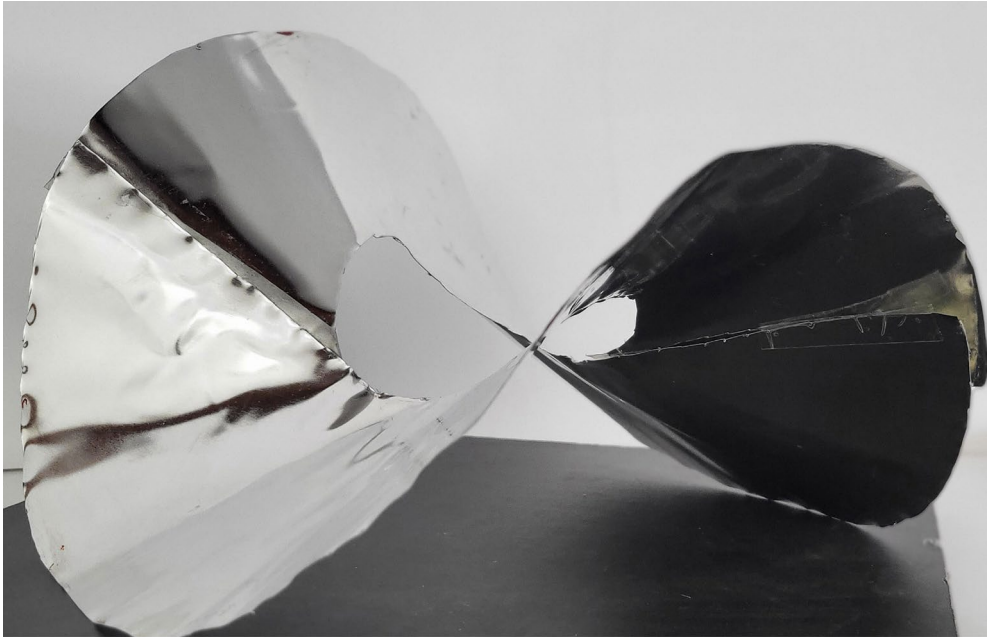
Fig.49/ Tangenziale intersezione. Test dello script DEVELOPABLE definito nell'ambito di questa ricerca. L'algoritmo consente di sviluppare una tangenziale qualsiasi e di dividere in parti lo sviluppo in modo da risolvere il problema della sovrapposizione.

satilità delle tecniche costruttive e dei materiali utilizzati, evidenziandone il diverso comportamento in relazione alla configurazione della superficie e alle forze applicate. Tale sperimentazione fornisce preziose informazioni per lo sviluppo e l'ottimizzazione di futuri progetti basati sull'utilizzo di questa famiglia di superfici

Prototipo 1_alluminio

Il prototipo in alluminio, realizzato con un foglio spesso 0.2 mm, è stato costruito sfruttando la duttilità del materiale che lo rende facilmente lavorabile. Per passare dalla sviluppata alla configurazione di progetto, la forma piana è stata deformata applicando forze che seguono la direzione delle generatrici, consentendo così di modellare la forma in base al progetto.

La superficie è stata divisa in due parti, che sono



state unite con alcuni punti di saldatura (Fig. 50). Dall'osservazione del prototipo emerge che, grazie alla duttilità dell'alluminio, ciascun pezzo conserva la sua forma anche quando non è collegato all'altro. Ciò dimostra che non ci sono tensioni significative da contrastare nel vincolo che si progetta per unire i due pezzi.

Questa proprietà rende il processo di costruzione molto più semplice e riduce la complessità dei vinco-

Fig. 50/ Tangenziale intersezione. Prototipo 1_alluminio. In questo caso la sviluppata è stata divisa in due parti. La connessione è stata realizzata con una semplice saldatura.

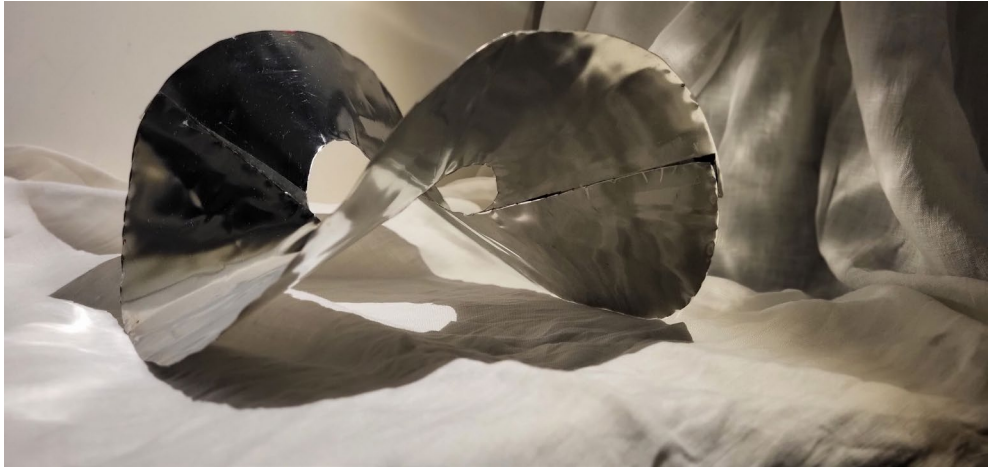
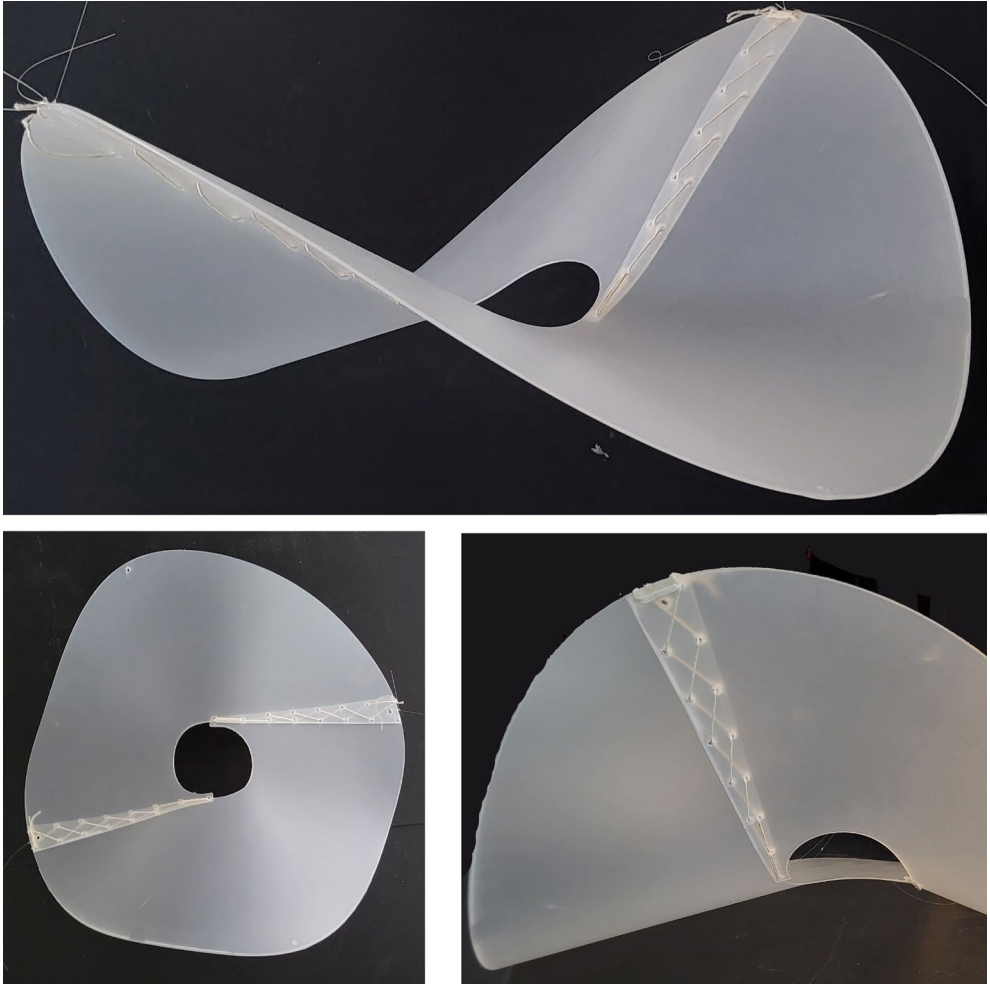


Fig.51/ Tangenziale intersezione. Prototipo 1_alluminio. Ombre e riflessioni: lo studio delle ombre restituisce la natura della superficie: la curva gobba intersezione di un paraboloide con un cilindro circolare, proiettata ortogonalmente restituisce l'immagine del cerchio di base.

li necessari, consentendo una maggiore libertà nel design e una maggiore facilità di montaggio.

Prototipo 2_polipropilene

L'obiettivo della sperimentazione è stato quello di realizzare la stessa forma utilizzando tecniche di fabbricazione differenti e materiali con diverse caratteristiche. Il secondo prototipo, realizzato tagliando un pannello di polipropilene spesso 1mm, offre spunti di riflessione soprattutto rispetto alla questione dei vincoli e delle connessioni proprio in relazione all'elasticità del materiale.



Sono stati realizzati due prototipi in scale diverse, e dai test effettuati emerge che il coefficiente di elasticità del materiale determina alcune problematiche nel prototipo più piccolo, poiché si generano tensioni maggiori proprio a causa di tale coefficiente¹⁹ (Fig. 52). L'attività di *testing* ha permesso di verificare che tali tensioni si riducono in funzione della scala e si annullano applicando opportunamente un pattern di taglio alla superficie (Fig. 53).

I risultati della sperimentazione in corso costituiscono la base per definire strumenti parametrici che

Fig. 52/ Prototipo 2_polipropilene. Il prototipo consente di verificare il comportamento di un materiale elastico ed in particolare di affrontare le problematiche connesse alla messa in forma e ai vincoli.

¹⁹ Cfr. p. 157.

Dal piano alla superficie



Fig.53/ Prototipo 2_polipropilene. Tangenziale intersezione. Applicando un pattern di taglio al polipropilene le tensioni si annullano.

consentano di simulare il comportamento elastico del materiale agevolando la fase di progetto. Tale processo permette di calcolare le tensioni che si generano in funzione del coefficiente di elasticità del materiale e, di conseguenza, di progettare i vincoli in modo scientifico.

Prototipo 3_PLA stampa su tessuto

Il *prototipo 3* è una delle sperimentazioni più avanzate, si tratta di una lampada a sospensione realizzata con tecnica di fabbricazione additiva composta da due parti: una porzione di cono, il cui bordo inferiore è determinato intersecando il cono con un paraboloide iperbolico, e una tangenziale, ottenuta utilizzando come spigolo di regresso l'intersezione di un cilindro con un paraboloide iperbolico, la stessa curva utilizzata nei casi precedenti.

La geometria è il filo conduttore di tutto il progetto, delle singole parti e delle relazioni che si materializzano per costruire le connessioni. Le due parti, la porzione di cono e la tangenziale, sono tra loro collegate con tre fili di acciaio che coincidono con l'ideale prolungamento di tre generatrici del cono

20 Capone M. 2019.
21 Cfr. Tecniche sperimentali,
p.133.



(Figg.55 e 56). In questo caso la superficie tangenziale utilizzata nel progetto è stata discretizzata in quadrilateri²⁰ ed è stata sperimentata una tecnica basata sull'utilizzo di un materiale tessile, il tulle, su cui sono stati stampati i quadrilateri in PLA.

Questo metodo sperimentale consente di stampare la forma in piano, mentre lo spazio tra le facce è stato calcolato in modo che la superficie sia flessibile quanto necessario²¹. Per conferire forma alla configurazione finale, è stato progettato un bordo esterno rigido, un telaio curvo stampato in PLA, che ha permesso di costruire la forma in equilibrio.

