

LE PROVE INVALSI DI MATEMATICA

VII Seminario "I dati INVALSI: uno strumento
per la ricerca e la didattica"

a cura di
Patrizia Falzetti

FrancoAngeli



INVALSI PER LA RICERCA
STUDI E RICERCHE



INVALSI PER LA RICERCA

La collana Open Access INVALSI PER LA RICERCA si pone come obiettivo la diffusione degli esiti delle attività di ricerca promosse dall'Istituto, favorendo lo scambio di esperienze e conoscenze con il mondo accademico e scolastico.

La collana è articolata in tre sezioni: "Studi e ricerche", i cui contributi sono sottoposti a revisione in doppio cieco, "Percorsi e strumenti", di taglio più divulgativo o di approfondimento, sottoposta a singolo referaggio, e "Rapporti di ricerca e sperimentazioni", le cui pubblicazioni riguardano le attività di ricerca e sperimentazione dell'Istituto e non sono sottoposte a revisione.

Direzione: Roberto Ricci

Comitato scientifico:

- Tommaso Agasisti (Politecnico di Milano);
- Gabriella Agrusti (Università LUMSA, sede di Roma);
- Cinzia Angelini (Università Roma Tre);
- Giorgio Asquini (Sapienza Università di Roma);
- Carlo Barone (Istituto di Studi politici di Parigi);
- Maria Giuseppina Bartolini (Università di Modena e Reggio Emilia);
- Giorgio Bolondi (Libera Università di Bolzano);
- Francesca Borgonovi (OCSE•PISA, Parigi);
- Roberta Cardarello (Università di Modena e Reggio Emilia);
- Lerida Cisotto (Università di Padova);
- Alessandra Decataldo (Università degli Studi Milano Bicocca);
- Patrizia Falzetti (INVALSI);
- Michela Freddano (INVALSI);
- Martina Irsara (Libera Università di Bolzano);
- Paolo Landri (CNR);
- Bruno Losito (Università Roma Tre);
- Annamaria Lusardi (George Washington University School of Business, USA);
- Alessia Mattei (INVALSI);
- Stefania Mignani (Università di Bologna);
- Marcella Milana (Università di Verona);
- Paola Monari (Università di Bologna);
- Maria Gabriella Ottaviani (Sapienza Università di Roma);
- Laura Palmerio (INVALSI);
- Mauro Palumbo (Università di Genova);
- Emmanuele Pavolini (Università di Macerata);
- Donatella Poliandri (INVALSI);
- Arduino Salatin (Istituto Universitario Salesiano di Venezia);
- Jaap Scheerens (Università di Twente, Paesi Bassi);
- Paolo Sestito (Banca d'Italia);
- Nicoletta Stame (Sapienza Università di Roma);
- Gabriele Tomei (Università di Pisa);
- Roberto Trincherò (Università di Torino);
- Matteo Viale (Università di Bologna);
- Assunta Viteritti (Sapienza Università di Roma);
- Alberto Zuliani (Sapienza Università di Roma).

Comitato editoriale:

Andrea Biggera; Nicola Giampietro; Simona Incerto; Francesca Leggi; Rita Marzoli (coordinatrice); Daniela Torti.



Il presente volume è pubblicato in open access, ossia il file dell'intero lavoro è liberamente scaricabile dalla piattaforma **FrancoAngeli Open Access** (<http://bit.ly/francoangeli-oa>).

FrancoAngeli Open Access è la piattaforma per pubblicare articoli e monografie, rispettando gli standard etici e qualitativi e la messa a disposizione dei contenuti ad accesso aperto. Oltre a garantire il deposito nei maggiori archivi e repository internazionali OA, la sua integrazione con tutto il ricco catalogo di riviste e collane FrancoAngeli massimizza la visibilità, favorisce facilità di ricerca per l'utente e possibilità di impatto per l'autore.

Per saperne di più: [Pubblica con noi](#)

I lettori che desiderano informarsi sui libri e le riviste da noi pubblicati possono consultare il nostro sito Internet: www.francoangeli.it e iscriversi nella home page al servizio "[Informatemi](#)" per ricevere via e-mail le segnalazioni delle novità.

LE PROVE INVALSI DI MATEMATICA

VII Seminario "I dati INVALSI: uno strumento
per la ricerca e la didattica"

a cura di
Patrizia Falzetti



FrancoAngeli 

Le opinioni espresse in questi lavori sono riconducibili esclusivamente agli autori e non impegnano in alcun modo l'Istituto. Nel citare i contributi contenuti nel volume non è, pertanto, corretto attribuirne le argomentazioni all'INVALSI o ai suoi vertici.

La cura redazionale ed editoriale del volume è stata realizzata da Francesca Leggi.

Copyright © 2024 by FrancoAngeli s.r.l., Milano, Italy & INVALSI – Istituto Nazionale per la Valutazione del Sistema educativo di Istruzione e di formazione.

L'opera, comprese tutte le sue parti, è tutelata dalla legge sul diritto d'autore ed è pubblicata in versione digitale con licenza Creative Commons Attribuzione-Non Commerciale-Non opere derivate 4.0 Internazionale (CC-BY-NC-ND 4.0)

L'Utente nel momento in cui effettua il download dell'opera accetta tutte le condizioni della licenza d'uso dell'opera previste e comunicate sul sito
<https://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/deed.it>

Indice

Introduzione di <i>Patrizia Falzetti</i>	pag. 7
1. Maestra, ma qui cosa vuol dire? Considerazioni linguistiche sui quesiti INVALSI di Matematica per la scuola primaria di <i>Chiara Saletti, Ivan Graziani</i>	» 9
2. La lingua delle prove INVALSI di Matematica di grado 8 di <i>Ottavio G. Rizzo</i>	» 37
3. Focus sui concetti di variabile, parametro e incognita di alcuni quesiti INVALSI di <i>Giada Viola</i>	» 46
4. Gli errori in Matematica: un confronto tra i cicli TIMSS 2015 e TIMSS 2019 nella scuola secondaria di I grado di <i>Francesco Annunziata</i>	» 57
5. I pensieri degli insegnanti sull'origine degli errori nei test INVALSI di quinta primaria di Matematica di <i>Annarita Monaco, Barbara Balconi, Ottavio G. Rizzo</i>	» 79
Gli autori	» 97

Introduzione

di Patrizia Falzetti

L'INVALSI si è trovato spesso a dover rispondere a domande sulle sue prove. Come nascono? Cosa misurano? Le prove nascono dal lavoro di oltre duecento autori, selezionati tra insegnanti e dirigenti scolastici che vengono aiutati, per la parte metodologica, da esperti nazionali e internazionali. Le domande dopo aver superato una prima selezione vanno a comporre un fascicolo provvisorio che viene pre-testato su un campione di alcune migliaia di ragazzi dell'ordine e del grado a cui sono rivolte. Tutto questo per verificarne precisione, equità, capacità di misurazione e identificare eventuali problemi. Segue una seconda fase di lavoro in cui le domande vengono modificate e testate nuovamente su un altro campione di ragazzi per essere certi che ogni problema sia stato risolto. Il prodotto finale è quindi uno strumento preciso e affidabile che permette a chi studia i risultati conseguiti nelle Rilevazioni nazionali di individuare i campi di intervento nei processi di apprendimento. Nel volume qui descritto sono riportati cinque lavori sulle prove di Matematica, delle Rilevazioni nazionali e internazionali, presentati durante le giornate del VII Seminario "I dati INVALSI: uno strumento per la ricerca e la didattica" (Roma, 27-30 ottobre 2022). Queste vengono analizzate in due modi: tramite il linguaggio utilizzato (capitoli 1 e 2) e con l'analisi degli errori commessi dagli studenti durante il loro svolgimento (capitoli 3, 4 e 5). Quanto pesa la comprensione del testo nell'esito delle prove di Matematica? È questa la domanda che pongono e a cui cercano di dare risposta gli autori del primo capitolo. Lo scopo di questa ricerca è verificare quanto il testo di un quesito, rivolto alla scuola primaria, possa essere un ostacolo concreto alla sua risoluzione. Le prove INVALSI di Matematica possono quindi definirsi anche un problema verbale nel caso in cui la lingua utilizzata non fosse chiara allo studente perché non calibrata sul suo livello scolare. Nel secondo capitolo, in questa prospettiva, viene analizzata una parte delle prove di Matematica somministrate al termine della scuola secondaria di primo grado.

L'autore riporta il risultato dell'indagine: le prove sono state progettate in modo da evitare l'uso di termini potenzialmente problematici per gli alunni e non è presente alcun effetto della lingua nella difficoltà della prova. Nei capitoli successivi cambia il punto di vista dell'analisi, non più concentrata sul linguaggio, ma sull'errore. Nel terzo, l'autrice studia la gestione dei concetti di parametro, variabile e incognita in due quesiti INVALSI di grado 10, scelti tra quelli in cui è stata registrata un'alta percentuale di risposte errate o mancanti. Nel quarto, viene condotta un'analisi di tipo qualitativo sui risultati conseguiti dagli studenti italiani dell'ottavo grado che hanno partecipato alla prova cognitiva di Matematica dell'indagine internazionale TIMSS (*Trends in International Mathematics and Science Study*) nel 2015 e nel 2019. In entrambe le edizioni vi sono stati risultati peggiori in Algebra rispetto a quelli conseguiti in Geometria, dove il rendimento rilevato è sopra la media della scala complessiva di Matematica. Lo studio ha cercato di approfondire le tipologie di errore ricorrenti e questo approccio ha permesso di ottenere informazioni utili sul processo messo in atto dagli studenti al momento della prova. Si sono così ottenute indicazioni per il miglioramento della didattica della Matematica. Il volume termina con un'indagine sugli insegnanti (capitolo 5). Un gruppo di ricercatori in pedagogia, didattica della Matematica e dell'Informatica, e insegnanti-ricercatori ha ideato e somministrato loro un questionario per esplorare l'atteggiamento verso le prove INVALSI e, in particolare, sull'origine degli errori dei propri alunni.

Come Servizio Statistico ci auguriamo che tutti i lavori presenti nel volume mostrino come non solo i dati rilasciati da INVALSI, ma gli stessi strumenti, possano essere utilizzati proficuamente per attivare dei percorsi di miglioramento didattico.

1. Maestra, ma qui cosa vuol dire?

Considerazioni linguistiche sui quesiti INVALSI di Matematica per la scuola primaria

di Chiara Saletti, Ivan Graziani

Quanto pesa la comprensione del testo nell'esito delle prove di Matematica?

La comprensione del testo è la prima fase del processo risolutivo (Polya, 2016) ma spesso manca la ricostruzione della situazione problematica per difficoltà e rinuncia. L'atteggiamento di rinuncia (Zan, 2016) innesca comportamenti "patologici": indovinare l'operazione, guardare i numeri e da quelli risalire all'operazione *giusta*, provare tutte le operazioni e scegliere in base al risultato, cercare le *parole chiave*, o affidarsi al caso!

Quanto incide nella risoluzione di un problema la componente linguistica? È importante operare inferenze per ricavare informazioni implicite? Non basta leggere il testo di un problema, per risolverlo correttamente, va compreso.

Lo scopo della nostra ricerca è stato di verificare quanto il testo di un quesito possa essere un ostacolo concreto nella risoluzione.

Prima di passare alla fase operativa abbiamo chiesto a studenti e docenti di darci una definizione della parola *problema*, indipendentemente dal contesto matematico e di esprimersi anche sul fatto che talvolta la comprensione del testo aggiunga difficoltà nella risoluzione di un problema.

Il contributo pone sotto una lente d'ingrandimento le difficoltà che i nostri studenti incontrano nella comprensione del testo di un problema e gli errori, non sempre utilizzati come risorsa, con il rischio di condizionare l'apprendimento.