Questa sperimentazione rappresenta un esempio significativo di come l'ibridazione di conoscenze geometriche, tecniche e materiali possa generare un prototipo con caratteristiche estetiche e funzionali interessanti, evidenziando ancora una volta il ruolo

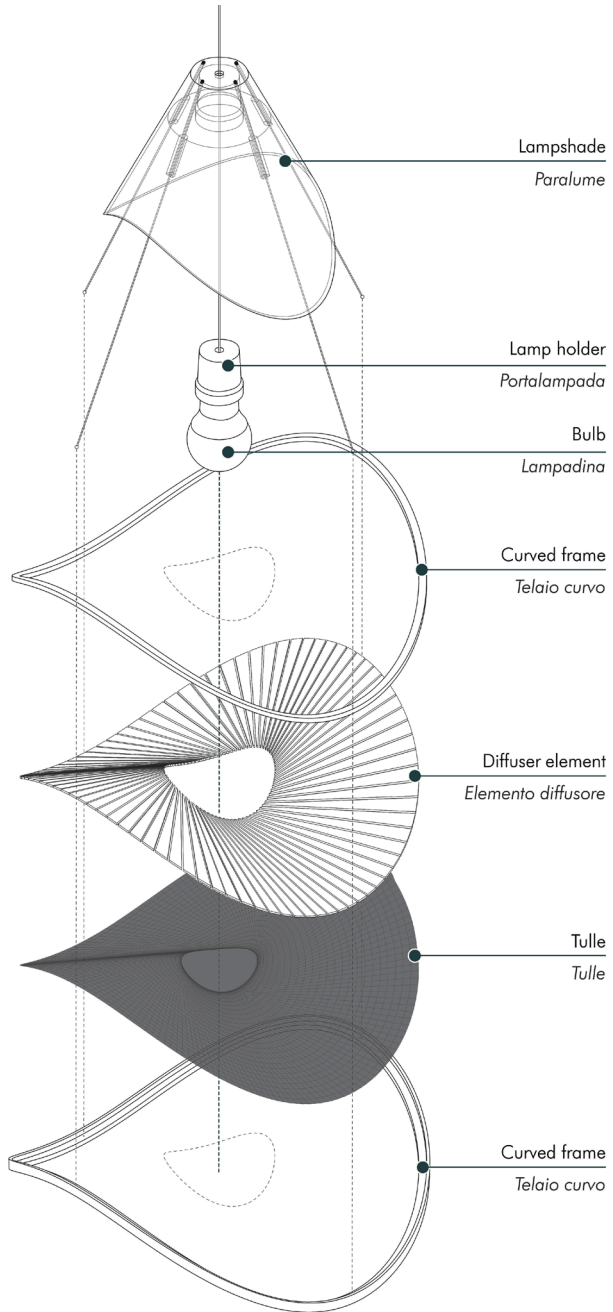
Fig. 54/ Prototipo 3_PLA stampa su tessuto. Sperimentazione per la costruzione del prototipo con tecnica di fabbricazione additiva e tessuto. Dettaglio.

Dal piano alla superficie



Fig.55/ Prototipo 3_PLA stampa su tessuto. Immagini della lampada. Foto di Paola Buccaro.

Fig.56/ Prototipo 3_PLA stampa su tessuto. Elementi che compongono la lampada e schema di assemblaggio. Disegno di Paola Buccaro.



Exploded axonometry

6. Applicazioni

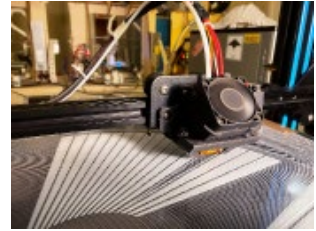
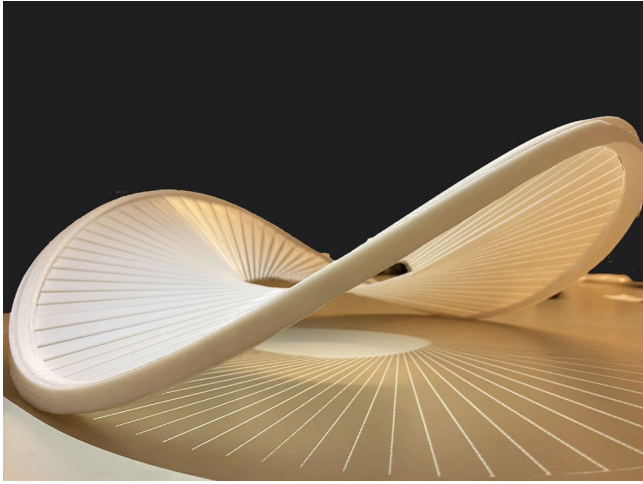
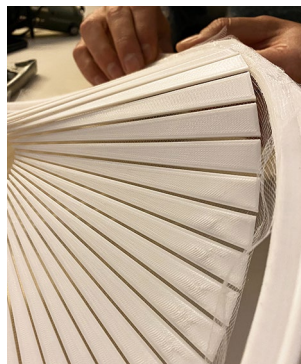
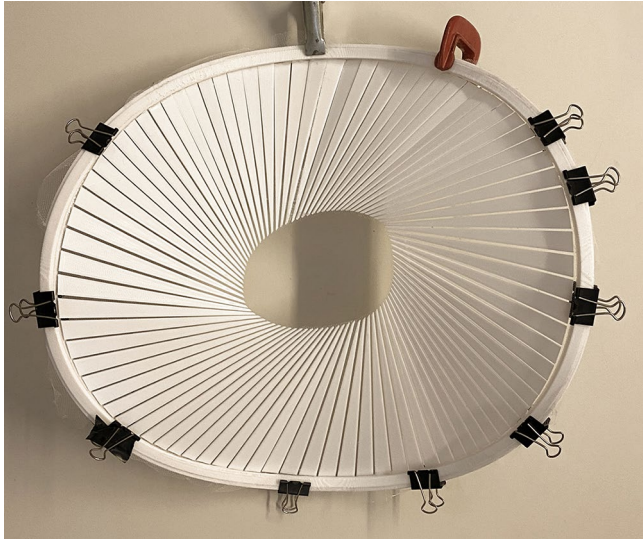


Fig. 57/ Prototipo 3_PLA Pezzo realizzato sperimentando la tecnica di stampa su tessuto. Processo di stampa 3d.

Fig. 58/ Prototipo 3_PLA stampa su tessuto. Fasi per l'assemblaggio del diffusore. Prototipo realizzato da Paola Buccaro.



Dal piano alla superficie

Fig.59/ Prototipo 3_PLA stampa su tessuto. Da questa immagine emerge chiaramente come la geometria sia la guida per il progetto della lampada: i cavi che collegano il pezzo di cono con il diffusore sono disposti in modo da seguire l'andamento ideale di due generatrici.



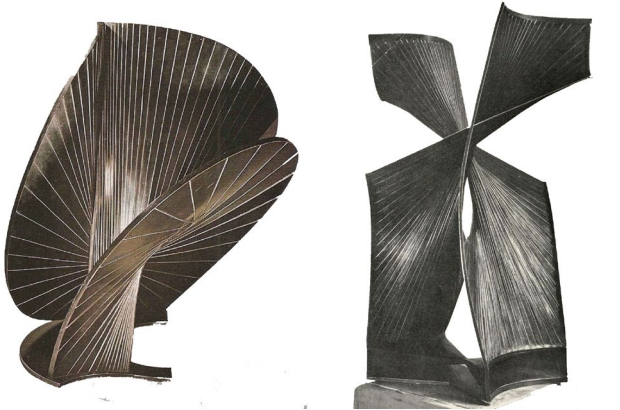
fondamentale della geometria nell'ambito della progettazione e della produzione.

Tangenziale: spigolo di regresso linea grafica

Il caso più generali delle tangenziali è rappresentato dall'utilizzo di una qualsiasi linea grafica assunta come spigolo di regresso. Non partendo da nessuna regola geometrica nota la gestione di una linea grafica qualsiasi si rivela particolarmente complessa così come è complesso il controllo della superficie tangenziale che da questa curva si genera²². Per la costruzione di questo prototipo fonte di ispirazione fondamentali sono stati i modelli fisici realizzati per rappresentare e verificare le proprietà notevoli delle superfici, molto diffusi soprattutto verso la fine

²² Cfr. Generazione dello spigolo di regresso. Intersezioni, p.72.

6. Applicazioni



dell'Ottocento, e alcune opere d'arte che da questi prototipi hanno tratto spunto.

Questo approccio dimostra come la geometria possa essere utilizzata in modo creativo e innovativo, anche senza seguire regole geometriche rigide, aprendo la strada a soluzioni originali e interessanti sia dal punto di vista estetico che funzionale.

I prototipi di modelli matematici, inizialmente sviluppati principalmente per scopi didattici, si diffusero rapidamente fino a diventare oggetto di esposizioni e sezioni specifiche all'interno di molti musei scientifici sia in America che in Europa²³. Questi modelli esercitarono un'influenza significativa

Fig. 60/ Barbara Hepworth. String Figure (Curlew), Version II 1956, edition 1959. Immagine rieditata dall'autore.

Fig. 61/ Barbara Hepworth, Orpheus (Maquette 2) (Version II) 1956, edizione del 1959.

Fig. 62/ Antoine Pevsner: Construction surfaces développables (1938).

Fig. 63/ Antoine Pevsner: Developable victory column (1946).

Fig. 64/ Antoine Pevsner: Surface développable (1938).

²³ Farinella C. 2018.

Dal piano alla superficie

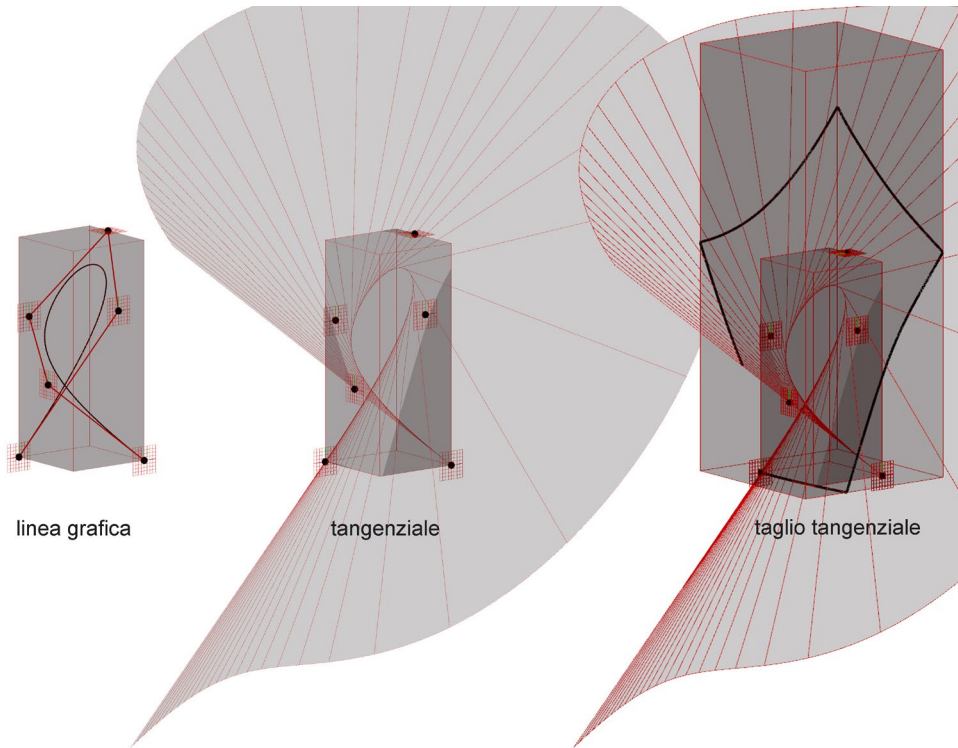
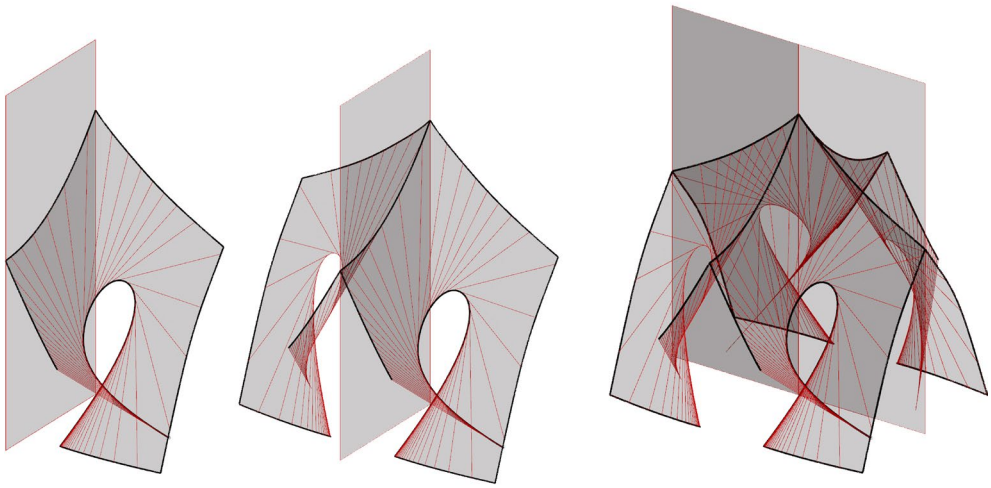


Fig. 65/ Tangenziale linea grafica. Controllo della geometria della superficie attraverso la modifica della linea grafica. In questo caso è stato definito uno script che consente di modificare i punti di controllo che appartengono alle facce di un parallelepipedo che può essere modificato. La superficie è stata generata assegnando la lunghezza delle tangenti e tagliandole con un parallelepipedo.

sugli artisti dell'epoca, come dimostra l'opera dello scultore francese di origine russa Antoine Pevsner che, negli anni '30 del XX secolo, produce una serie di sculture astratte intitolate *Surface développable*, basate proprio sul principio generativo delle tangenziali sviluppabili. Queste opere testimoniano l'interesse degli artisti per i concetti matematici e geometrici, nonché la loro capacità di tradurre tali concetti in opere d'arte originali e suggestive.

In ambito artistico, l'utilizzo delle tangenziali sviluppabili generate da linee grafiche ha avuto un ruolo fondamentale nella risoluzione di problemi costruttivi, in quanto, permettendo la costruzione di forme complesse a partire da superfici piane, esse facilitano il processo di realizzazione. Un esempio notevole sono le sculture di Barbara Hepworth, che a partire dagli anni '50 del XX secolo ha prodotto una serie



di opere deformando superfici piane o utilizzandole come strutture su cui costruire le sue sculture.

L'interesse per queste forme apparentemente astratte, ma controllabili nella loro generazione e sviluppo, ha costituito la base per molte sperimentazioni. A tal proposito, l'algoritmo DEVELOPABLE rappresenta un'importante risorsa per i designer interessati ad esplorare e manipolare le forme sviluppabili in modo creativo e innovativo. Consentendo la determinazione della sviluppata di qualsiasi tangenziale e, quindi, la costruzione di una qualsiasi superficie sviluppabile, questo strumento offre agli artisti e ai progettisti la possibilità di creare forme che, pur essendo apparentemente astratte, possono essere controllate nel loro processo di generazione e sviluppo. L'utilizzo di DEVELOPABLE, e il processo ad esso connesso, può dunque aprire nuove opportunità per l'espressione artistica e per l'innovazione nel design.

Osservando le sculture di Pevsner l'esperimento è stato quello di generare superfici simili in ambiente VPL per verificare limiti e potenzialità del modello digitale nel processo di ideazione della forma.

Fig.66/ Tangenziale linea grafica. Il prototipo è stato composto utilizzando la stessa porzione di tangenziale specchiata rispetto a due delle facce del parallelepipedo.

Dal piano alla superficie

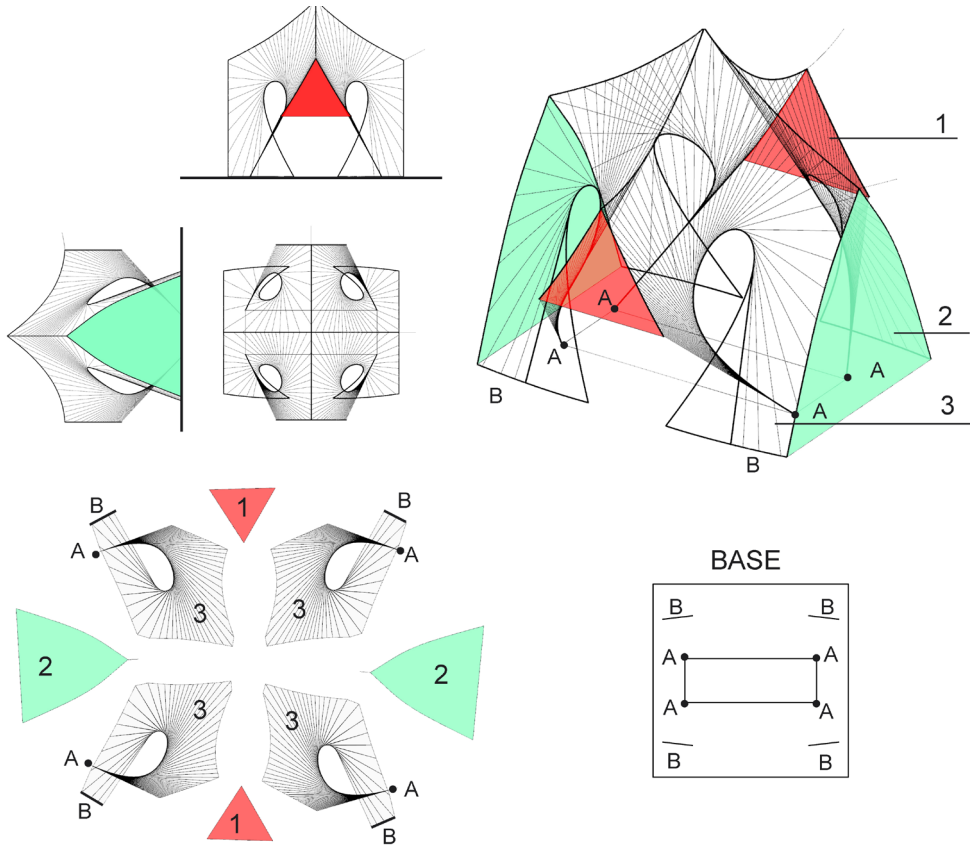
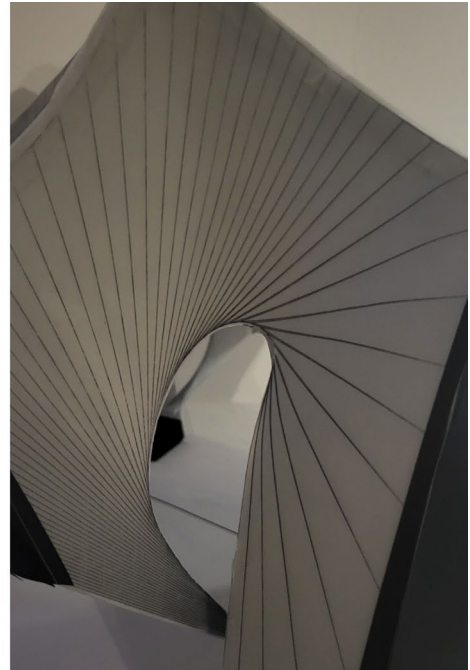
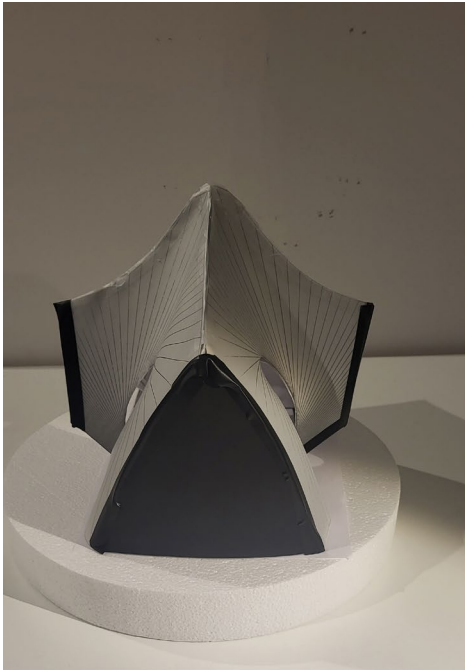


Fig. 67/ Tangenziale linea grafica. Progetto esecutivo dei vincoli e delle connessioni. Sviluppata dei pezzi da tagliare definita utilizzando lo script DEVELOPABLES..

Prototipo 1_cartoncino

Anche per la realizzazione di questo prototipo sperimentale l'utilizzo di uno *script* per la definizione della geometria offre la possibilità di esplorare una vasta gamma di configurazioni fornendo flessibilità e versatilità nel processo creativo. L'uso di una linea grafica come direttrice della tangenziale, definita tramite una curva *NURBS* (*Non-Uniform Rational B-Spline*), rappresenta un metodo avanzato per controllare la geometria di una superficie sviluppabile. La curva *NURBS* è definita da un poligono di controllo i cui vertici sono posizionati sulle facce di un parallelepipedo (Fig.65).

Questo approccio offre un elevato grado di flessibilità e controllo sulla forma della curva, consentendo



al progettista di modellare la superficie in modo preciso e dettagliato.

Tuttavia, gestire e manipolare una curva *NURBS* è un'operazione particolarmente complessa che richiede competenze specifiche soprattutto sulle proprietà di queste curve e sulla gestione in ambiente VPL²⁴.

Per la realizzazione del prototipo è stata definita una porzione della tangenziale ottenuta conducendo le tangenti alla linea grafica definita e intersecando la superficie con un parallelepipedo (Fig. 65).

I bordi della superficie sono quindi sezioni piane, utilizzando due copie speculari della sviluppabile rispetto a due facce del parallelepipedo, è stata delineata una configurazione composta da quattro pezzi di tangenziali aventi in comune le sezioni piane precedentemente definite (Fig. 66).

Una volta generata la geometria del prototipo, cruciale è il progetto del sistema di vincoli che consente

Fig.68/ Tangenziale linea grafica. Prototipo realizzato in cartoncino. La configurazione finale si definisce facilmente collegando tra loro i singoli pezzi. La struttura diventa stabile grazie alle connessioni disegnate sulla base.

²⁴ Per approfondimenti sulle modalità di controllo delle curve vedi Valenti G.M. 2022, p.106.