La competenza linguistica è dunque parte essenziale della competenza matematica.

How much does text comprehension weigh in the outcome of mathematics tests?

Comprehension of the text is the first step in the solving process (Polya, 2016) but the reconstruction of the problem situation is often lacking due to

difficulty and renunciation. The attitude of giving up (Zan, 2016) triggers “pathological” behaviour: guessing the operation, looking at the numbers and from those tracing back to the right operation, trying all the operations and choosing based on the result, looking for key words, or relying on chance!

How important is the language component in solving a problem? Is it important to make inferences to derive implicit information? It is not enough to read the text of a problem, it must be understood in order to solve it correctly.

The aim of our research was to ascertain how much the text of a question can be a concrete obstacle in solving it.

Before moving on to the operational phase, we asked students and teachers to give us a definition of the word problem, irrespective of the mathematical context, and also to comment on the fact that sometimes understanding the text adds to the difficulty of solving a problem.

The contribution puts under the magnifying glass the difficulties our students encounter in understanding the text of a problem and the errors, which are not always used as a resource, with the risk of affecting learning.

Linguistic competence is thus an essential part of mathematical competence.

1. Introduzione

La parola “lingua” indica «il particolare insieme di parole e di regole grammaticali proprio di un certo popolo e di una certa epoca e diverso dagli insiemi usati dagli altri popoli e in altre epoche» (De Mauro, 2007, p. 82), mentre il termine “linguaggio” viene usato in più modi, per designare la capacità umana di apprendere e di usare almeno una lingua, ma anche, più genericamente, per indicare una famiglia di codici.

Il ruolo dei linguaggi nell’insegnamento e nell’apprendimento della Matematica è stato ampiamente riconosciuto e studiato negli ultimi anni. Inoltre, anche le nostre esperienze personali di insegnamento ci hanno dimostrato come le difficoltà degli studenti risiedano spesso nella lingua e non solo nei simboli, soprattutto da quando nelle classi è presente una situazione sempre più marcata di multilinguismo, aspetto questo, proprio perché diffuso in tutti i gradi scolastici, da non sottovalutare e che richiama l’esigenza di modificare gli schemi di interpretazione e di approfondire l’idea di competenza linguistica.

Anche la recente emergenza epidemiologica da SARS Covid-19 che ha imposto l’esigenza di svolgere l’attività didattica a distanza, ha posto il focus sui

problemi della comunicazione e dell'insegnamento/apprendimento a distanza e di quanto si modifichi la capacità dei linguaggi di trasmettere informazioni.

Le ricerche specifiche sui collegamenti fra lingua e apprendimento della Matematica hanno radici lontane e l'interesse per quest'aspetto è molto aumentato anche in Italia negli ultimi vent'anni con l'interessante ricerca condotta da Rosetta Zan e Pietro Di Martino (2017), nella quale viene messo in luce il ruolo del linguaggio soprattutto nella risoluzione dei problemi, esaminando nel dettaglio i linguaggi e le loro caratteristiche e funzioni, considerando anche la competenza linguistica.

Il ruolo dei linguaggi nell'insegnamento/apprendimento delle discipline, in particolare della Matematica, viene messo in luce nelle Indicazioni nazionali per la scuola dell'infanzia e del primo ciclo. Nell'introduzione alla Matematica si trovano alcuni riferimenti importanti.

In particolare, la Matematica dà strumenti per la descrizione scientifica del mondo e per affrontare problemi utili nella vita quotidiana; contribuisce a sviluppare la capacità di comunicare e di discutere, di argomentare in modo corretto, di comprendere i punti di vista e le argomentazioni degli altri. In Matematica, come nelle altre discipline scientifiche, è elemento fondamentale il laboratorio, inteso sia come luogo fisico sia come momento in cui l'alunno è attivo, formula le proprie ipotesi e ne controlla le conseguenze, progetta e sperimenta, discute e argomenta le proprie scelte, impara a raccogliere dati, negozia e costruisce significati, porta a conclusioni temporanee e a nuove aperture la costruzione delle conoscenze personali e collettive.

Nella scuola primaria si potrà utilizzare il gioco, che ha un ruolo cruciale nella comunicazione, nell'educazione al rispetto di regole condivise, nell'elaborazione di strategie adatte a contesti diversi. La costruzione del pensiero matematico è un processo lungo e progressivo nel quale concetti, abilità, competenze e atteggiamenti vengono ritrovati, intrecciati, consolidati e sviluppati a più riprese; è un processo che comporta anche difficoltà linguistiche e che richiedono acquisizione graduale del linguaggio matematico. [...] Un'attenzione particolare andrà dedicata allo sviluppo della capacità di esporre e di discutere con i compagni le soluzioni e i procedimenti seguiti (p. 60).

Quello che emerge dall'estratto citato è il riconoscimento della centralità, in Matematica, di attività come la spiegazione, la discussione e l'argomentazione. L'uso dei linguaggi non deve infatti limitarsi alla comunicazione di informazioni, ma anche come strumento per riflettere, discutere, operare e collaborare fra persone. Ne scaturisce un'idea dell'apprendimento non solo come prodotto, bensì come processo durante il quale lo studente costruisce i significati o cambia opinione. E non ultimo il fatto che va considerata la possibilità che una parte delle difficoltà di apprendimento della Matematica sia di natura linguistica.

Lo stesso Bertrand Russel (1918, p. 13) afferma che «La Matematica è la sola scienza esatta di cui non si sa mai di che cosa si sta parlando, né se quello che si dice è vero».

Il rischio che si corre è quello, peraltro ancora molto diffuso nelle classi, che l'interpretazione del linguaggio della Matematica come un codice a sé stante contrapposto al linguaggio quotidiano e ordinario, spinga verso forme di apprendimento mnemoniche e ripetitive.

Quanto pesa la comprensione del testo nell'esito delle prove di Matematica?

La comprensione del testo è la prima fase del processo risolutivo (Polya, 2016) e spesso sembra mancare l'effettiva ricostruzione della situazione problematica o per difficoltà di comprensione o per rinuncia alla comprensione.

«A volte però i comportamenti messi in atto dai bambini di fronte ai problemi verbali sembrano testimoniare una rinuncia a priori a comprendere, in quanto le strategie utilizzate sembrano prescindere dalla comprensione del testo» (Zan, 2016, pp. 74-75). L'atteggiamento di rinuncia innesca una serie di comportamenti "patologici" che accompagna la risoluzione di un problema: usare i numeri presenti nel testo combinandoli a caso cercando, quindi, di indovinare l'operazione, guardare i numeri e da quelli risalire all'operazione che si presume quella *giusta*, provare tutte le operazioni e scegliere in base al risultato quale utilizzare, cercare le *parole chiave*, decidere se il risultato deve essere maggiore o minore dei numeri dati e, di conseguenza, scegliere l'operazione e per finire risolvere il problema a caso senza ricontrollare i risultati!

Di fondamentale importanza risulta quindi insegnare ad affrontare problemi a livello di scuola primaria e di secondaria di primo grado.

Lo scopo della nostra ricerca è stato quello di verificare quanto il testo di un quesito possa essere un ostacolo concreto per rispondere correttamente alla domanda posta. Per questo gli studenti, durante la somministrazione dei problemi e nella successiva fase di discussione, hanno avuto la possibilità di esprimere le loro perplessità, o argomentando i loro dubbi, oppure sottolineando alcuni termini e commentando a lato del quesito quale fosse la problematica collegata a questi.

Con questa nostra ricerca abbiamo voluto e cercato di porre sotto una lente d'ingrandimento la differenza tra imparare a risolvere un problema e imparare ad affrontare un problema, le difficoltà che i nostri studenti incontrano nella comprensione del testo di un problema e gli errori che non sempre sono utilizzati come risorsa; i timori e le misconcezioni che scaturiscono e che rischiano di condizionare l'apprendimento.

2. Le fasi di lavoro

Il lavoro si è articolato in tre fasi, da maggio a settembre 2022.

Con Moduli Google, durante la prima fase, abbiamo chiesto agli studenti e agli insegnanti delle classi coinvolte di rispondere ad alcune domande fra le quali dare una definizione della parola problema, indipendentemente dal contesto matematico; abbiamo anche chiesto agli studenti il significato di alcune parole ricorrenti nei problemi matematici e solo in seguito abbiamo chiesto loro di esprimersi anche sul fatto che talvolta il testo e la sua comprensione aggiunga difficoltà o meno nella risoluzione di un problema matematico.

La seconda fase è stata quella operativa che ha visto gli studenti impegnati nella risoluzione degli 8 quesiti contenuti nel fascicolo.

La terza e ultima fase, anch'essa operativa, ha visto la condivisione dei risultati, la condivisione delle strategie seguite dai ragazzi, la ripresa e la discussione degli errori più comuni.

2.1. Indagine con Moduli Google

Prima di passare alla fase operativa della nostra ricerca abbiamo proposto agli studenti e agli insegnanti delle classi coinvolte alcune domande mediante due Moduli Google, il primo intitolato “Che problema!” e il secondo “La lingua italiana nella Matematica”.

Nel primo Modulo veniva chiesto: “Che cosa si intende per problema?” senza fare alcun riferimento al contesto matematico.

Alcune definizioni date dagli insegnanti, che riportiamo di seguito, hanno molte analogie con quelle che leggiamo nei dizionari: «un quesito che attende una soluzione, una difficoltà che richiede un adattamento o un comportamento particolare, una situazione difficile di cui si impone il superamento, qualcosa di cui non si conosce una soluzione, un evento che limita il tuo agire e interferisce con i tuoi progetti». Ma troviamo anche espliciti riferimenti alla Matematica, alla Geometria, agli esercizi algebrici...

Mentre per gli studenti un problema è «qualcosa di impellente, che coinvolge molto, che preoccupa perché ci mette in bilico tra un evento da risolvere e la nostra storia ed esperienza precedente. È qualcosa che dobbiamo superare per continuare il nostro percorso serenamente, una sfida, una complicazione da risolvere magari trovando la soluzione migliore, un grosso guaio che ho combinato e che devo risolvere; difficoltà, ansia, adrenalina».

In queste definizioni date dagli studenti è insita chiaramente una carica emotiva molto forte, ma non completamente negativa: è più una spinta sti-

molante verso qualcosa che si può raggiungere, con calma e magari faticosamente, ma che di sicuro li porterà a una risoluzione positiva, soddisfacente. Quindi una visione di fondo ottimistica.

Sulla base della nostra esperienza in classe, se avessimo posto le stesse domande facendo esplicito riferimento al contesto scuola/aula, gli stati d'animo e le sensazioni che avremmo suscitato e le conseguenti risposte sarebbero state senz'altro molto diverse.

Il più delle volte, infatti, gli studenti, quelli “bravi”, risolvono i problemi o senza alcuna spinta emotiva e motivazionale e con il solo intento di indovinare quale sarà la strategia di colui che ha inventato quel problema, oppure, quelli che non amano la Matematica, cadendo nello sconforto di essere nuovamente di fronte al solito problema che non sono in grado di risolvere da soli consolidando l'idea di non capire la Matematica!

La Matematica, quella viva, ci dice invece che un problema è una situazione stimolante, che ci invita alla sfida, aperta a più soluzioni e più strategie risolutive: dovremmo lasciare che gli studenti si riappropriino della capacità di immaginare e tentare senza paura di sbagliare di percorrere una strada che sia anche soddisfacente e motivante.

Nel secondo Modulo Google abbiamo ristretto il campo di indagine al ruolo della comprensione linguistica nella risoluzione di un quesito matematico. Alla prima domanda “Quanto la comprensione linguistica incide nella risoluzione di un problema matematico?” studenti e docenti rispondono per il 94% con molto e il 6% con abbastanza (fig. 1).

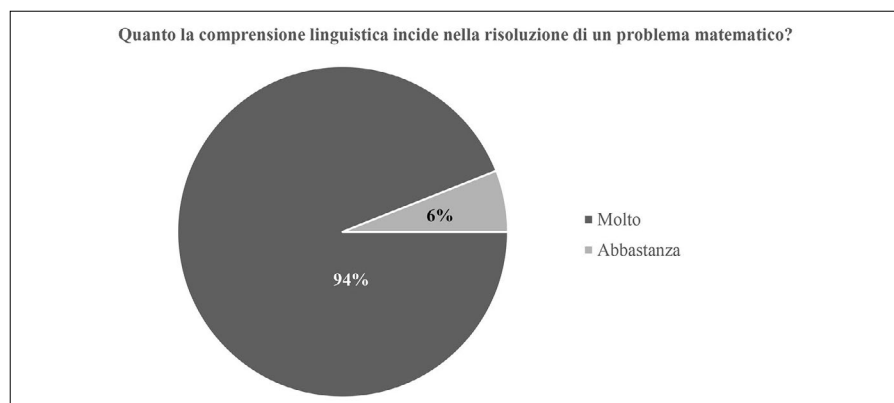


Fig. 1 – Risposte in percentuale alla prima domanda

Le motivazioni date dagli studenti alle loro risposte sono state: «Se non comprendo il testo non riesco a individuare cosa il problema chiede di risol-

vere e i dati necessari per farlo»; «Se non si comprende il testo non si potrà arrivare a soluzione»; «Se si capisce ciò che si richiede il problema è già risolto»; «Perché, se prima non si comprende cosa il problema chiede, si rischia di fare calcoli inutili che non portano alla risoluzione». Le motivazioni dei docenti alla stessa domanda: «Se non è chiara l'esposizione del problema in senso linguistico credo che sia molto difficile decostruirlo e trovare soluzioni»; «La comprensione linguistica incide molto nella risoluzione di un problema matematico, perché, se non si capisce cosa c'è scritto in un problema, esso non può essere risolto al meglio»; «Un problema matematico è solitamente proposto come un testo. Se viene meno la comprensione linguistica è pressoché impossibile poter individuare l'operazione e giungere così alla risoluzione del problema stesso». Infine, la motivazione di una studentessa di Scienze della formazione primaria e futura insegnante, rende perfettamente l'idea di quanto, talvolta, avvenga nelle nostre classi: «Secondo il mio punto di vista incide moltissimo. Durante le mie ore di tirocinio, ho potuto notare che, se ai bambini viene dato un comando troppo elaborato e intrecciato, poco comprensibile, si perdono e non riescono più a svolgere il problema oppure rispondono in maniera errata».

Che cosa, dunque, spinge alcuni docenti a ingegnarsi nell'invenzione di testi ingarbugliati, elaborati, intrecciati e quindi poco comprensibili per i ragazzi, pur sapendo che ciò aumenta la difficoltà nella risoluzione del problema?! Qui, forse, entrano in gioco meccanismi che portano a differenziare i problemi dagli esercizi e che Bruno D'Amore (2006, pp. 659-660) definisce formalismi: «Già dalla quarta e quinta elementare, però, alcuni insegnanti iniziano a introdurre precocemente una marea di formalismi che allontanano fatalmente la materia dal piacere e dall'allegria [...] Si tratta, a nostro avviso, di un atteggiamento giocato sui ruoli relazionali insegnante-allievo, più che di un vero e proprio spartiacque, tanto più che una situazione problematica può dare luogo a problema o esercizio a seconda della situazione didattica [...] Entrano in gioco anche altri fattori, fra i quali la motivazione per cui anche la distinzione esercizio/problema può dipendere dall'atteggiamento, da fattori emozionali o emotivi, dal ruolo che ha l'esercitazione in classe, dal "contratto" che si è implicitamente stabilito... e dalla maggiore o minore vicinanza alla realtà delle situazioni problematiche proposte».

Quanto affermato da D'Amore viene confermato dalle risposte date alla domanda "Quanto un testo lungo in un quesito di Matematica può creare difficoltà allo studente?" (fig. 2).

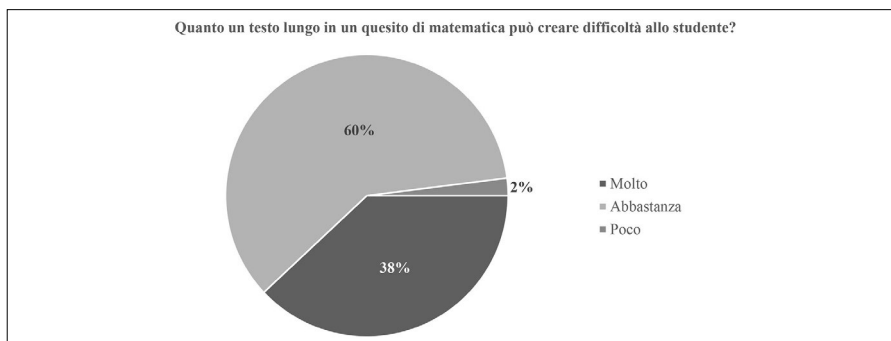


Fig. 2 – Risposte in percentuale alla seconda domanda

A questa risposta le motivazioni che vengono fornite dai docenti sono: «Lo studente potrebbe essere distratto da altri particolari scritti nel testo oppure dimenticare pezzi rilevanti. O ancora, se uno studente ha difficoltà nella lettura, la lettura di un testo lungo gli porterà via molta energia e concentrazione e potrebbe non essere in grado di utilizzare la stessa concentrazione per risolvere il problema»; «Se il testo è molto lungo ci si può sentire sopraffatti dall'infinità di dati: sentiamo la pressione di doverli ricordare tutti, anche quelli che alla fine risultano essere solo inutili alla risoluzione del problema stesso, messi lì solo per confondere»; «Sebbene lunghezza e difficoltà non siano sempre direttamente proporzionali, nell'immaginario collettivo degli studenti la lunghezza è spesso associata all'aumento della difficoltà. Ho visto, e io stessa ho vissuto, uno stato di scoraggiamento iniziale di fronte a quesiti matematici molto lunghi. Lunghezza fa talvolta rima non solo con maggior difficoltà, ma anche maggiore energia, più vocaboli, più tempo di lettura».

Quest'ultima riflessione trova riscontro nelle parole di diversi studenti: «Problemi troppo lunghi con domande lunghe mi distraggono»; «Davanti a un problema lungo mi perdo e non so concentrarmi»; «Con un problema lungo devo ricominciare da capo un sacco di volte e perdo il filo, poi mi dimentico quello che devo fare».

Alla successiva domanda «Quanto un problema con testo narrativo può aiutare l'allievo nella comprensione e nella risoluzione della domanda matematica?» il campione di studenti e insegnanti risponde secondo le percentuali riportate nella figura 3 e in contraddizione con quanto sostenuto nell'argomentazione alla risposta precedente.

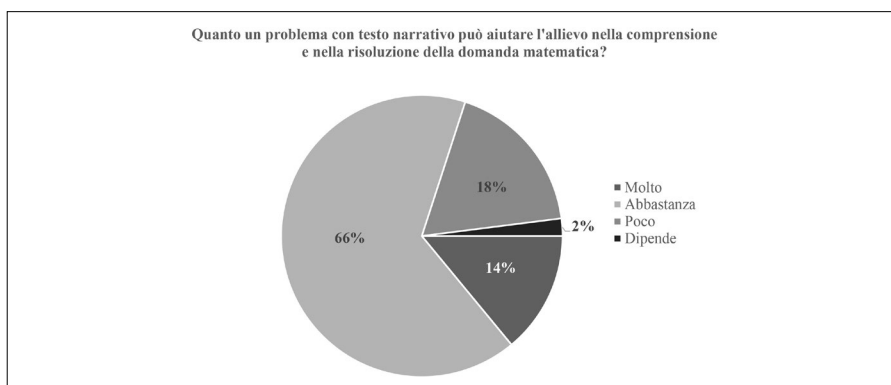


Fig. 3 – Risposte in percentuale alla terza domanda

In realtà, durante la fase di restituzione, condivisione e discussione delle risposte dei quesiti matematici, molti studenti hanno manifestato difficoltà soprattutto con quei problemi che si presentano con testi narrativi articolati e correlati da tabelle, grafici e disegni. Alla domanda proposta invece nel Modulo Google la maggior parte degli studenti rientra in quel 66%; queste alcune delle risposte: «Riesco a immaginarlo meglio»; «Stimola la mia curiosità e l'interesse, e mi aiuta nella comprensione»; «L'importante che non sia troppo lungo»; «Mi serve a entrare in una storia e capirla meglio»; «Comprendere una storia è più semplice». Ci sono comunque alcune voci fuori dal coro: «Io preferisco un testo corto in modo da riconoscere subito i dati importanti per il problema»; «La storia ti può aiutare ma può anche distrarti dal trovare quello che serve per risolvere il problema»; «Ti perdi dietro alle parole e ai disegni e non trovi più la strada». Altro discorso per i docenti, molti dei quali, pur facendo parte del 66%, ravvisano nel testo narrativo una difficoltà maggiore per lo studente: «Se un bambino ha difficoltà nella decifrazione del testo, non è di aiuto, anzi, potrebbe essere di ulteriore difficoltà; se invece ha una buona comprensione linguistica, il testo narrativo può essere stimolante»; «Può aiutare qualcuno a immedesimarsi meglio nella vicenda che il problema narra, e di conseguenza a capire con più chiarezza cosa fare per risolverlo. Altri alunni invece potrebbero perdersi tra le tante informazioni date». Mentre altri trovano la cosa stimolante per gli studenti perché la situazione proposta è più aderente alla realtà: «Penso che dare uno sfondo narrativo a un quesito matematico possa fornire uno sfondo più accattivante suscitando così curiosità. Inoltre, ritengo che fornisca immagini e agganci concreti rendendo più accessibile l'elemento astratto, spesso presente nelle attività matematiche»; «Il bambino potrebbe riuscire a immedesimarsi meglio nella situazione proposta».

e quindi riuscire a risolvere più facilmente il problema»; «Un testo narrativo se ben strutturato può fare immedesimare meglio lo studente nel problema in modo tale che riesca a comprendere più facilmente il problema e che riesca a cercare soluzioni in modo più efficace»; «Il problema acquista una connotazione ludica che rende più leggera l'applicazione»; «Se il testo del problema viene presentato come una storia, è più facile per l'allievo comprendere il problema stesso: non si tratta più di qualcosa di freddo e matematicamente meccanico ma diventa una sorta di legame tra lo studente e il protagonista della narrazione, entra in gioco la fantasia del bambino ma anche la sua empatia, e di conseguenza anche l'interesse nel risolvere il problema».

Nel corso di questo contributo torneremo sull'argomento dal momento che gli studenti, in fase di condivisione, hanno evidenziato le loro difficoltà, non tanto relativamente alla comprensione del testo in senso stretto, quanto soprattutto con problemi non standard.

3. Ricerca dei quesiti in coerenza con il nostro intento

L'idea della nostra ricerca è partita, quindi, dalla necessità di verificare quanto la comprensione linguistica incida sulla risoluzione di un problema e come gli studenti si comportano davanti a problemi non standard. In questi problemi, infatti, viene loro richiesto di reperire informazioni da disegni, grafici e tabelle, un'abilità che non sempre viene adeguatamente sviluppata. Questa difficoltà è legata a diversi fattori. Innanzitutto, i problemi non standard richiedono una maggiore capacità di osservazione e di analisi. Gli studenti devono essere in grado di identificare le informazioni rilevanti e di interpretarle correttamente. In secondo luogo, questi problemi possono essere più complessi e richiedere una maggiore capacità di ragionamento. Gli studenti devono essere in grado di elaborare le informazioni fornite e di giungere a una soluzione corretta.