Dal piano alla superficie

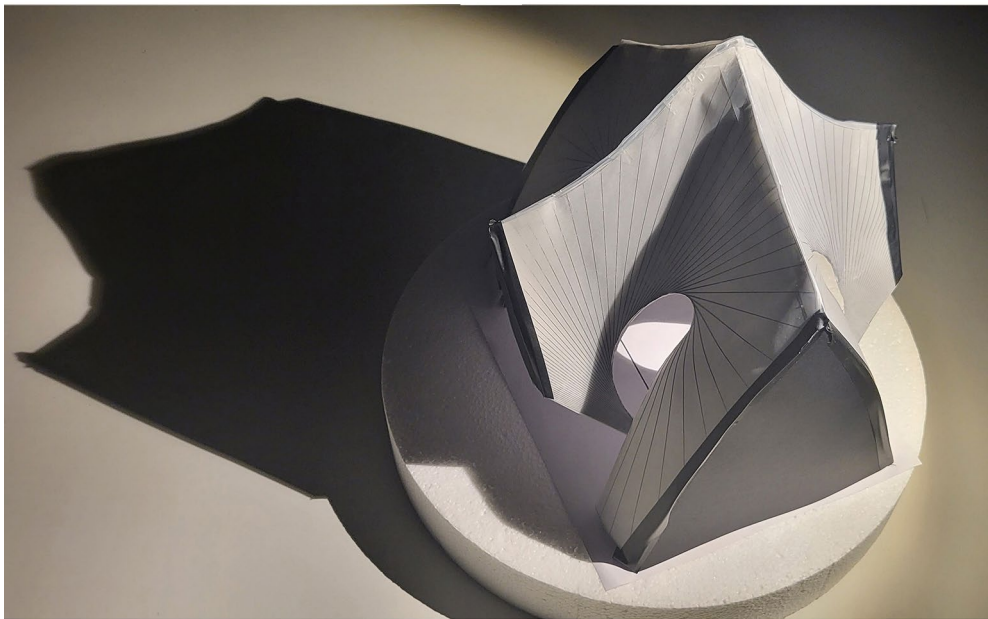
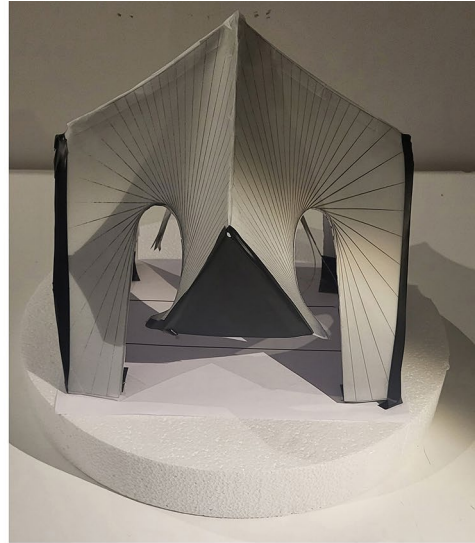
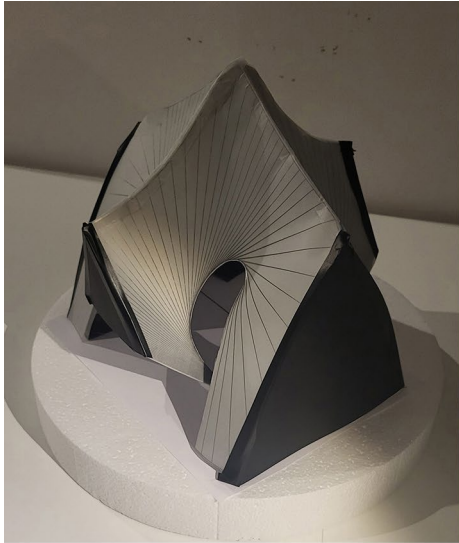
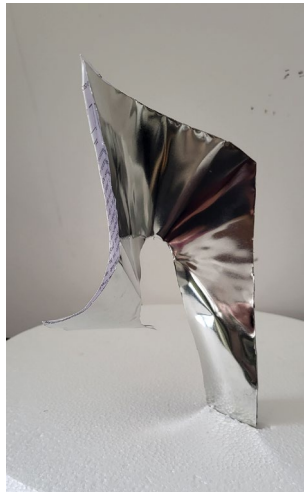


Fig.69/ Tangenziale linea grafica. Immagini del prototipo fisico in cartoncino.

Fig.70/ Tangenziale linea grafica. Pezzo realizzato in alluminio. Il materiale duttile conserva la forma.

di passare dalla configurazione piana alla composizione progettata.

Anche in questo caso, la scelta dei vincoli dipende dal materiale utilizzato: per il prototipo in cartoncino, sono stati definiti quattro elementi rigidi piani che consentono di modellare la configurazione di

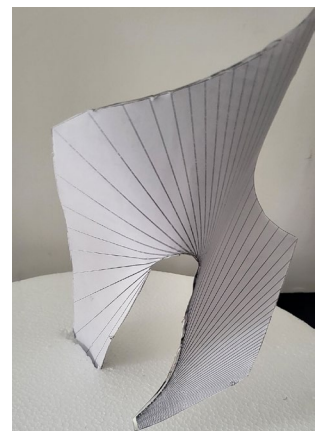
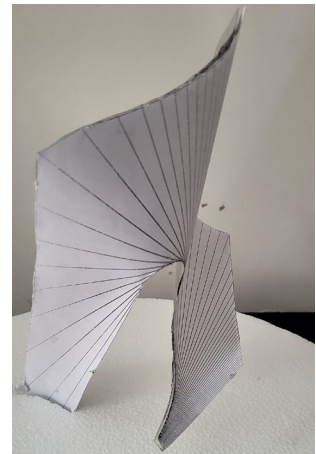


progetto (Fig. 67). Per definire la sviluppata della tangenziale, lo *script* DEVELOPABLE ha giocato un ruolo fondamentale (Fig. 67).

Dopo aver definito una delle sviluppate, le altre tre sono state generate per simmetria. L'assemblaggio del modello avviene prima collegando le quattro porzioni di tangenziale, pezzi 3, lungo i bordi comuni e successivamente, la configurazione si irrigidisce utilizzando i quattro elementi rigidi (pezzi 1 e 2), e infine si collega alla base (Fig 67). Il sistema si blocca in modo definitivo grazie alle connessioni opportunamente progettate su una base orizzontale su cui sono stati predisposti otto punti di connessione, A e B, che consentono di fissare saldamente il prototipo in posizione (Fig. 67).

La disposizione di questi vincoli è stata attentamente studiata per garantire la stabilità e la solidità dell'intero prototipo, in modo che tutte le parti siano saldamente ancorate alla base, evitando movimenti indesiderati e assicurando la corretta forma e funzionalità della struttura.

La composizione del prototipo mette in luce le potenzialità delle tangenziali sviluppabili, per la creazione di oggetti con caratteristiche scultoree ispirate



alle opere di artisti come Pevsner. Tuttavia, oltre alla loro applicazione nell'ambito artistico, la sperimentazione ha evidenziato la possibilità di poter utilizzare queste superfici anche per configurare spazi a scala architettonica, offrendo nuove prospettive e possibilità di progettazione.

La realizzazione di un pezzo del prototipo con un pannello di alluminio spesso 0,2 mm ha consentito di verificare, anche in questo caso, che il pezzo realizzato utilizzando un materiale duttile, una volta messo in forma si mantiene senza introdurre alcun vincolo (Fig. 70).

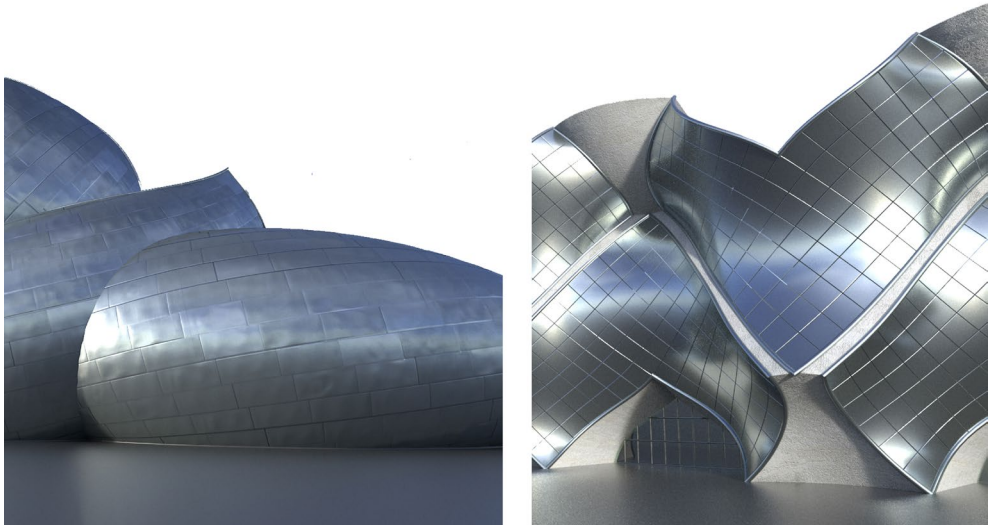
Da un punto di vista metodologico il controllo parametrico di queste superfici e l'utilizzo dello *script* DEVELOPABLE agevola la realizzazione di prototipi fisici utilizzando materiali come carta, cartone, plastica o altri materiali flessibili offrendo la possibilità di manipolare e modellare le superfici tangenziali sviluppabili e supportare il processo progettuale.

Questo approccio consente di ottenere una comprensione tangibile delle caratteristiche e delle limitazioni di queste superfici favorendone l'esplorazione delle potenzialità compositive.

L'obiettivo di queste sperimentazioni è quello di stimolare collaborazioni interdisciplinari per sviluppare approcci innovativi che integrano conoscenze e competenze diverse per individuare soluzioni costruttive originali.

Superfici non sviluppabili

Le superfici a curvatura gaussiana negativa non sono sviluppabili, quindi, in teoria non possono essere costruite a partire da una forma piana che si trasforma rigidamente per assumere la configurazione di progetto, come accade per le superfici sviluppabili. Queste superfici non possono essere create semplicemente flettendo una lamina piana a meno di non introdurre pieghe o tagli.



Le strategie per costruire superfici non sviluppabili utilizzando elementi piani sono molteplici, la maggior parte delle quali è legata al concetto di discretizzazione riconducibile al *paneling* o alla trasformazione della superficie in strisce sviluppabili. In generale, una superficie continua si può sempre trasformare in una superficie discontinua che l'approssima. La superficie può essere, ad esempio, discretizzata in strisce sviluppabili che, collegate tra loro, consentono di costruire la forma approssimata, oppure con la tecnica del *paneling*, può essere divisa in pannelli che possono avere forme diverse per adattarsi alla curvatura della superficie (Fig. 71).

Sia le strisce che i pannelli sono realizzati con materiali indeformabili, i pannelli sono rigidi e le strisce flessibili, ma comunque nell'assemblaggio non si considerano allungamenti, in altri termini il materiale cambia configurazione ma non dimensione (Fig.72).

Tuttavia, ci sono anche altre strategie che consentono di costruire una superficie in modo da conservar-

Fig.71/ Costruzione di superfici a doppia curvatura basate sul principio della discretizzazione: paneling. A sinistra: rivestimento progettato con materiale flessibile e pannelli formati con stampi diversi. A destra; rivestimento progettato con pannelli formati su un unico stampo e piegati sulla superficie (Pellis 2020).

Dal piano alla superficie

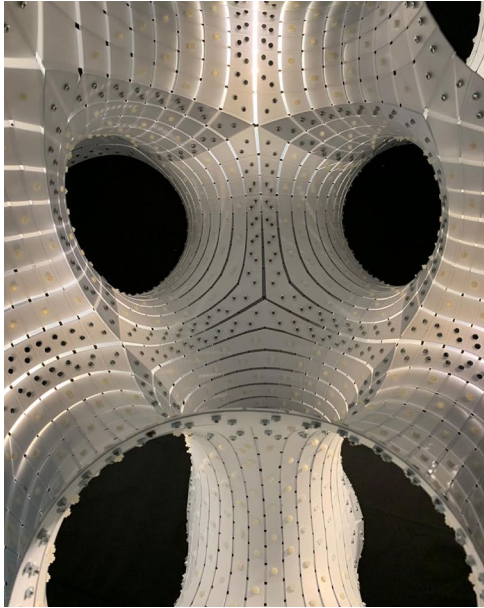


Fig. 72/ Costruzione di superfici a doppia curvatura negativa e positiva utilizzando strisce sviluppabili. A destra prototipo di Clement Duroselle; a sinistra prototipo by laaC, Institute for Advanced Architecture of Catalonia developed at Master in Advanced Architecture in 2019/2020.