Altro scopo che ha accompagnato la nostra ricerca è stato quello di testare le abilità argomentative degli studenti, processo complesso e trasversale che ancora oggi non riesce a entrare da protagonista nella quotidiana attività didattica.

Per la nostra ricerca e anche per il lavoro in classe con gli studenti abbiamo scelto, grazie agli strumenti di ricerca di GESTINV 3.0, degli item a nostro avviso interessanti dal punto di vista della comprensione del testo e che ci consentissero di indagare l'atteggiamento degli studenti nel risolvere un problema utilizzando le relazioni numeriche espresse a parole e i dati presentati sia nel testo sia in forma grafica. Abbiamo modificato gli item facendoli diventare a risposta aperta, o cambiando i distrattori o alcune parole,

che richiedessero di argomentare il procedimento svolto o abbiamo aggiunto tale richiesta a quesiti con risposta univoca o a scelta multipla.

3.1. Composizione del fascicolo

L'analisi dei fascicoli della prova della primaria di grado 5 del 2022 ha permesso di individuare alcuni item funzionali allo studio incentrato a verificare quanto il testo di un quesito possa essere un ostacolo concreto per la risposta alla domanda posta.

Gli item selezionati presentano le seguenti caratteristiche:

- domanda a risposta univoca o a scelta multipla. In questo modo è possibile valutare in modo oggettivo la risposta degli studenti;
- testo misto e linguisticamente complicato. Il testo è composto da elementi di natura diversa, come frasi, elenchi, tabelle, grafici ecc. Inoltre, il linguaggio utilizzato può essere complesso, con l'uso di termini tecnici o di espressioni figurate;
- tabella o grafico. Il testo è accompagnato da una tabella o da un grafico che forniscono informazioni utili per rispondere alla domanda.

Gli item selezionati afferenti agli ambiti Dati e previsioni richiedono agli studenti di orientarsi nella lettura di una tabella articolata per ricavare informazioni. In questo modo è possibile osservare il comportamento degli studenti nel ricavare informazioni da tabelle riferite a un contesto reale.

Gli item selezionati di ambito Relazioni e funzioni permettono di indagare l'atteggiamento degli studenti nel ricavare informazioni da un'iconografia composta da testo, dati numerici e grafici a barre. In questo modo è possibile osservare come gli studenti sono in grado di integrare le informazioni fornite da fonti diverse.

I risultati dello studio hanno evidenziato che il testo di un quesito può rappresentare un ostacolo concreto per la risposta alla domanda posta. In particolare, gli studenti hanno maggiori difficoltà a comprendere i testi misti e linguisticamente complicati, soprattutto se accompagnati da tabelle o grafici.

Una volta definito il numero degli item e la tipologia, abbiamo creato un fascicolo contenente gli item selezionati. Il fascicolo è stato assemblato in modo da essere facilmente utilizzabile da parte dei docenti coinvolti nella ricerca. Per facilitare la somministrazione degli item da parte dei docenti, il fascicolo è stato progettato in modo da essere facilmente comprensibile e da utilizzare; per garantire l'omogeneità della somministrazione degli item, tutti i docenti hanno utilizzato lo stesso fascicolo, in modo da garantire che gli studenti siano stati sottoposti agli stessi item.

Il fascicolo è composto di 8 quesiti, di cui 7 di grado 5 e 1 di grado 2, tutti del 2022 degli ambiti Numeri, Dati e previsioni, Relazioni e funzioni e distribuiti nelle dimensioni secondo la tabella seguente.

Tab. 1 – Distribuzione quesiti del fascicolo per dimensioni e ambito

<i>Dimensione</i>	<i>Numeri</i>	<i>Dati e previsioni</i>	<i>Relazioni e funzioni</i>	<i>Totale</i>
Conoscere		1	2	3
Risolvere problemi	1	1	1	3
Argomentare	1	1		2
Totale	2	3	3	

Gli item selezionati per lo studio sono stati in parte modificati per renderli più adeguati agli obiettivi della ricerca. In particolare, sono stati resi tutti a risposta aperta e con richiesta di argomentare il procedimento svolto. Questa modifica ha permesso di valutare in modo più completo le capacità degli studenti di comprendere il testo e di utilizzare le informazioni fornite per rispondere alla domanda.

Inoltre, la richiesta di argomentare il procedimento svolto ha permesso di osservare come gli studenti sono in grado di giustificare le loro risposte.

Solo in seguito alla pubblicazione del Rapporto prove INVALSI del luglio 2022, abbiamo constatato che alcuni degli item selezionati avevano riportato percentuali alte di errore.

3.2. Scelta del campione

Il campione scelto, trattandosi di uno studio in verticale, è formato da studenti di 12 scuole primarie e secondarie di I grado dell’Emilia-Romagna e della Toscana, per un totale di 323 studenti ripartiti in 165 per la scuola primaria e 158 per la scuola secondaria di I grado.

Gli studenti delle quinte della scuola primaria appartengono alla coorte di coloro i quali, a causa della pandemia, non hanno potuto sostenere le rilevazioni INVALSI 2019, mentre gli studenti della prima classe della scuola secondaria di I grado hanno regolarmente svolto le prove di grado 2 nel 2018 e di grado 5 nel 2021 con risultati in linea con le medie di riferimento.

Dei 165 studenti della quinta primaria, 27 appartengono a una classe di un comprensivo di Firenze con un background familiare medio alto, che a partire dalla terza ha avuto la continuità di un docente che insegna Matematica e che ha improntato la didattica sul problem solving e sull’argomentazione in Matematica. L’Italiano è stato assegnato fin dalla prima a una docente

che per molti anni ha insegnato nelle proprie classi Italiano e Matematica, seguendo una didattica non tradizionale ma più orientata all'approccio laboratoriale e argomentativo della disciplina.

Altri 26 studenti appartengono a un comprensivo della periferia nord di Firenze, situato nel comune di Sesto Fiorentino, il cui background familiare è medio basso e con una forte presenza di alunni stranieri. La classe ha visto un avvicendamento continuo di docenti per quanto riguarda l'ambito linguistico, mentre per l'ambito matematico è presente un insegnante che da sempre lavora con gli studenti con una didattica di tipo laboratoriale incentrata sull'argomentazione, problem posing e problem solving.

I restanti 112 studenti appartengono rispettivamente a 2 quinte primarie di un comprensivo di Bologna entrambe con ESCS medio e medio basso; le altre 2 quinte primarie fanno parte di un comprensivo della provincia di Forlì-Cesena con un ESCS medio e medio alto. In queste quattro quinte primarie vi è stata una buona stabilità dei docenti di Matematica che, pur privilegiando una didattica di tipo trasmissivo-frontale, hanno lasciato spazio alle attività laboratoriali e al problem solving.

In generale, a livello di scuola primaria per le classi interessate nella nostra ricerca abbiamo notato l'utilizzo da parte dei docenti di metodologie didattiche attive cioè quelle pratiche in cui lo studente è al centro del processo di apprendimento, nel quale svolge un ruolo attivo nella dinamica di costruzione della propria conoscenza, con azioni che gli consentono l'elaborazione attiva e costruttiva dei contenuti di apprendimento, lo sviluppo del pensiero procedurale e la sua integrazione col pensiero dichiarativo e teorico.

Gli studenti delle 6 classi prime di secondaria di I grado coinvolti sono stati 158. Due classi appartengono a un comprensivo di Santa Sofia nella provincia di Forlì-Cesena con un background familiare medio-basso e medio, i cui risultati generalmente si attestano in linea con le medie di riferimento. Da rilevare la presenza di un docente di Matematica che lascia ampio spazio al problem solving. Le altre 4 classi di secondaria di I grado appartengono rispettivamente 2 a un comprensivo nella provincia di Pistoia con un ESCS medio-alto, mentre le rimanenti a un comprensivo della provincia di Pisa con ESCS alto: i risultati delle quattro classi nelle prove standardizzate risultano in linea con le medie di riferimento. I docenti seguono una metodologia didattica di tipo trasmissivo, lasciando poco spazio all'argomentazione.

3.3. Somministrazione fascicolo

Il fascicolo è stato somministrato direttamente e individualmente agli studenti a settembre 2022, durante l'orario di lezione con date scelte liberamente dai docenti delle classi coinvolte.

Abbiamo scelto di far lavorare gli studenti individualmente nella risoluzione dei quesiti e successivamente in gruppo per la discussione e condivisione dei lavori.

La restituzione delle risposte è avvenuta con tempi estremamente brevi. Ciò ha reso possibile per noi avere un quadro immediato della situazione in base alle classi e alla tipologia di istituzione scolastica coinvolta; ma al tempo stesso ha consentito ai docenti coinvolti un'analisi in tempi brevi delle risposte date dai propri studenti e un successivo momento di discussione e condivisione dei risultati emersi con la classe, spunto di riflessione per eventuali manovre correttive da attuare nella progettazione didattica.

3.4. Analisi dei risultati ottenuti (confronto in verticale)

La correzione del fascicolo, l'analisi dei dati ottenuti e delle discussioni tenutesi a seguito dell'attività svolta all'interno delle classi interessate, sia della scuola primaria sia della secondaria di primo grado, hanno permesso di concentrarci su alcuni aspetti significativi, legati a particolari procedimenti risolutivi. In particolare, ascoltando le motivazioni degli studenti per le difficoltà riscontrate abbiamo potuto identificare diverse tipologie di errori, riconducibili solo in parte alla comprensione linguistica del testo.

Tra le tipologie di errori identificate, abbiamo evidenziato errori di ragionamento, legati a una comprensione errata del problema, forse a causa di letture frettolose, o a un ragionamento logico errato; errori di calcolo, legati a un errore di calcolo o a un'errata interpretazione dei dati forniti; errori di interpretazione delle informazioni, questi ultimi legati a un'errata interpretazione delle informazioni fornite nel testo o nelle tabelle o nei grafici.

Riteniamo importante identificare le cause degli errori commessi dagli studenti, in modo da poter intervenire con strategie didattiche adeguate.

In particolare, abbiamo notato che gli studenti della scuola primaria hanno maggiori difficoltà rispetto agli studenti della secondaria di primo grado a comprendere i testi misti e linguisticamente complicati, soprattutto se accompagnati da tabelle o grafici.

I momenti di condivisione e ridiscussione del fascicolo nelle classi coinvolte sono stati particolarmente utili perché ci hanno permesso di raccogliere

informazioni preziose sulle strategie risolutive, gli errori commessi e i diversi approcci adottati dagli studenti. Queste informazioni ci hanno consentito di comprendere meglio le difficoltà degli studenti e di individuare le cause degli errori, ma ci hanno permesso di confrontarci con i docenti coinvolti e di ricevere feedback utili per la nostra ricerca. I docenti hanno potuto condividere le loro osservazioni e le loro esperienze, fornendoci nuovi spunti di riflessione.

L'analisi delle percentuali delle risposte corrette ed errate per ogni item ci ha consentito di identificare i quesiti che hanno riscontrato maggiori difficoltà in entrambi gli ordini di scuola. In particolare, abbiamo individuato tre quesiti che hanno avuto i risultati più significativi per il nostro studio e che rappresentano tipologie di difficoltà diverse. Questo ci ha permesso di esplorare diversi aspetti della comprensione dei testi matematici e di identificare le seguenti difficoltà comuni agli studenti della scuola primaria e secondaria di primo grado. Difficoltà di comprensione linguistica del testo, in questo caso gli studenti hanno avuto difficoltà a comprendere il significato del testo, soprattutto quando il testo era complesso o quando utilizzava un linguaggio tecnico o figurato. Difficoltà di lettura delle tabelle e dei grafici, gli studenti hanno avuto difficoltà a identificare le informazioni rilevanti nelle tabelle e nei grafici, e a interpretarle correttamente. Difficoltà di ragionamento matematico là dove gli studenti hanno avuto difficoltà a comprendere la domanda posta dal quesito, forse a causa anche di una lettura frettolosa, a pianificare la soluzione e a eseguire i calcoli necessari.