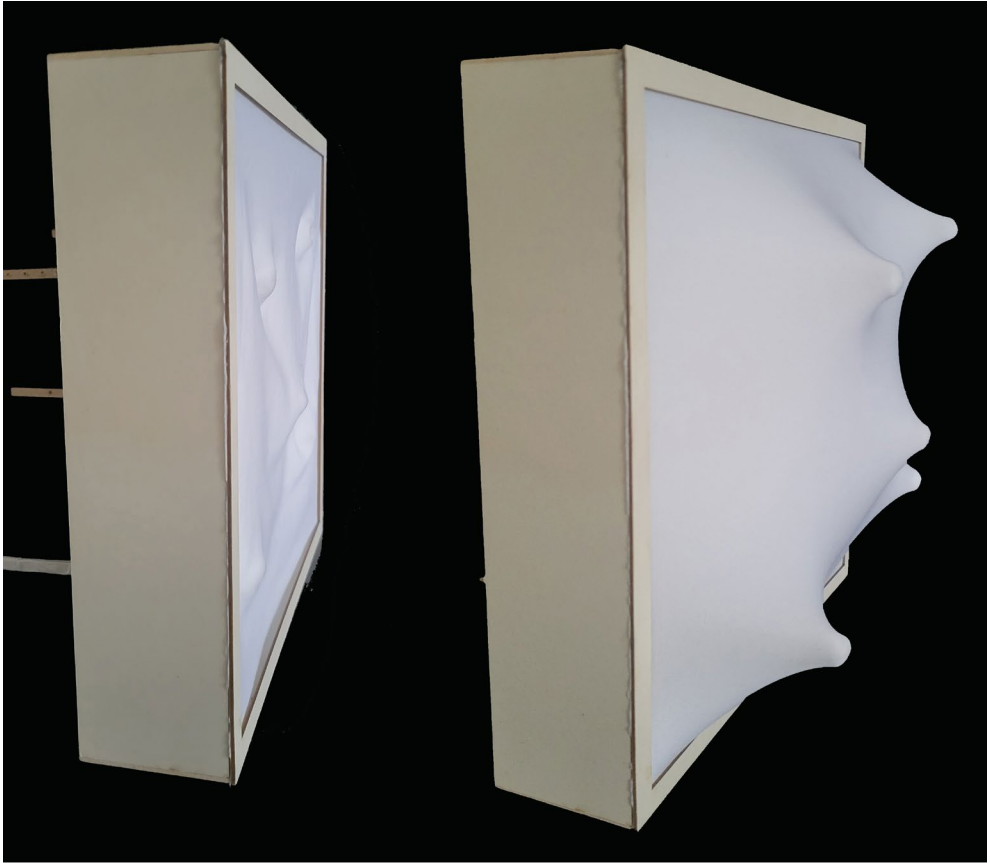
ne la continuità, legate al concetto di deformazione o di conformazione.

Si possono individuare due macrocategorie di sistemi costruttivi che consentono di realizzare una superficie a doppia curvatura senza discretizzarla e che dipendono soprattutto dai materiali e dalle tecniche costruttive.

La superficie si può costruire utilizzando un materiale che “prende forma”, quindi, a seconda della scala, gesso, cemento, materiali plastici termoformati, oppure con un materiale che si “deforma”, membrane e tensostrutture, solo per fare alcuni esempi.

Nel primo caso si tratta di un processo non reversibile, la superficie si può realizzare tramite getto, formatura o stampaggio, utilizzando materiali in grado di “prendere forma”, con stampi temporanei o tecnologie emergenti come la stampa 3D.

Nel secondo caso si tratta, invece, di un processo reversibile dove è sempre possibile passare dalla forma piana alla configurazione di progetto e viceversa. La



superficie si costruisce a partire dalla forma piana con un materiale che non solo può flettersi, ma che è in grado di deformarsi, come ad esempio le membrane di tessuto elastico utilizzato per le tensostrutture (Figg.73 e 77) oppure con un materiale le cui caratteristiche si modificano localmente utilizzando la tecnica del *kerfing* o del *kirigami*.

Questo secondo caso è il principale oggetto delle sperimentazioni presentate in questo testo e in corso di sviluppo soprattutto in relazione alla possibilità di utilizzare questo approccio per definire meccanismi cinetici.

In generale, da un punto di vista geometrico, a seconda della tecnica, si dovrà definire la forma

Fig. 73/ Prototipi di superfici a doppia curvatura realizzati con materiale tessile elastico. La trasformazione della forma piana nella superficie a doppia curvatura avviene grazie all'elasticità del materiale.

Dal piano alla superficie

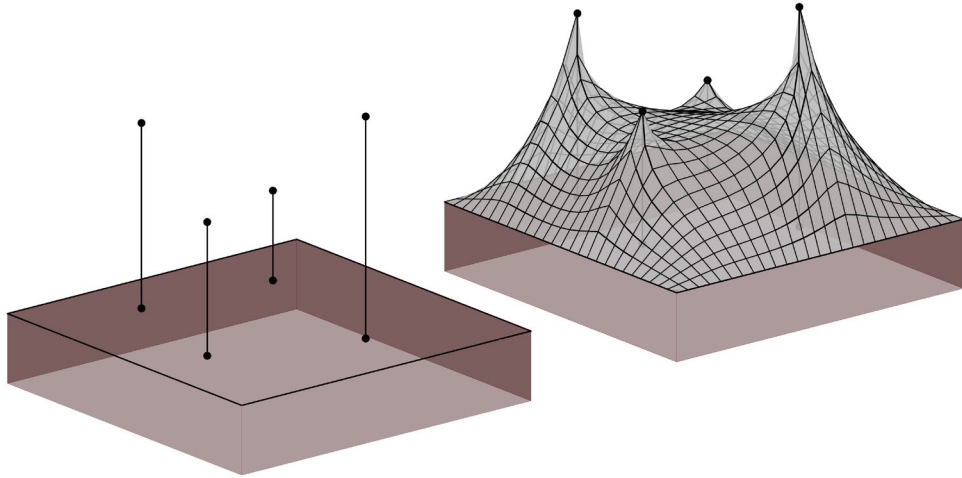
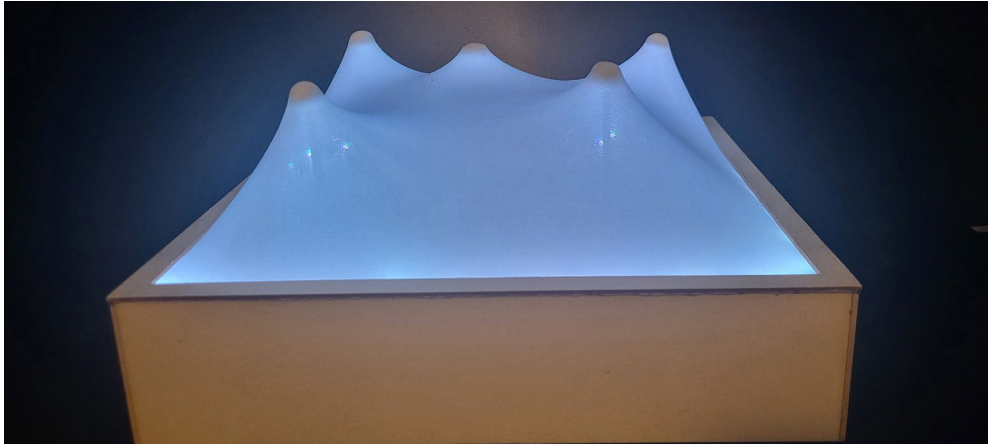


Fig.74/ Prototipi di superfici a doppia curvatura realizzati con materiale tessile elastico.

Fig.75/ *Digital form-finding*.

Fig.76/ Pagina successiva: modello fisico. Prototipo ispirato alla lampada *Falkland* disegnata nel 1964 da Bruno Munari.

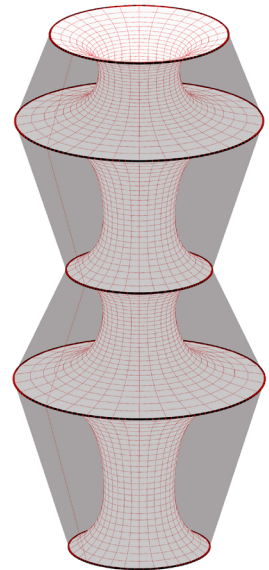
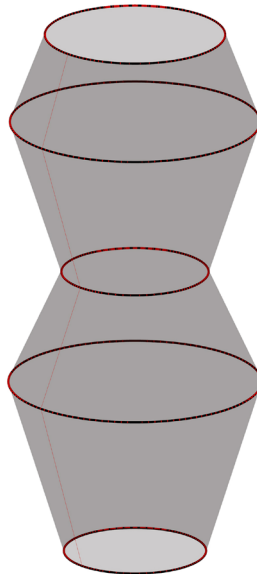
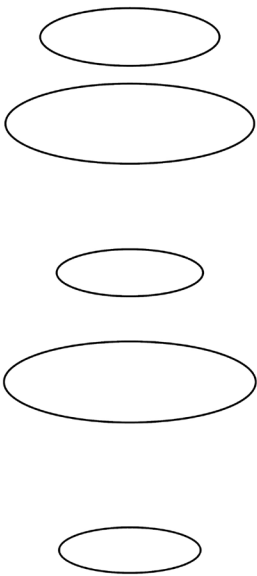
Fig.77/ Pagina successiva: Processo di *digital form-finding*-

25 Cfr. "Spianamento" approssimato, p.106.

26 Capone M. 2012, p. 107.

piana, lo "spianamento" approssimato, da utilizzare per costruire la superficie a doppia curvatura che tenga conto della possibilità di deformare il materiale proprio in funzione della curvatura.

Nel caso delle superfici rigate a curvatura negativa, la sperimentazione ha dimostrato che, per assecondare le caratteristiche geometriche della superficie, la matrice di taglio più adatta è quella lineare a fessura, distribuita utilizzando le generatrici rettilinee della superficie. Pertanto, quello che è stato definito "spianamento" approssimato²⁵, dovrà essere realizzato in modo da non deformare tali generatrici.