3.4.1. Primo item: Il percorso

Il primo item, presente nella prova 2022 di grado 5, è relativo all'ambito Relazioni e funzioni.

Il quesito è stato modificato in quanto è stata aggiunta la richiesta di spiegazione del procedimento seguito.

Si tratta di risolvere un problema utilizzando le relazioni numeriche espresse a parole e i dati presentati sia nel testo sia in forma grafica. Il quesito richiede, infatti, di individuare una distanza mettendo in relazione dati forniti nel testo con dati forniti dall'immagine. L'alunno deve, cioè, comprendere che, se la distanza tra la scuola e il parco è il doppio della distanza tra casa di Lucia e parco, allora il percorso dalla casa di Lucia alla scuola è il triplo del percorso casa Lucia-parco.

Tab. 2 – Risultati del campione INVALSI di grado 5 2022

Item	Mancante	Errata	Corretta
D21	5,11%	53,87%	41,02%

D21. Per andare a scuola, Mara percorre complessivamente 1100 metri in bicicletta, seguendo il percorso indicato.

La distanza tra la scuola e il parco è il doppio della distanza tra la casa di Lucia e il parco.

Qual è la distanza tra la casa di Lucia e il parco?

Risposta: metri

Spiega il procedimento che hai seguito e le operazioni svolte per rispondere al quesito.

Fig. 4 – Quesito di grado 5 del 2022

I risultati ottenuti dal nostro campione (fig. 5), seppur migliori rispetto a quelli del campione nazionale, confermano le difficoltà emerse a livello nazionale (tab. 2). A livello di scuola primaria, le difficoltà maggiori sono state riscontrate proprio nella comprensione del testo e nella *distrazione* che il disegno ha provocato in alcuni studenti. In particolare, alcuni studenti hanno affermato che il disegno li ha distratti dalla comprensione del testo.

In questo caso, come in altri, il disegno è parte integrante della domanda e fornisce informazioni fondamentali per la risoluzione del quesito, come la lunghezza in metri della distanza tra i primi due punti del percorso, ma non solo. Gli studenti che hanno affermato che il disegno li ha distratti probabilmente non hanno saputo cogliere queste informazioni fondamentali. Forse si sono concentrati su altri dettagli del disegno invece di concentrarsi sulle informazioni numeriche. Questo è un dato significativo, che suggerisce che alcuni studenti del campione della scuola primaria hanno ancora difficoltà a comprendere i testi misti, ovvero testi che combinano elementi di natura diversa, come testo, immagini.

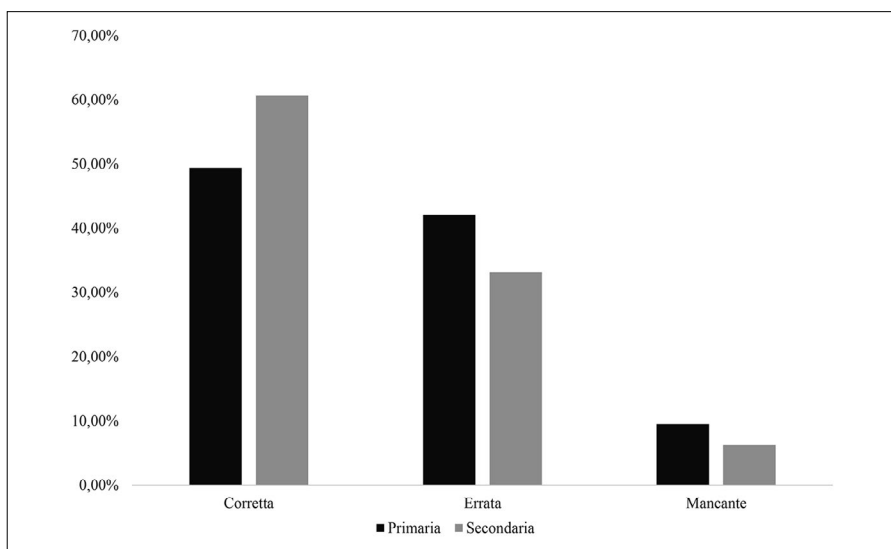


Fig. 5 – Grafici di confronto tra i due ordini di scuola del nostro campione per il quesito di grado 5

021
 PER RISPONDERE A QUESTA DOMANDA HO CALCOLATO LA
 DISTANZA CON IL RIGHELLO TRA LA CASA DI LUCIA E IL
 PARCO E HO PRESO COME PUNTO DI RIFERIMENTO LA DISTANZA
 TRA LA CASA DI LUCIA E QUELLA DI TADA CHE SONO
 $2\text{ cm} = 200\text{ m}$, CON IL RIGHELLO TRA LA CASA DI LUCIA
 E IL PARCO SONO $2,5\text{ cm} = 300$ E POI L'HO MOLTIPLICATO
 $\times 2$ E MI È TORNATO 600

Fig. 6 – Le argomentazioni scritte di uno studente al quesito

Gli errori più comuni vanno dall'errore di calcolo a corredo di un ragionamento corretto, alla scarsa dimestichezza da parte di qualche studente nell'uso del righello. Il caso di Niccolò è emblematico di questo tipo di difficoltà, egli ha commesso un errore di calcolo, ma il suo ragionamento era corretto. Questo suggerisce che Niccolò ha compreso il significato del testo e del disegno,

ma ha commesso un errore di calcolo banale. L'errore di calcolo è un errore comune, anche tra gli studenti più bravi. Questo è dovuto al fatto che il calcolo matematico è una competenza che richiede pratica e allenamento (fig. 6).

Le affermazioni di Alessandro, Lavinia e Rafael sono esaurienti nell'illustrare le problematiche legate alla comprensione del testo.

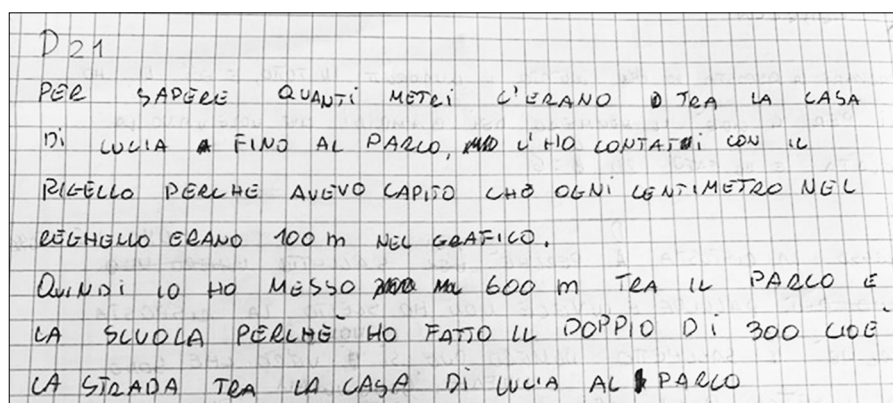
Alessandro ha risposto 600 m, sbagliando, perché ha dato per scontato che la risposta riguardasse la distanza scuola-parco. Questo suggerisce che Alessandro non ha riletto la domanda con attenzione.

Lavinia e Rafael hanno ammesso di essersi fissati sulla parola doppio, tralasciando completamente le altre informazioni contenute, suggerendo che entrambi non hanno letto attentamente la domanda e non hanno compreso il contesto in cui è inserita.

Questi errori di comprensione del testo sono comuni tra gli studenti, soprattutto tra gli studenti più giovani; in base ai feedback ricevuti dai docenti coinvolti, pare che ciò sia dovuto al fatto che la comprensione del testo è una competenza complessa che richiede pratica e familiarità: leggere un testo attentamente e comprendere il contesto in cui è inserito è un'attività che richiede impegno sia al docente sia al discente.

La lettura frettolosa del testo è una delle cause principali degli errori di comprensione del testo nella scuola secondaria di primo grado.

Nel caso di Rebecca, la lettura frettolosa le ha fatto interpretare la domanda in modo errato. Rebecca ha pensato che la domanda le chiedesse la distanza tra parco e scuola, che è il doppio della distanza casa Lucia-parco. Questo errore di interpretazione è stato probabilmente causato dal fatto che Rebecca ha letto la domanda troppo velocemente e non ha prestato attenzione alle parole chiave, come "distanza scuola-parco".



D 21
PER SAPERE QUANTI METRI C'ERANO TRA LA CASA
DI LUCIA FINO AL PARCO, HO CONTATTI CON IL
RIGELLO PERCHÉ AVEVO CAPITO CHE OGNI CENTIMETRO NEL
RIGHELLO ERANO 100 m NEL GRAFICO.
QUINDI IO HO MESSO ~~300~~ MA 600 m TRA IL PARCO E
LA SCUOLA PERCHÉ HO FATTO IL DOPIO DI 300 UOE
LA STRADA TRA LA CASA DI LUCIA AL PARCO

Fig. 7 – Le argomentazioni scritte di una studentessa al quesito

La convinzione di Rebecca di aver fatto bene, anche dopo aver ricevuto feedback da parte degli insegnanti, le faceva affermare di aver letto il testo numerose volte e di aver utilizzato correttamente le informazioni fornitele (fig. 7).

3.4.2. Secondo item: Lavaggio

Anche il secondo item dell'ambito Dati e previsioni è presente nella prova 2022 di grado 5 e appartiene a due dimensioni: Conoscere e Risolvere problemi. In origine il secondo quesito prevedeva quattro opzioni di risposta, ma noi abbiamo preferito renderla aperta e con richiesta di argomentazione. I quesiti richiedono di orientarsi nella lettura di una tabella articolata per ricavare informazioni. I nostri studenti della primaria hanno avuto risultati in linea con la media del campione, migliori, invece, quelli degli studenti della secondaria di primo grado (fig. 9). In questo problema la maggior parte degli errori si è concentrata nella risposta al quesito b, confermando la tendenza del campione nazionale (tab. 3).

Tab. 3 – Risultati del campione INVALSI di grado 5 2022

Item	Mancante	Errata	Corretta
D25a	6,95%	50,67%	42,39%

Item	Mancante	A	B	C	D
D25b	3,24%	13,23%	43,43%	29,87%	10,23%







Le difficoltà emerse in fase di condivisione delle risposte sono da ricercare nella lettura della tabella e nella conseguente difficoltà a recuperare le informazioni necessarie per rispondere soprattutto al secondo quesito.


Niccolò, per esempio, ci dice: «In questo problema proprio non capivo nulla... ho dovuto rileggerlo tante, tantissime volte e alla fine rileggendo attentamente l'ho risolto», ma solo seguendo attentamente le indicazioni riesce a risolvere correttamente il problema. Nel caso di Niccolò, la difficoltà è stata superata rileggendo attentamente il testo e la tabella. Questo suggerisce che Niccolò è stato in grado di comprendere il significato del testo e della tabella, ma ha avuto bisogno di maggior attenzione e un po' di tempo per farlo.

Nel caso di Ettore, che non è riuscito a risolvere correttamente il quesito, la difficoltà è stata più profonda. Durante la discussione ritorna più volte sul problema della lavatrice: «In questo problema mi è sembrato tutto così complicato, la tabella, i numeri con i kg mescolati agli ml, le macchie sulle

magliette... ho provato a fare qualche calcolo ma non sapevo neppure cosa facevo... mica lo sapevo che per fare una lavatrice la mamma dovesse fare tutti questi calcoli!!!!». Ettore ha trovato la tabella complicata e non è stato in grado di comprendere le informazioni che essa fornisce, evidenziando probabili difficoltà a comprendere le informazioni presentate in forma tabellare.