Dal piano alla superficie

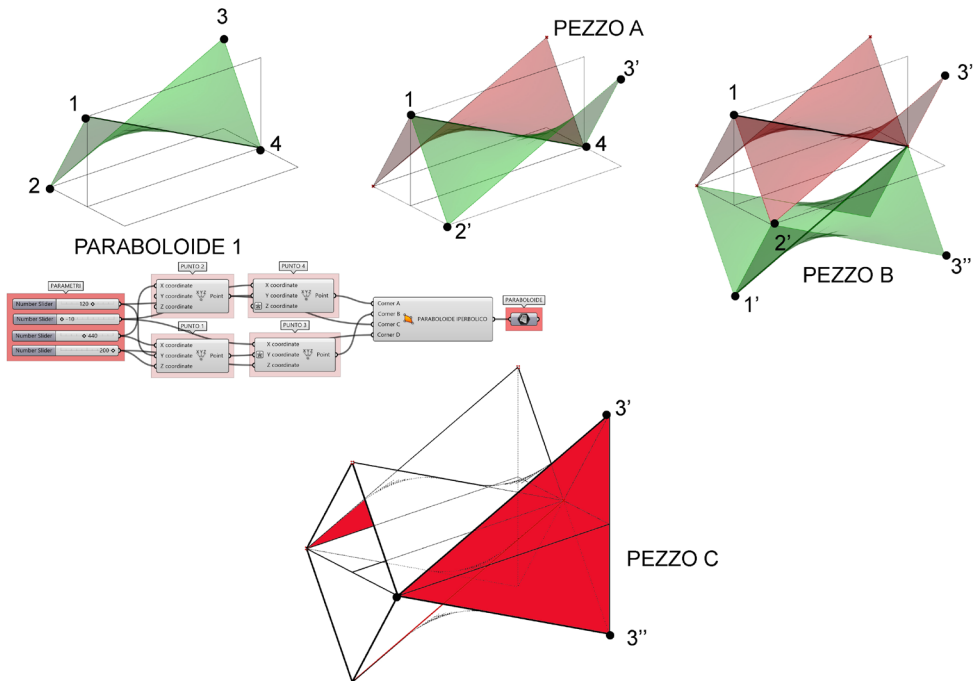


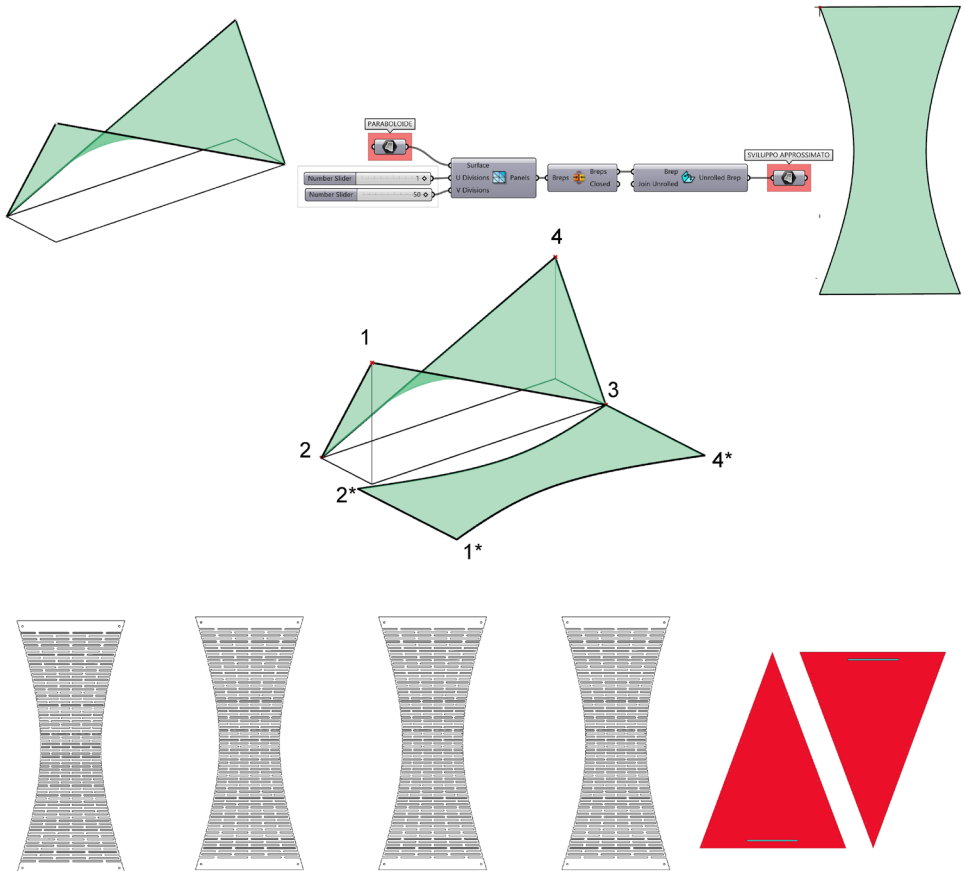
Fig. 78/ Processo per la generazione del prototipo composto da 4 falde di paraboloide e due triangoli.

Rigate non sviluppabili: paraboloide iperbolico

Il prototipo realizzato per esplorare le potenzialità delle rigate non sviluppabili ha interessato il caso di una particolare superficie, molto utilizzata proprio per le sue proprietà geometriche, la cui conoscenza ha sempre contribuito all'individuazione di strategie costruttive: il *paraboloide iperbolico*²⁶.

Il *paraboloide iperbolico* è una rigata a doppia curvatura negativa con due piani direttori, che ha, quindi, due schiere di generatrici rettilinee secondo due giaciture distinte. Obiettivo della sperimentazione è costruire questa superficie utilizzando il suo "spianamento" approssimato con un pannello di multistrato da 3mm che, grazie alla tecnica del *kerfing*, è stato reso flessibile e deformabile.

Il processo definito consente di realizzare un sistema in cui la forma piana può assumere infinite configurazioni tra due posizioni limite: la configurazione piana e quella di progetto.



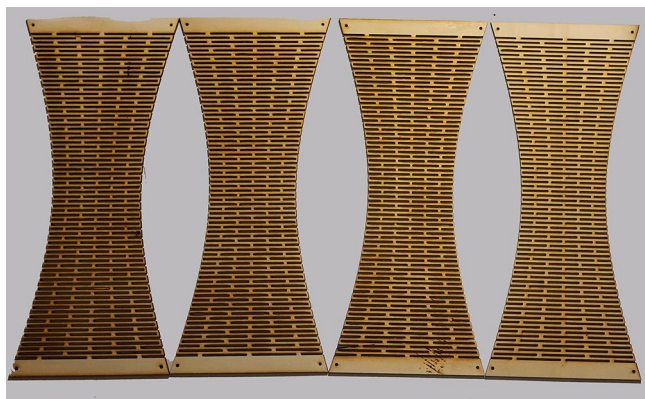
Il prototipo è composto da quattro porzioni di paraboloidi connessi tra loro a due a due e collegati con due elementi rigidi.

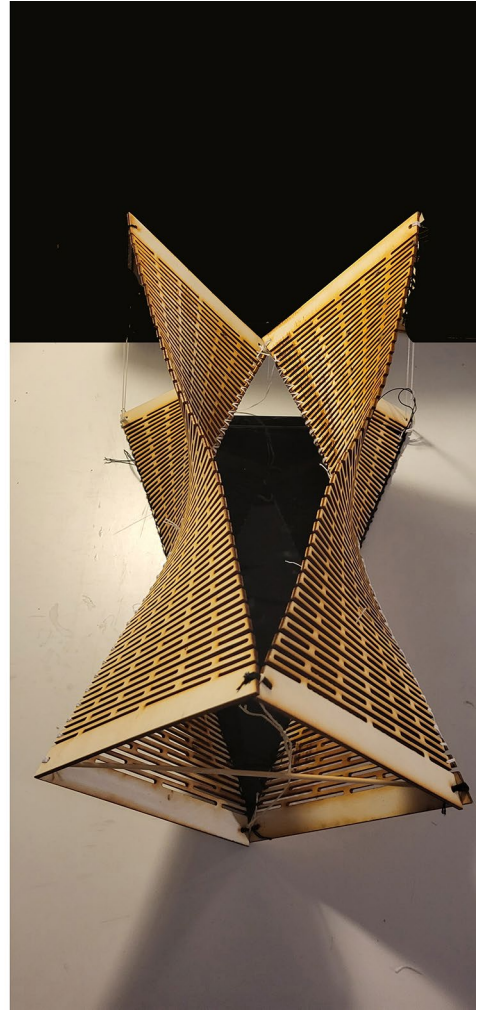
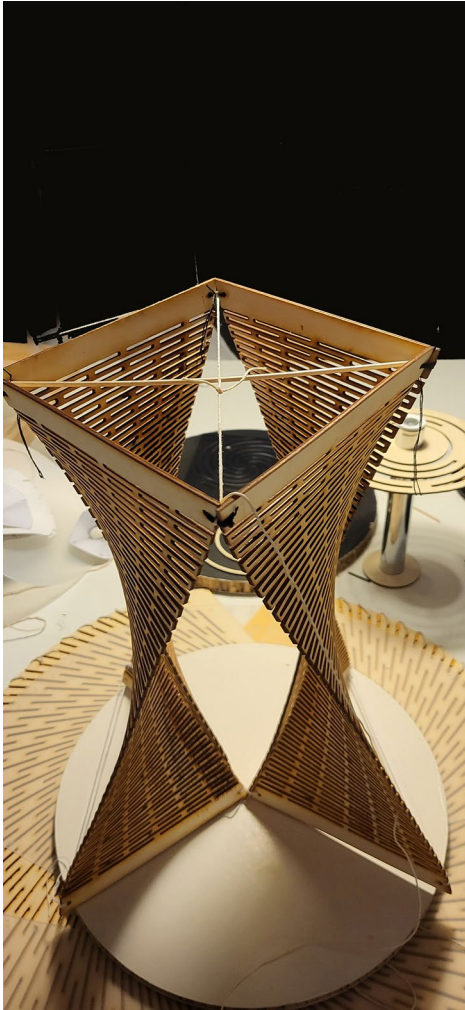
Il processo parte dalla definizione della geometria: la singola porzione di paraboloidi è generata utilizzando un quadrilatero sghembo, la cui configurazione è gestita parametricamente variando la posizione dei vertici del quadrilatero in modo che le due generatrici opposte siano sempre sghembe (Fig.78). Rispetto ai casi precedenti è stato individuato un approccio alternativo per definire i bordi di ogni pezzo che, in questo caso, non si determinano come intersezione con altre superfici, ma piuttosto sfruttando

Fig.79/ Definizione dello sviluppo approssimato di una singola porzione.

Fig.80/ Distribuzione del pattern di taglio sulla superficie piana e definizione degli elementi triangolari rigidi.

Dal piano alla superficie





le caratteristiche geometriche della superficie stessa. L'obiettivo è quello di avere una porzione di *paraboloide* delimitata da quattro bordi rettilinei e, poiché il *paraboloide* è una rigata che ha due schiere di generatrici rettilinee, è sempre possibile generare una porzione di *paraboloide* partendo da un quadrilatero sghembo. In ambiente VPL è stato costruito uno script basato su questa regola geometrica che consente di generare infiniti pezzi di *paraboloide* delimitati da quattro segmenti rettilinei (Fig. 78).

Fig.81/ Assemblaggio: collegamento delle quattro porzioni di paraboloide.

Fig.82/ Assemblaggio: messa in forma dei due pezzi. Cucendo tra loro i due pezzi il bordo curvo della forma piana si trasforma in un segmento rettilineo e la posizione si blocca.

Dal piano alla superficie

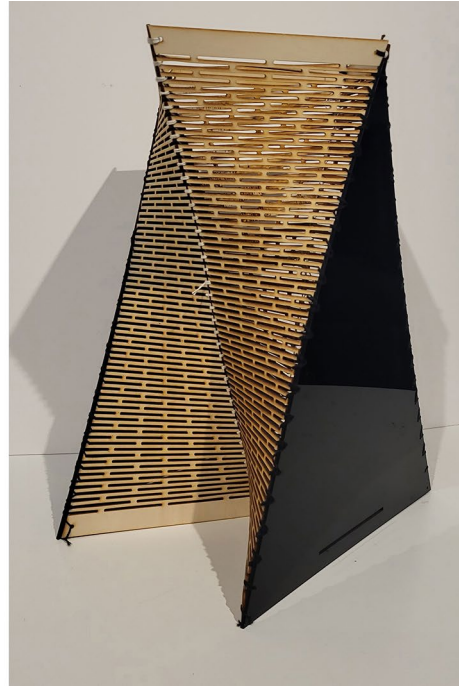


Fig.83/ I due triangoli in plexiglas consentono di costruire un sistema in equilibrio.

Una volta definita la forma della prima porzione di *paraboloide* 1234 è stata costruita per simmetria, rispetto ad uno dei piani direttori della superficie, la seconda porzione, 12'3'4', e, quindi, il pezzo A, composto dalla coppia 1234 e 12'3'4', avente in comune il bordo rettilineo 14 (Fig.78). Procedendo sempre per simmetria è stato generato il pezzo B. I due pezzi, A e B, sono collegati tra loro da due elementi triangolari rigidi, pezzo C, la cui forma dipende dalla geometria del primo paraboloide (Fig.78). Per la costruzione del prototipo si determina lo spianamento approssimato del *paraboloide* 1, con il metodo illustrato in precedenza, scegliendo una delle due giaciture del piano direttore del paraboloide²⁷ (Fig.79). Per passare dallo spianamento approssimato alla superficie e, quindi dalla forma piana alla configurazione spaziale, il bordo 1*3 e il bordo 2*4* si dovranno trasformare nel bordo 13 e 24, quindi, è evidente che tali bordi si dovranno defor-

²⁷ Cfr. "Spianamento" approssimato, p.106.

6. Applicazioni



Fig.84/ I due triangoli in plexiglass consentono di costruire un sistema in equilibrio.

mare poiché la curva 1*3 si deve trasformare nel segmento 13 e la curva 2*4* si deve trasformare nel segmento 24, mentre i bordi 12 e 34 non si deformano (Fig.79).

I quattro pezzi del prototipo sono stati realizzati in multistrato spesso 3 mm, il materiale è stato reso flessibile e deformabile con la tecnica del *kerfing*. Utilizzando la griglia composta dalla schiera di iso-curve rettilinee, con cui è stato definito lo "spianamento" approssimato della superficie, è stato distribuito un pattern lineare²⁸ che ha consentito di

²⁸ Cfr. Distribuzione del pattern lineare, p.127.

costruire un pezzo piano in grado di assumere la configurazione della superficie a doppia curvatura (Fig. 80). Una volta definiti i pezzi piani del prototipo, i quattro sviluppi approssimati del *paraboloide* e i due triangoli, si procede al progetto delle connessioni basate sullo studio dei movimenti e delle forze da applicare per la trasformazione.

Per poter passare dalla forma piana alla configurazione di progetto si deve effettuare la torsione di ciascun pezzo, le connessioni sono state progettate proprio in funzione dei movimenti e delle forze necessarie a mettere in forma il prototipo e per contrastare le sollecitazioni che tendono a riportare la superficie alla configurazione piana. Si procede, dunque, collegando i quattro pezzi piani utilizzando i fori praticati nei bordi rettilinei (Fig. 81). Successivamente, collegando a due a due i lati curvi adiacenti con una cucitura, si applica la forza necessaria a deformare questi lati in modo che assumano la configurazione rettilinea di progetto (Fig. 82). La fase di assemblaggio si conclude montando i due triangoli che consentono di unire i due pezzi, A e B, per ottenere un sistema perfettamente in equilibrio (Fig. 83). Il progetto dell'assemblaggio e dei vincoli è una parte fondamentale del processo basato sullo studio delle potenzialità cinematiche della struttura.

La realizzazione del prototipo è stata un'occasione fondamentale che ha stimolato una serie di sperimentazioni in corso che riguardano proprio la possibilità di utilizzare questa tipologia di superfici per progettare sistemi cinetici.

7 Conclusioni e sviluppi

Obiettivo principale del testo è stato quello di mettere in relazione i principi teorici della geometria con le applicazioni per dimostrare, ancora una volta, come la conoscenza di questi principi sia da sempre il presupposto fondamentale per il controllo del progetto.

Attraverso esempi pratici e sperimentazioni basate sull'utilizzo della modellazione algoritmica generativa, è stato definito un processo metodologico replicabile che, partendo dalla regola geometrica, consenta di generare diverse soluzioni progettuali.

In questo contesto, il rapporto tra il modello fisico e quello digitale riveste un ruolo cruciale che in ambiente VPL consente di simulare in modo sempre più attendibile il comportamento della reale configurazione contribuendo attivamente alla definizione delle soluzioni costruttive.

La costruzione dei prototipi fisici rappresenta, quindi, una fase essenziale del processo fornendo

feedback critici che possono essere utilizzati per perfezionare e modificare gli *script* definiti. Questa attività diventa la base insostituibile per il progetto a qualsiasi scala e rappresenta una fase intermedia di un processo iterativo che dall'analisi critica del prototipo trae le informazioni necessarie per costruire *script* utilizzabili anche in altri contesti e basati sugli stessi principi.

In questa prospettiva la costruzione del modello fisico è, dunque, la prima verifica del progetto che, altrimenti, correrebbe il rischio di esaurirsi nell'ambito digitale, riducendosi ad una mera esercitazione teorica.

"Dal piano alla superficie" ha l'obiettivo di includere i principali casi in cui è possibile costruire un oggetto tridimensionale composto da una o più porzioni di superfici partendo da una forma piana, fornendo una panoramica dei metodi e delle tecniche fondamentali e di alcune possibili applicazioni.

Il tema, che va oltre il semplice caso apparentemente banale delle superfici sviluppabili, ha consentito di affrontare e risolvere alcune specifiche problematiche teoriche, come la determinazione della sviluppata di una tangenziale qualsiasi, stimolando la definizione di metodologie per gestire questioni più complesse legate alle caratteristiche fisiche dei materiali.

Infatti, se da un lato il problema geometrico si risolve nel determinare la forma piana da tagliare e, quindi, nel definire i metodi e gli strumenti che consentono di ottenere questa forma, la realizzazione del prototipo richiede un'analisi dettagliata delle proprietà fisiche dei materiali, con particolare riferimento al concetto di elasticità e flessibilità, e delle loro dinamiche comportamentali.

Uno dei risultati presentati per la risoluzione di uno specifico problema geometrico, altrimenti difficilmente risolvibile, è lo *script* DEVELOPABLE. Indipen-

dentemente dallo strumento, l'obiettivo principale è stato quello di dimostrare come la conoscenza della geometria possa essere applicata per sviluppare algoritmi in grado di risolvere problemi specifici, come la determinazione della sviluppata di una tangenziale qualsiasi.

In generale, questa forma piana, una volta definita, potrà essere costruita tagliando un materiale flessibile e/o deformabile oppure trasformando il materiale, utilizzando tecniche, come quella del *kerfing*, che consentono di modificarne alcune caratteristiche in funzione della configurazione di progetto.

Il filo conduttore diventa chiaro ed evidente quando i principi e gli strumenti, attraverso tecniche specifiche, consentono di definire le diverse applicazioni che rappresentano, allo stesso tempo, un punto di arrivo e di partenza.

Da un lato, queste applicazioni sono soluzioni concrete realizzabili con materiali e vincoli specifici, dall'altro lato, stimolano riflessioni e aprono il campo a nuove sperimentazioni.

Il tema della trasformazione, dal piano allo spazio, costituisce il punto di partenza di una ricerca in corso che si propone di esplorare la geometria del movimento e le sue potenziali applicazioni.

Questa ricerca si concentra sulla creazione di sistemi il cui processo di trasformazione è sempre reversibile. In altri termini, i sistemi progettati seguendo questo approccio metodologico, utilizzando gli *script* sviluppati per risolvere questioni specifiche, consentono di passare da configurazioni piane a forme complesse e tornare alla configurazione iniziale.

Questo principio, che prevede sempre la definizione di due posizioni limite, quella piana e quella tridimensionale, tra cui è possibile definire infinite posizioni intermedie, è alla base di una ricerca in corso che esplora le potenzialità cinetiche e la geometria del movimento legata alle proprietà geometriche

Dal piano alla superficie

delle superfici e all'applicazione delle tecniche di del *kerfing* e del *kirigami* in funzione della curvatura.

Si delineano, così, percorsi di ricerca che esplorano le potenzialità cinetiche e geometriche delle superfici, con l'obiettivo di definire processi sempre più avanzati che possano simulare sempre meglio i reali comportamenti dei sistemi con l'ambizione di ridurre al minimo i passaggi, risparmiando tempo e materiale, in modo da costruire i prodotti direttamente dall'ambiente digitale.

Bibliografia

- Abate Marco, Tovena Francesca. *Curve e superfici*. Springer Verlag. Milano. 2006
- Ahlquist Sean, Fleischmann Moritz. *Cylindrical Mesh Morphologies: Study on Computational Meshes Based on Parameters of Force, Material, and Space for the Design of Tension-Active Structures*. In *Computation: The New Realm of Architectural Design, 27th eCAADe Conference Proceedings*. 2009
- Aryabhat Darnal et al. An exploration of 3D printed freeform kerf structures. In Proc. SPIE, Behavior and Mechanics of Multifunctional Materials XVII. California, USA. 2023
- Baglioni Leonardo. Il contributo della rappresentazione matematica nello studio di lossodromie, eliche e spirali. In Migliari Riccardo (a cura di). *Geometria descrittiva. Tecniche ed Applicazioni, Vol 2*. Città Studi edizioni. Novara. 2009
- Baglioni Leonardo, Di Marzio Lucrezia. Il controllo della forma nelle superfici libere dell'architettura contemporanea. In Cannella Mirco, Garozzo Alessia, Morena Sara (a cura di). *Transizioni*. FrancoAngeli. Milano. 2023
- Caetano Ines, Santos Luis, Leitao Antonio. A Computational design in architecture: defining parametric, generative, and algorithmic design. In *Frontiers of Architectural Research, Vol 9, N 2*. 2020
- Callens Sebastien, Zadpoor Amir. From flat sheets to curved geometries: Origami and kirigami approaches. In *Materials Today, Vol 21, N 3*. 2018
- Calvano Michele. *Disegno digitale esplicito. Rappresentazioni responsive dell'architettura e della città. Aracne*. Roma. 2019.
- Calvano Michele, Casale Andrea, Valenti Graziano Mario. *The shape of the folded surfaces. Drawing control and analysis*. FrancoAngeli. Milano. 2020

Dal piano alla superficie

- Capone Mara. La genesi dinamica della forma. Applicazioni di geometria descrittiva nell'era informatica. Fridericiana Editrice Universitaria. Napoli. 2010
- Capone Mara. Geometrie per l'Architettura. Giannini Editore. 2012
- Capone Mara. Teorie e metodi per lo sviluppo delle rigate e lo spianamento approssimato delle rigate non sviluppabili. In *Diségno*, Vol 1, N 3. 2018
- Capone Mara, Lanzara Emanuela. Kerf bending: ruled double curved surfaces manufacturing. In *Blucher Design Proceedings*. São Paulo. 2018
- Capone Mara, Lanzara Emanuela. Kerf-Bending Tests: Design for Manufacturing Doubly Ruled Surfaces. In Marcos Carlos (a cura di). *Graphic Imprints*. Springer. 2019
- Capone Mara, Lanzara Emanuela. Parametric Kerf Bending Manufacturing a double curvature surfaces for wooden furniture design. In *Digital wood design*. Innovative technique of representation in architectural design. Springer. 2019
- Capone Mara, Emanuela Lanzara. Tangential surfaces to optimize digital manufacturing of complex shapes. In *Blucher Design Proceedings*, Vol 8. São Paulo. 2020
- Capone Mara, Nome Carlos Aleandro, Cicala Angela, de Queiroz Nome Natalia. From Unrolled Geometry to Complex Shapes in Equilibrium. In *Nexus Network Journal*, Vol 25. 2023
- Carlo Séquin. Volution's Evolution. In *ACM SIGGRAPH 2004 Electronic Art and Animation Catalog*. New York, NY, USA. 2004
- Casale Andrea. Geometria creativa. Intuizione e ragione nel disegno dell'oggetto. Edizioni Kappa. Roma. 2010
- Casale Andrea, Calvano Michele. Castelli di carta. La piega per la costruzione di superfici articolate. In *DisegnareCon*. Vol. 9. 2012
- Casale Andrea, Rossi Michela. Uno (nessuno) centomila prototipi in movimento. Maggioli Editore. Santarcangelo di Romagna. 2014
- Casale Andrea, Valenti Graziano Mario. Architettura delle superfici piegate. Le geometrie che muovono gli origami. Edizioni Kappa. Roma. 2013
- Chen Shanshan et al. Kirigami/origami: unfolding the new regime of advanced 3D microfabrication/nanofabrication with "folding". In *Light Sci Appl* 9, N 75. 2020
- Choi Gary, Dudte Levi, Mahadevan Lakshminarayanan. Programming shape using kirigami tessellations. In *Nature Materials*, Vol 18, N 9. 2019
- Choi Gary, Dudte Levi, Mahadevan Lakshminarayanan, Compact reconfigurable kirigami. In *Physical Review Research*, vol 3. 2021
- Ciarloni Roberto. Teorie e tecniche della rappresentazione matematica. In *Migliari Riccardo* (a cura di). *Geometria Descrittiva. Tecniche ed Applicazioni*, Vol 2. Città Studi edizioni. Novara. 2009
- Condoroteanu Cristina-Daria, Lidia Gurau, Camelia Cosoreanu, Sergiu-Valeriu Georgescu. A Proposed Method to Evaluate the Effect of Changing the Kerfing Parameters upon the Static Bending Behavior of Flexible Plywood Panels Cut by Laser. In *Applied Sciences*, Vol 12, N 9. 2022
- Danesh Zand Foroozan, Baghi Ali, Kalantari Saleh. Digitally Fabricating Expandable Steel Structures Using Kirigami Patterns. In *Blucher Design Proceedings*. 2018
- De Carlo Laura. Le linee curve. In *Migliari Riccardo* (a cura di). *Geometria descrittiva. Tecniche ed Applicazioni*, Vol 2. Città Studi edizioni. Novara. 2009
- Euler Leonard. De solidis quorum superficiem in planum explicare licet. In *Novi commentarii academiae scientiarum imperiatis Petropolitanae* XVI. 1772