D25. La seguente immagine riporta i consigli d'uso scritti sulla confezione del detersivo per lavatrice che Carlo utilizza per fare il bucato.

DOSI CONSIGLIATE				
	4-5 kg 		6-8 kg 	
DUREZZA DELL'ACQUA				
	SPORCO NORMALE	MOLTO SPORCO	SPORCO NORMALE	MOLTO SPORCO
DOLCE / MEDIA	115 mL	175 mL	175 mL	270 mL
DURA / MOLTO DURA	145 mL	205 mL	225 mL	320 mL

 **POCO SPORCO**

4-5 kg TOGLIERE 20 mL dalla dose consigliata per sporco normale
6-8 kg TOGLIERE 35 mL dalla dose consigliata per sporco normale

La durezza dell'acqua di casa di Carlo è media.

a. Carlo vuole lavare in lavatrice 7 kg di bucato "Molto sporco". Quanti millilitri (mL) di detersivo deve utilizzare?
Risposta: mL

b. Carlo deve lavare 4 kg di bucato "poco sporco". Quanti millilitri di detersivo deve utilizzare?

Spiega come sei arrivato a dare le due risposte.

Fig. 8 – Quesito di grado 5 del 2022

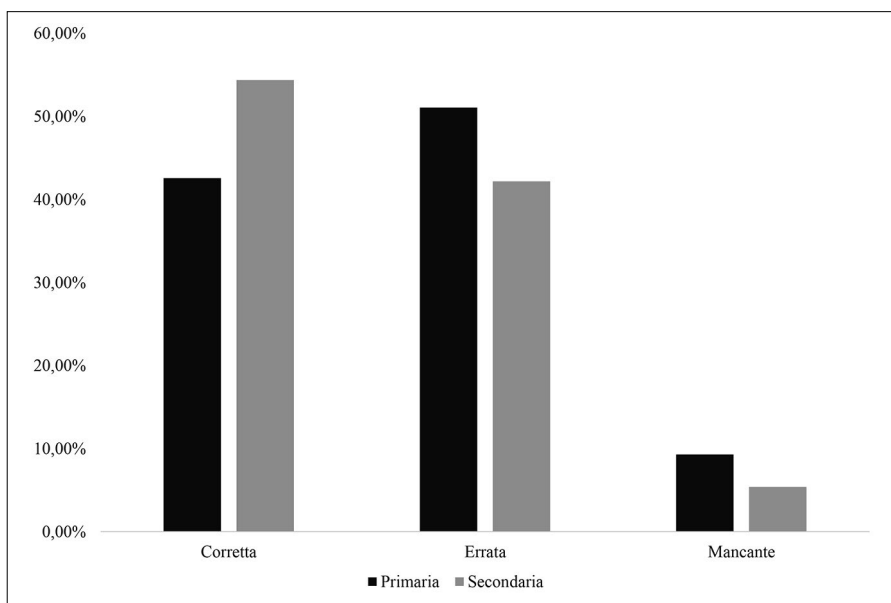


Fig. 9 – Grafici di confronto tra i due ordini di scuola del nostro campione per il quesito di grado 5

Altri studenti, come Mia (fig. 10), hanno affrontato il problema con sicurezza. «Ho letto attentamente il problema più di una volta e poi ho risposto alle due domande ricercando nel testo e nella tabella le informazioni...». Questo suggerisce che questi studenti sono in grado di comprendere le informazioni presentate in forma tabellare e di recuperare le informazioni necessarie per rispondere alle domande.

Arianna afferma che per arrivare alla soluzione nella prima risposta ha addizionato le quantità di detersivo necessarie per il bucato molto sporco con acqua dolce-media e dura-molto dura (270+320), nella seconda risposta usa lo stesso procedimento applicato al bucato sporco normale, sbagliando anche l'addizione (115+145=216!). L'errore di Arianna è probabilmente dovuto a una confusione tra le informazioni fornite nella tabella. Arianna ha pensato che le quantità di detersivo fossero cumulative, cioè che si dovessero aggiungere per ottenere la quantità totale di detersivo necessaria. In realtà, le quantità di detersivo sono alternative, cioè che si deve scegliere la quantità più appropriata in base al tipo di bucato e al tipo di acqua.

D25. La seguente immagine riporta i consigli d'uso scritti sulla confezione del detersivo per lavatrice che Carlo utilizza per fare il bucato.

DOSI CONSIGLIATE				
	4-5 kg		6-8 kg	
DUREZZA DELL'ACQUA				
	SPORCO NORMALE	MOLTO SPORCO	SPORCO NORMALE	MOLTO SPORCO
DOLCE / MEDIA	115 mL	175 mL	175 mL	270 mL
DURA / MOLTO DURA	145 mL	205 mL	225 mL	320 mL

POCO SPORCO

4-5 kg TOGLIERE 20 mL dalla dose consigliata per sporco normale
6-8 kg TOGLIERE 35 mL dalla dose consigliata per sporco normale

La durezza dell'acqua di casa di Carlo è media.

a. Carlo vuole lavare in lavatrice 7 kg di bucato "Molto sporco". Quanti millilitri (mL) di detersivo deve utilizzare?
Risposta: ~~205~~ 270 mL

b. Carlo deve lavare 4 kg di bucato "poco sporco". Quanti millilitri di detersivo deve utilizzare? 95

Spiega come sei arrivato a dare le due risposte.

~~per la prima domanda ho calcolato la differenza tra 270 e 320 cioè 50. Ho diviso per due perché~~
per la prima domanda visto che Carlo usa la durezza media e i vestiti sono molto sporchi e sono 7 Kg è 270
per la seconda doverò lavare 4Kg di poco sporco la dose di sporco normale è 115 - 20Kg che vanno tolti cioè 95

Fig. 10 – L'argomentazione scritta da una studentessa per la risoluzione del quesito

Nella secondaria di I grado, in generale, gli studenti hanno risposto correttamente al primo item mentre per il secondo, vista la facilità del primo e

certi di aver compreso, si sono lasciati prendere la mano. La studentessa che ha risposto 20 ml (fig. 11) ha commesso un errore di comprensione del testo. La domanda chiede di togliere 20 ml dalla quantità di detersivo necessaria per il bucato poco sporco. La studentessa ha risposto correttamente alla prima domanda, quindi è probabile che abbia compreso il significato del testo e della tabella. Tuttavia, si è lasciata prendere la mano e ha risposto in modo sbrigativo, trascurando la parola “togliere”.

D25
 HO RISPOSTO 20^{ml} NEL PRIMO SPAZIO E NELLA SECONDA
 RISPOSTA HO MESSO ~~20~~^{20 ml} LUNGO E L'HO RISOLTO FACENDO LO
 NEL PRIMO HO GUARDATO LA TIGA DEL DETERSIVO MOLTO
 SPORCO E LA TIGA DELL'ALQUA A CASA DI CARLO ~~ROBBIANO~~
 E HO TROVATO I 270^{ml} LEGGENDO ANCHE IL COMANDO
 E NEL SECONDO HO RISPOSTO 20 ML GUARDANDO LA
 TABELLA DOVE C'ERA SCRITTO CHE PER TOGLIERE POCO SPORCO NEL
 DOSE CONSIGLIATA ~~DEVE~~^{SERVIVANO} 20 ML
 D 29

Fig. 11 – L’argomentazione di una studentessa della secondaria di I grado

3.4.3. Terzo item: Fabbisogno energetico

Proposto nelle prove di grado 5 del 2022 (fig. 12), ambito Dati e previsioni, dimensione Conoscere, richiede di ricavare informazioni da un’infografica composta da testo, dati numerici e grafici a barre. Alcune di questi dati non sono utili per dare la risposta corretta. I nostri studenti, sia della primaria sia della secondaria di primo grado (fig. 13) si sono comportati decisamente meglio rispetto al campione nazionale (tab. 4), ma non sono stati esenti da difficoltà ed errori di interpretazione.

Tab. 4 – Risultati del campione INVALSI di grado 5 2022

Item	Mancante	Errata	Corretta
D29	9,97%	63,07%	26,96%

D29. Osserva la seguente tabella che riporta i fabbisogni energetici giornalieri di uomini e donne a diverse età.



Completa il testo utilizzando le informazioni riportate nella figura.

Una donna di 80 anni ha un fabbisogno giornaliero di kcal.

Un uomo di 45 anni ha un fabbisogno giornaliero di kcal in più rispetto a un uomo di 65 anni.

Una donna di anni ha come fabbisogno giornaliero all'incirca le stesse kcal di un uomo di anni.

Dopo aver completato il testo spiega il procedimento che hai seguito.

Fig. 12 – Quesito di grado 5 del 2022

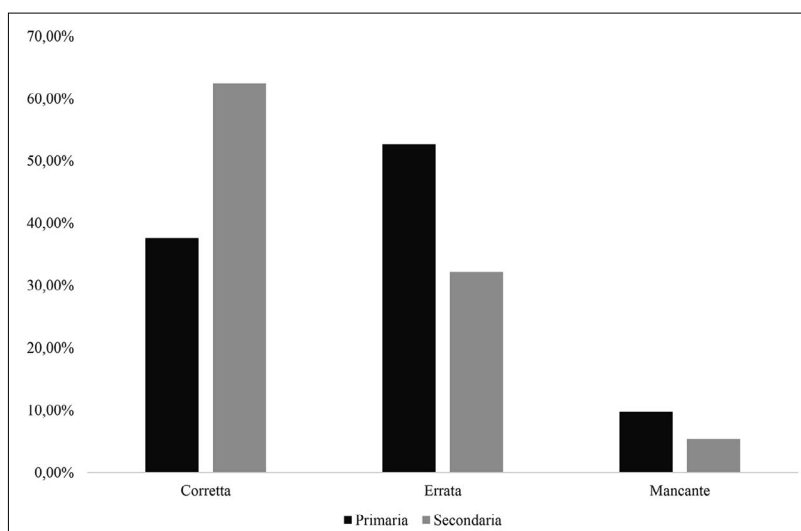


Fig. 13 – Grafici di confronto tra i due ordini di scuola del nostro campione per il quesito di grado 5

Per completare la prima affermazione è necessario individuare il dato richiesto considerando i due criteri legati al genere (donna) e all'età (80 anni). In questo caso, a parte qualche eccezione, la maggior parte degli studenti ha completato correttamente la frase e, anche durante la condivisione non sono emerse particolari difficoltà. Pietro con semplicità accompagna la risoluzione di questo problema con una chiara argomentazione scritta (fig. 14).

D29, PER PRIMA COSA HO GUARDATO LA TABELLA E ALLA DONNA DI 80 ANNI HO SCRITTO 1660, DOPO HO FATTO UNA SOTTRAZIONE $2350-2080=270$ CHE È L'UTILIZZO TRA 45 E 65 ANNI DI UN UOMO, INFINE HO GUARDATO LA SIMILITUDINE TRA L'UTILIZZO L'UTILIZZO IN Kcal DEL UOMO E DELLA DONNA ED È 45 ANNI DONNA 80 ANNI UOMO,

Fig. 14 – Argomentazione scritta di uno studente al quesito di grado 5

Per completare la seconda affermazione lo studente calcola la differenza tra i dati ricavati dalla sezione riferita all'uomo. Infine, per completare la terza affermazione, lo studente deve operare un confronto tra i dati contenuti nella sezione dell'uomo, a sinistra nella tabella, con i dati contenuti nella sezione della donna, a destra nella tabella, ricercando i due valori di *fabbisogno energetico giornaliero* tra loro più vicini; facendo molta attenzione al fatto che i due fabbisogni differiscono di sole 10 kcal.