- Fallavollita Federico. Le superfici rigate e le superfici sviluppabili. Una rilettura attraverso il laboratorio virtuale. Tesi di dottorato di ricerca in Scienze della Rappresentazione e del Rilievo. Tutor L. De Carlo, R. Migliari. Sapienza Università di Roma, Dipartimento di Rilievo, Analisi, Disegno dell'Ambiente e dell'Architettura. 2008
- Fallavollita Federico. Le superfici rigate. In Migliari Riccardo (a cura di). Geometria descrittiva. Tecniche ed Applicazioni, Vol 2. Città Studi edizioni. Novara. 2009
- Farinella Cristian, Baglioni Leonardo. Modello come immagine mentale. La diffusione dei modelli matematici nell'arte d'avanguardia e la superficie sviluppabile di Antoine Pevsner. In AA. VV. Territori e frontiere della rappresentazione. Gangemi Editore. Roma. 2018
- Foroozan Danesh Zand, Ali Baghi, Saleh Kalantari. Digitally Fabricating Expandable Steel Structures Using Kirigami Patterns. In Blucher Design Proceedings, Vol 5. São Paulo. 2018
- Gauss Johann Friedrich Carl. General Investigations of Curved Surfaces of 1827 and 1825. The Princeton University Library. Princeton. 1902
- Grieves Michael, Vickers John. Origins of the Digital Twin Concept. In: Transdisciplinary perspectives on complex systems: New findings and approaches. Springer International Publishing. 2017
- Güzelci Orkan Zeynel. Enhancing flexibility of 2D planar materials by applying cut patterns for hands on study models. In Blucher Design Proceedings, Vol 3, N 1. 2016
- Hachette Jean Nicolas Pierre. *Traité de Géométrie Descriptive*. Corby. Paris. 1828
- Hayward Charles Harold. *The Woodworker: Charles H. Hayward Years: 1939-1967, Vol I - II*. The Lost Art Press. New York. 2016
- Humpi Harri, Österlund Toni. Algorithm-Aided BIM. In Proceedings of the 34th eCAADe Conference, Vol 2. University of Oulu, Oulu, Finland. 2016
- Lanzara Emanuela. *Shaping&Paneling. Superfici complesse per l'architettura e il design*. FrancoAngeli. Milano. 2019
- Lawrence Snezana. Developable Surfaces: Their History and Application. In Nexus Network Journal, 13. 2011
- Leibniz Gottfried Wilhelm. *Meditatio nova de natura anguli contactus et osculi: horumque usu in practica mathesi, ad figuras faciliores succedaneas difficilioribus substituendas*. Apud J. Grossium & J.F. Gletitschium, Vol 7. 1686.
- Leroy Charles Francois Antoine. *Traité de Géométrie Descriptive*. Gauthier Villars. Paris. 1837
- Leroy Charles Francois Antoine. *Trattato di Geometria Descrittiva con una collezione di disegni composta da 60 tavole*. Traduzione con note di Salvatore d'Ayala e Paolo Tucci. Reale Tipografia della Guerra. Napoli. 1846
- Liu Di et al. Tunable Acoustic Properties in Reconfigurable Kerf Structures. In Journal of Architectural Engineering, Vol 29, N 3. 2023
- Liu Yang, Pottmann Helmut, Wallner Johannes, Yang Yong-Liang, Wang Wenping. Geometric Modeling with Conical Meshes and Developable Surfaces. In ACM Transactions on Graphics, Vol 25, N 3. 2006
- Lorenzoni Barbara, da Silva Pinto Fabio. Geometric analysis of the MDF kerf-bending structure accuracy. In International Journal of Space Structures, Vol 37, N 2. 2022
- Loyla Mauricio, Rozas Sebastian, Caldera Sebastian. Kerfing²: Una técnica para el diseño, fabricación y optimización de elementos de doble curvatura a partir de placas rígidas de madera. In Blucher Design Proceedings, Vol 3, N 12. 2017

Dal piano alla superficie

- Mamou-Mani Architects. The wooden waves – burohappold engineering. 2015 <https://mamou-mani.com/project/wooden-waves/>
- Martín-Pastor Andrés, López-Martínez Alicia. Developable Ruled Surfaces from a Cylindrical Helix and Their Applications as Architectural Surfaces. In Vera Viana, Vítor Murtinho, João Pedro Xavier (edited by). Thinking, Drawing, Modelling. Proceedings in Mathematics & Statistics. Springer. 2020
- Menges Achim. Integrative Design Computation integrating material behaviour and robotic manufacturing processes in computational design for performative wood constructions. In Proceedings of the 31st Annual Conference of the Association for Computer Aided Design in Architecture, (ACADIA). Canada. 2011
- Menges Achim. Material Computation: Higher Integration in Morphogenetic Design. John Wiley and Sons Ltd. London. 2012
- Menges Achim. Wood Architecture: A Computational Approach. Taylor & Francis Ltd. Oxford. 2016
- Michele Emmer. Architecture and Mathematics: Soap Bubbles and Soap Films. In Kim Williams (edited by). Nexus Architecture and Mathematics. Edizioni dell'Erba. Firenze. 1996
- Migliari Riccardo. Disegno come Modello. Edizioni Kappa. Roma. 2004
- Migliari Riccardo. Geometria descrittiva. Città Studi edizioni. Novara. 2009
- Monge Gaspard. Mémoire sur les propriétés de plusieurs genres de surfaces courbes et particulièrement sur celles des surfaces développables avec une application à la théorie générale des ombres et des pénombres. Mém. div. Sav. Paris. 1780
- Monge Gaspard. Géométrie Descriptive. Baudouin. Paris. 1798
- Monge Gaspard. Feuilles d'analyse appliquée à la géométrie, appliquée à la géométrie à l'usage de l'Ecole Polytechnique. Baudouin. Paris. 1801
- Muñoz Patricia, Coronel Juan Lopez, Raffo Magnasco Ignacio, Sequeira Analia. La flexibilidad en la generación de formas. Ediciones de la forma. Buenos Aires. 2012
- Muñoz Patricia. Líneas espaciales. La exploración. Ediciones de la Forma. Buenos Aires. 2016
- Muñoz Patricia. La apropiación crítica de la digitalidad. In AREA, Vol 29, N 1. 2023
- Nelson Todd, Zimmerman Trent, Magleby Spencer, Lang Robert, Howell Larry. Developable mechanisms on developable surfaces. In Science Robotics, Vol 4, N 27. 2019
- Otto Frei, Rash Bodo. Finding Form: toward an architecture of the minimal. Axel Menges. Stuttgart. 1995
- Oxman Rivka. Thinking difference: Theories and models of parametric design thinking. In Design Studies, Vol 52. 2017
- Paris Leonardo, De Carlo Laura. Le linee curve per l'architettura e il design. FrancoAngeli. Milano. 2019
- Plateau Joseph. Statique expérimentale et théorique des liquides soumis aux seules forces moléculaires. Gauthier-Villars. Paris. 1873
- Porterfield Aaron. Curved Laser Bent Wood. 2014 <https://www.instructables.com/Curved-laser-bent-wood/>
- Porterfield Aaron. Curved Kerf Bending. 2016 <https://www.instructables.com/Curved-Kerf-Bending-Part-2/>
- Pottmann Helmut. <https://www.geometrie.tuwien.ac.at/pottmann/> (accesso dicembre 2023)
- Pottmann Helmut, Asperl Andreas, Hofer Michael, Kilian Axel. Architectural Geometry. Bentley Institute Press. Exton. 2007

- Pottmann Helmut, Eigensatz Michael, Vaxman Amir, Wallner Johannes. Architectural Geometry. In *Computers and Graphics*, vol. 47. 2015
- Pottmann Helmut, Schiftner Alexander, Bo Pengb, Heinz Schmiedhofer, Wenping Wang, Niccolo Baldassini, Johannes Wallner. Freeform surfaces from single curved panels. In *ACM Trans. Graph.*, Vol 27, N 3. 2008.
- Pottmann Helmut. Wallner Johannes. Freeform architecture and discrete differential geometry. In *Discrete Geometry for Computer Imagery*. Springer. 2017
- Quintial Francisco Gonzalez, Barrallo Javier, Artiz Elkarte Ana. Freeform surfaces adaptation using developable strips and planar quadrilateral facets. In *Journal of Facade Design and Engineering*, 3. 2015
- Salvatore Marta. Geometria delle linee curve per la genesi della forma. In Paris Leonardo, De Carlo Laura (a cura di). *Le linee curve per l'architettura e il design*. FrancoAngeli. Milano. 2019
- Schwarz Hermann Amandus. *Gesammelte mathematische abhandlungen*. Springer. Berlin. 1890
- Sereni Carlo. *Trattato di Geometria Descrittiva*. Stamperia di Filippo e Nicola De Romanis. Roma. 1826
- Sun Yue, Ye Wangjie, Chen Yao, Fan Weiyong, Feng Jian, Sareh Pooya. Geometric design classification of kirigami-inspired metastructures and metamaterials. In *Structures*, Vol 33. 2021
- Tang Chengcheng, Bo Pengbo, Wallner Johannes, Pottmann Helmut. Interactive design of developable surfaces. In *ACM Transactions on Graphics*, Vol 35, N 2. 2016
- Tapp Kristopher. *The Curvature of a Surface*. In *Differential Geometry of Curves and Surfaces*. Undergraduate Texts in Mathematics. Springer. Cham. 2016
- Terzidis Kostas. *Expressive Form: A Conceptual Approach to Computational Design*. Routledge. London. 2004
- Valenti Graziano Mario. *Di segno e Modello. Esplorazioni sulla forma libera fra disegno analogico e digitale*. FrancoAngeli. Milano. 2022
- Verhoeven Floor, Vaxman Amir, Hoffmann Tim, Sorkine-Hornung Olga. Dev2PQ: Planar Quadrilateral Strip Remeshing of Developable Surfaces. In *ACM Transactions on Graphics*. 2022
- Wang Stephanie, Chern Albert. Computing minimal surfaces with differential forms. In *ACM Transactions on Graphics*, Vol 40, N 113. 2021.
- Weber Matthias, Wolf Michael. About the cover: early images of minimal surfaces. In *Bulletin of the American Mathematical Society*, Vol 8, N 3. 2011

Dal piano alla superficie è un testo che esplora il tema della costruzione di forme complesse a partire da superfici piane, un argomento con radici storiche e centrato sulla geometria applicata. Due sono gli approcci principali per affrontare questo tema: la divisione delle superfici in pannelli (*paneling*) e la creazione di superfici tridimensionali a partire da configurazioni piane. Il testo approfondisce questo secondo approccio dinamico, basato su modelli computazionali generativi. L'obiettivo è sviluppare metodi per simulare il movimento delle superfici e creare configurazioni tridimensionali da forme piane utilizzando strumenti di modellazione algoritmica. La costruzione di modelli fisici con materiali flessibili e non deformabili, come la carta, rappresenta il primo argomento fondamentale del testo. Si approfondisce il tema della generazione e del controllo delle superfici sviluppabili ed in particolare delle superfici tangenziali illustrando il processo per la definizione degli *script* realizzati per risolvere alcuni specifici problemi. Inoltre, si estende l'analisi alla costruzione di superfici a doppia curvatura, utilizzando tecniche come il *kerfing* che consentono di modificare alcune proprietà dei materiali. Le applicazioni dimostrano il profondo legame tra teoria e pratica reso esplicito grazie all'utilizzo della modellazione computazionale che consente di simulare alcuni comportamenti fisici per cercare soluzioni progettuali ottimizzate. La sperimentazione con i prototipi, basata su approcci geometrici e matematici, mostra come la geometria possa influenzare i processi costruttivi e aprire nuovi percorsi di ricerca, integrando la conoscenza teorica secondo il principio del *learning by doing*.

Mara Capone, docente di Disegno presso il Dipartimento di Architettura dell'Università degli Studi di Napoli Federico II, insegna nei corsi di studio in Architettura e Design. Le sue ricerche si concentrano sulla geometria applicata, sulla modellazione algoritmica generativa e sull'utilizzo dei modelli digitali per la valorizzazione e la gestione del patrimonio culturale.