A fronte, quindi, di un buon numero di studenti che non hanno incontrato particolari difficoltà, è vero che questo quesito è stato quello che ha scoraggiato di più gli studenti “paurosi” della Matematica. Questo è probabilmente dovuto a una serie di fattori, tra cui la complessità del quesito che richiede una serie di calcoli e la comprensione di alcune informazioni non familiari, come il fabbisogno energetico giornaliero e le calorie. La terminologia utilizzata, infatti, alcune parole utilizzate nel quesito, come “fabbisogno energetico giornaliero” e “kcal”, sono di uso non frequente e possono essere difficili da comprendere per alcuni studenti. Infine, da non trascurare il fatto che gli studenti che hanno paura della Matematica possono essere più propensi a scoraggiarsi di fronte a un quesito complesso o che utilizza terminologia non familiare.

4. Conclusioni

Al termine della risoluzione dei fascicoli e prima della successiva condivisione e discussione dei risultati, a ciascuno studente è stato chiesto di indicare quale fosse stata la difficoltà più grande nella risoluzione dei problemi. Nessuno di loro ha evidenziato difficoltà legate al ragionamento logico o al calcolo, mentre la maggior parte ha parlato di “testi lunghi o complicati”, riferendosi soprattutto, con queste espressioni, a quegli item contenenti anche grafici e tabelle: leggere, anzi, decifrare le tabelle per qualcuno è stato davvero molto impegnativo e ha determinato, talvolta, anche la rinuncia ad affrontare e risolvere il problema. In alcuni casi le parole sconosciute o poco utilizzate perché non appartenenti al loro vocabolario quotidiano, hanno contribuito a complicare ulteriormente la comprensione; in altri casi, invece, qualcuno non è riuscito a reperire nel disegno le informazioni necessarie per la risoluzione del problema e la sua presenza ha contribuito a distrarlo.

La componente linguistica, quindi, intesa cioè come comprensione di un testo scritto non è specifica dell’italiano ma è competenza trasversale: non è sufficiente leggere un testo di un problema, perché questo possa essere risolto correttamente, va compreso. La comprensione mette in gioco una quantità e varietà di conoscenze, prima fra tutte la conoscenza del significato delle parole utilizzate, il cosiddetto dizionario; la conoscenza delle “cose del mondo”, la cosiddetta conoscenza enciclopedica. I problemi espressi in forma verbale poi sono spesso densi di implicite ed è richiesto al risolutore un processo di semplificazione delle complessità.

Il nostro studio ha messo in evidenza che è sempre più necessario lavorare in classe con testi misti anche in Matematica: insegnare ai ragazzi a ricavare informazioni e dati forniti in forma testuale, tabulare, grafica, presentando sempre meno testi standard. Diventa di centrale importanza insegnare ad affrontare un problema e non a risolvere un problema: soprattutto nel primo ciclo l’insegnante fa fare attività chiamate problemi ma che in realtà sono più esercizi legati ad aspetti riproducibili che produttivi, cioè spiega come si fa a fare un esercizio e poi si limita a chiedere di rifarlo. Il valore di un problema non sta tanto nel trovarne la soluzione quanto nelle idee che fa sorgere in chi le affronta e nei tentativi messi in atto.

Altro nodo cruciale è liberarsi dall’idea negativa dell’errore. Raccogliere l’errore e non lasciarlo cadere, significa utilizzare gli errori come risorsa didattica. Né per il docente né tantomeno per il discente l’errore non deve essere visto e vissuto come un prodotto sbagliato, come una fase del prodotto bensì come una fase del processo di apprendimento.

Dedicare maggior tempo al problem posing, al problem solving e all'argomentazione abitua lo studente a lavorare in modo cooperativo, a discutere e argomentare i propri punti di vista e le varie strategie; ciò è una risorsa impagabile per la didattica della Matematica ancora però poco praticata.

Naturalmente è importante anche dedicare più tempo al problem solving e all'argomentazione, processi complessi ma indispensabili per un apprendimento strutturato. Molti problemi, infatti, non vengono proposti tanto per essere risolti, quanto per essere affrontati. Il valore di un problema non sta tanto nel trovarne la soluzione, quanto nelle idee che fa sorgere in chi lo affronta e nei tentativi messi in atto.

Gli studenti devono essere in grado di integrare le informazioni fornite dal testo con quelle reperite da altri fonti, come disegni, grafici e tabelle.

Per aiutare gli studenti a superare queste difficoltà, è possibile adottare alcune strategie. Innanzitutto, è importante fornire loro una preparazione specifica all'interpretazione di disegni, grafici e tabelle. È possibile farlo proponendo esercizi specifici o organizzando attività di laboratorio. In secondo luogo, è importante proporre problemi non standard in modo graduale, partendo da problemi semplici e aumentando gradualmente la complessità. Infine, è importante favorire la collaborazione tra gli studenti, in modo che possano aiutarsi a vicenda a comprendere i problemi.

L'aspetto su cui vale la pena riflettere è che il testo di un problema rappresenta solo una parte del quesito stesso. La comprensione del testo è un aspetto importante, ma non l'unico.

Riferimenti bibliografici

- D'Amore B., Fandiño Pinilla M.I. (2006), "Che problema i problemi!", *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, 6, 29, pp. 645-664.
- D'Amore B., Marazzani I. (2016), *Problemi e laboratori. Metodologie per l'apprendimento della matematica*, Pitagora, Bologna.
- De Mauro T. (2007), *Guida all'uso delle parole. Parlare e scrivere semplice e preciso per capire e farsi capire*, Editori Riuniti, Roma.
- Gauthier D. (2015), "Matematica: l'importanza di argomentare", *Scienze Magazine*, 4, febbraio, pp. 25-28.
- INVALSI (2018), *Quadro di riferimento delle prove INVALSI di Italiano*, testo disponibile al sito: https://invalsi-areaprove.cineca.it/docs/file/qdr_italiano.pdf, data di consultazione 4/4/2023.
- INVALSI (2018), *Quadro di riferimento delle prove INVALSI di Matematica*, testo disponibile al sito: https://invalsi-areaprove.cineca.it/docs/file/QdR_MATEMATICA.pdf, data di consultazione 4/4/2023.

- MIUR (2012), *Indicazioni nazionali per il curricolo della scuola dell'infanzia e del primo ciclo d'istruzione*, *Annali della Pubblica Istruzione*, numero speciale, Le Monnier, Firenze.
- Polya G. (1945), *How to solve it*, Princeton University Press, Princeton, 2014; trad. it. *Come risolvere i problemi di matematica. Logica ed euristica nel metodo matematico*, UTET, Torino, 2016.
- Polya G. (1962), *Mathematical discovery*, Ishi Press, Mountain View, 2009; trad. it. *La scoperta della matematica. Capire, imparare, insegnare a risolvere problemi*, vol. I, Feltrinelli, Milano, 1971.
- Russell B. (2005), *Elogio dell'ozio*, Longanesi, Milano.
- Viale M., Giberti C. (2019), "L'impatto del gap linguistico nelle performance degli allievi con cittadinanza italiana e non italiana: dai risultati delle prove INVALSI al lavoro in classe" in P. Falzetti (a cura di), *Uno sguardo sulla scuola. Il Seminario "I dati INVALSI: uno strumento per la ricerca"*, FrancoAngeli, Milano.
- Zan R. (2016), *I problemi di Matematica: difficoltà di comprensione e formulazione del testo*, Carrocci, Roma.
- Zan R., Baccaglioni-Frank A. (2017), *Avere successo in Matematica. Strategie per l'inclusione e il recupero*, UTET, Torino.

2. La lingua delle prove INVALSI di Matematica di grado 8

di Ottavio G. Rizzo

Un problema verbale, come sono le prove INVALSI di Matematica, richiede la soluzione a una domanda quantitativa a partire da dati che devono essere ricavati – direttamente o indirettamente – da un testo dato in linguaggio naturale. Questo pone un ulteriore possibile ostacolo alla comprensione, soprattutto nel caso in cui la lingua utilizzata non fosse chiara allo studente perché non calibrata sul suo livello scolastico, oppure perché l'italiano non è la lingua madre dello studente. In questo contributo analizziamo la lingua delle prove INVALSI di Matematica di grado 8, confrontandola col «vocabolario di base» della lingua italiana di 7.500 parole come definito da De Mauro. Confrontando la complessità linguistica delle prove divise per ventili di difficoltà, concludiamo che le stesse sono state progettate in modo da evitare l'uso di termini potenzialmente problematici per gli alunni, e che non è presente alcun effetto della lingua nella difficoltà della prova.

Word problems, such as INVALSI Mathematics tests, require solving a quantitative question from data that must be derived – either explicitly or implicitly – from a given text expressed in natural language. This poses a possible further obstacle to students' understanding, especially if the language used is not clear to the student: either because it is not calibrated to their school level, or because Italian is not the student's native language. In this contribution, we analyse the language of the 8th grade INVALSI math tests, comparing it with the «basic vocabulary» of the Italian language of 7,500 words as defined by De Mauro. By comparing the linguistic complexity of the tests divided into difficulty levels, we conclude that they have been designed to avoid the use of potentially problematic terms for students, and that there is no language effect on the difficulty of the test.

1. Problemi verbali

Un “problema verbale” è «un testo (tipicamente contenente informazioni quantitative) che descrive una situazione che può essere supposta familiare al lettore e che pone una domanda quantitativa la cui soluzione può essere ottenuta grazie a operazioni matematiche eseguite sui dati forniti dal testo o altrimenti dedotti» (Greer *et al.*, 2002, p. 271).

I problemi verbali costituiscono un genere letterario molto antico, caratterizzato da tre diverse componenti (occasionalmente fuse assieme): 1) l'introduzione alla storia; 2) la parte di informazione che fornisce i dati necessari alla risoluzione, e a volte anche dati spuri; 3) la domanda (Gerofsky, 1996).

I problemi verbali tendono anche a narrare storie credibili per quanto poco realistiche; sono da secoli un esercizio standard nei libri europei di Aritmetica (Swetz, 1987). Per esempio, in uno dei più antichi manuali di Aritmetica (L'arte de labbacho, 1478) possiamo leggere un problema che non sarebbe fuori luogo in un qualsiasi manuale scolastico per la secondaria di primo grado: «Uno lievero è avanti un cane, el quale il caza passa di misura 150 et in tanto chel lievero fa passa 6 el cane ne fa passa 10. Domando: quanti passa haverà fatto il cane quando zongerà al lievero?».

Per quanto i problemi verbali «siano tra i tipi più difficile di problemi che possano essere incontrati nell'apprendimento della Matematica» (Verschaffel *et al.*, 2020, p. 1), essi cercano di rendere i quesiti matematici più rilevanti per lo studente (anche se non sempre ci riescono, creando la categoria ontologica del «problema [insensato] di Matematica», vedi Zan, 2017). D'altra parte, aggiungendo uno strato di linguaggio naturale possono introdurre un ulteriore ostacolo alla comprensione del testo nel caso in cui la lingua usata non fosse sufficientemente chiara allo studente (Abedi *et al.*, 1997; Abedi e Lord, 2001).

Inoltre, se in generale «una parte delle difficoltà di apprendimento della Matematica sia di natura linguistica» (Ferrari, 2021, p. 10), nel caso specifico dei test standardizzati, essi «non possono fornire valide informazioni su conoscenze o abilità di uno studente se una barriera linguistica gli impedisce di dimostrare quello che sa e può fare» (National Research Council, 2000, citato da Martiniello, 2008, p. 334).

Il Consiglio dell'Unione Europea (2018) ribadisce in ogni caso la necessità che «le persone» – quindi a maggior ragione gli studenti – sappiano «essere in grado di svolgere un ragionamento matematico, di comprendere le prove matematiche e di comunicare in linguaggio matematico». Il linguaggio della Matematica, cioè, deve essere chiaro agli studenti.

1.1. Problemi verbali e inclusione

Questo ostacolo è particolarmente rilevante in una prospettiva d'inclusione, essendo gli studenti svantaggiati spesso non di madre lingua italiana (cresciuti o in un dialetto o in una lingua straniera); vedi Shaftel *et al.* (2006) per i risultati sugli studenti non madre lingua in scuole anglofone, o Martiniello (2008) per il caso particolare di studenti di madrelingua spagnola in scuole anglofone.

Sappiamo, per esempio, che nell'anno scolastico 2020/2021 nella secondaria di I grado il 10,8% degli alunni non aveva la cittadinanza italiana (Ministero dell'Istruzione e del Merito, 2022): è ragionevole pensare che gran parte di questi abbia appreso l'italiano come seconda lingua e che in casa usi la lingua dei genitori. Inoltre, se nel 2015 solo il 4,3% degli italiani fra 6 e 14 anni affermava di esprimersi prevalentemente in dialetto in famiglia (di cui l'1,6% anche all'esterno della cerchia familiare e amicale), ben il 24,8% degli adulti in possesso della licenza media o titoli inferiori dichiarava di usare prevalentemente il dialetto in famiglia: «Tra le persone di 25 anni e più l'uso prevalente del dialetto in famiglia e con gli amici riguarda maggiormente coloro che hanno un titolo di studio basso, anche a parità di età» (ISTAT, 2015).

1.2. Problemi verbali e prove INVALSI

Molti problemi delle prove INVALSI sono problemi verbali: nella prova 2015 di grado 8, possono essere considerati tali nove quesiti su 28 (vedi per esempio il quesito in fig. 1, che mostra chiaramente di appartenere allo stesso genere linguistico dell'esempio mostrato sopra di 537 anni prima: una sequenza di dati numerici relativi a un problema non reale ma non totalmente irrealistico, seguito dalla richiesta di determinare un valore numerico per una certa quantità relativa al problema).

Di questi 28, però, solo uno (vedi fig. 2) può essere risolto sostituendo a una totale ignoranza della lingua italiana un poco di ingegno linguistico; la maggior parte di essi (vedi un esempio tipico in fig. 3) richiede delle minime capacità linguistiche in aggiunta alla conoscenza dei termini specialistici della Matematica (volume, parallelepipedo, rettangolo ecc.).

D19. Per produrre 1 kg di carne da manzi di allevamento si utilizzano 10 000 litri di acqua. Quanti litri di acqua occorrono per produrre 1000 kg di carne?
Scrivi il risultato come potenza del 10, inserendo l'esponente corretto nel quadratino.

Risposta: 10

Fig. 1 – Item 19, prova G8 2015

D9. Qual è il risultato dell'operazione $2 + \frac{3}{100}$?

A. $\frac{5}{100}$

B. $\frac{3}{50}$

C. 2,3

D. 2,03

Fig. 2 – Item 9, prova G8 2015

D28. Il volume del parallelepipedo rettangolo si trova con la seguente formula:

$$V = a \cdot b \cdot c$$

dove a , b e c sono le misure degli spigoli.

Lo spigolo c di un parallelepipedo rettangolo misura 5 cm e il volume è 45 cm^3 .

Quale delle seguenti formule esprime la relazione tra le misure degli spigoli a e b del parallelepipedo?

- A. $a + b = 9$
- B. $a \cdot b = 9$
- C. $a + 9 = b$
- D. $a \cdot 9 = b$

Fig. 3 – Item 28, prova G8 2015

2. Il vocabolario

Esistono vari modi per studiare la chiarezza del linguaggio di un brano matematico: un modo è il cloze, ovvero rimuovere una parola ogni cinque e chiedere agli studenti del livello a cui il testo è rivolto di ricostruire il testo mancante (Hater e Kane, 1975). Un problema del cloze, però, è che viene solitamente usato per brani di media lunghezza che hanno lo scopo di spiegare qualcosa: usarlo per domande, e brevi, potrebbe dare risultati fuorvianti.

Abbiamo pertanto scelto, per questo contributo, di considerare esclusivamente il vocabolario: lo studente capisce davvero il significato di ogni parola del problema?

A differenza di altre lingue, in italiano non esiste uno standard (ufficiale o ufficioso) di quali e quante parole uno studente debba conoscere in base al suo grado scolare. Seguendo Toth (2021), abbiamo deciso di utilizzare la classificazione di De Mauro (2019, p. 157-ss.) che distingue un «vocabolario fondamentale» italiano di 2.000 lemmi, che possiamo supporre a disposizione di ogni persona in grado di parlare funzionalmente in italiano; un «vocabolario di alto uso» di 3.000 lemmi che appaiono spesso nel linguaggio scritto o parlato; un «vocabolario di alta disponibilità» di 2.500 lemmi che per quanto non compaiano frequentemente sono solitamente note ai madrelingua (l'esempio tipico è “peperone”). Seguendo De Mauro chiamiamo questi 7.500 lemmi il «vocabolario di base» dell'italiano, a cui vanno aggiunti 33.000 lemmi “comuni” (e circa 220.000 lemmi regionali, poetici, specialistici o obsoleti). La versione originale (1980) del vocabolario di base era stata filtrata «escludendo quasi un decimo delle parole di alto uso che risultavano meno comprensibili a ragazzi di terza media» (De Mauro, 2019, p. 159); per quanto l'edizione corrente non sia stata sottoposta a nessun filtraggio, riteniamo non irragionevole supporre che il vocabolario di base possa in prima approssimazione essere usato come metro per giudicare la conoscenza linguistica minima degli attuali studenti.

Toth (2021) analizza la frequenza dei lemmi del vocabolario di base e comune nelle prove INVALSI di Italiano di grado 5, 8, 10 e trova che la frequenza relativa non correla col livello di difficoltà: questo è parzialmente sorprendente, e Toth suggerisce che ulteriori indagini sul vocabolario degli studenti dovrebbero essere portate avanti per comprendere il fenomeno.

In questo contributo ci proponiamo quindi di rispondere alla domanda: diversa frequenza del grado di difficoltà delle parole usate nei test INVALSI di Matematica spiegano parte della difficoltà degli item?

3. Materiali e metodi

I dati che abbiamo usato come sorgente sono il primo e l'ultimo ventile (N=22) del *corpus* delle prove di Matematica di grado 8 relativo agli anni 2008/2017; ovvero, dopo averle ordinate per difficoltà (che qui intendiamo semplicemente come percentuale di risposte corrette), consideriamo il 5% più facile e il 5% più difficile; con ciascuno dei due insiemi che corrisponde a 22 item. Dal 2018 le prove hanno smesso di essere cartacee e – soprattutto – identiche per tutti gli alunni e questo in particolare comporta che non è più stato pubblicato il livello di difficoltà di ciascuna domanda.

I testi delle prove prese in considerazione sono prima stati scaricati da GESTINV¹, dopodiché sono stati suddivisi parola per parola e riordinati usando la shell di MacOS. Successivamente è stata necessaria una fase manuale per rimuovere i nomi propri e le non parole matematiche (per esempio, “ABCD” in “il quadrato di lato ABCD”).

Il passo successivo è consistito nel ricondurre i singoli lemmi al loro radicale: per esempio, “ciascuno” e “ciascuna” a “ciascun-”, oppure tutte le varie declinazioni di “considerare” a “consider-”. Questo è stato fatto prima in maniera automatica attraverso del codice Python e utilizzando la libreria SnowBall (Porter, 1980), e poi con un ulteriore passaggio manuale necessario, per esempio, per unificare le radici del verbo “avere”.

Infine, l'elenco di tutte le occorrenze è stato confrontato con la lista dei termini del *Vocabolario fondamentale*, del *Vocabolario di alto uso* e del *Vocabolario di alta disponibilità* di De Mauro (2019). Il confronto in alcune occasioni è stato necessariamente manuale per poter distinguere casi ambigui come il significato della radice “mess-”: ambiguità che non possono essere risolte neanche risalendo al lemma, che nel caso in questione era “messe”: occorre necessariamente leggerlo in contesto per distinguere il participio passato di “mettere” – che appartiene al vocabolario fondamentale – dal sostantivo “messa” – che appartiene al vocabolario di alto uso.

4. Risultati

In tab. 1 vediamo la distribuzione all'interno del vocabolario di base del primo e dell'ultimo ventile. Questo permette di rispondere negativamente alla domanda di ricerca: il lessico usato nei singoli item non ha alcuna relazione con la difficoltà degli stessi.

¹ <https://www.gestinv.it/Index.aspx>.

Tab. 1 – Distribuzione del vocabolario del primo e ultimo ventile di difficoltà (%)

	<i>1° ventile</i>	<i>20° ventile</i>
Risposte corrette	8-24	84-98
Vocabolario fondamentale	85	87
Vocabolario di alto uso	9	9
Vocabolario di alta disponibilità	1	1
Vocabolario di base	95	97

Notiamo infine, per confronto coi dati riportati in De Mauro (2019), che le prove INVALSI di Matematica di grado 8 si collocano, riguardo alla difficoltà linguistica, a un livello inferiore a tutte le forme di comunicazione scritte considerate (stampa, saggistica, letteratura, spettacolo, comunicazione) ma superiore al parlato.

Possiamo così concludere che le prove di Matematica, almeno per quanto riguarda il grado 8, sono state progettate con una grande cura linguistica per evitare termini che possano essere problematici per alcuni studenti.

5. Prospettive

Occorrerebbe replicare lo studio con le prove di grado 2, 5, 10 e 13: da un lato per verificare l'assenza di correlazione fra scelte lessicali e difficoltà degli item, dall'altro per verificare come – e se! – la complessità linguistica cresce col livello scolastico.

Tab. 2 – Lemmi matematici più frequenti

<i>Lemma</i>	<i>Frequenza (%)</i>	<i>Dizionario</i>
Figura	0,81	Vocabolario fondamentale
Numero	0,77	Vocabolario fondamentale
Lunghezza	0,45	Vocabolario di alto uso
Quadrato	0,37	Vocabolario di alto uso
Grafico	0,37	Vocabolario di alto uso
Più	0,33	Vocabolario fondamentale
Media	0,33	Vocabolario fondamentale
Triangolo	0,33	Vocabolario di alto uso
Due	0,24	Vocabolario fondamentale
Uguale	0,20	Vocabolario fondamentale
Circonferenza	0,20	Vocabolario comune

Un ulteriore prodotto di una simile estensione dello studio sarebbe la costruzione di un dizionario matematico minimo ancorato sui gradi scolari. Per esempio, limitandoci ai 44 item presi in esame, abbiamo che dei 423 lemmi matematici presentati da Baruk (1998) nel suo dizionario, ne compaiono 59 che rappresentano l'8,3% delle parole totali negli item. Di questi 59 lemmi, vediamo in tab. 2 gli undici che hanno una frequenza di almeno lo 0,2%.

In una prospettiva di inclusione degli studenti neo-arrivati in Italia (NAI), un tale dizionario minimo potrebbe rivelarsi estremamente utile.

Riferimenti bibliografici

- Abedi J., Lord C. (2001), "The Language Factor in Mathematics Tests", *Applied Measurement in Education*, 14 (3), pp. 219-234.
- Abedi J., Lord C., Plummer J.R. (1997), *Final Report of Language background as a variable in NAEP mathematics performance*, Technical Report No. 429, University of California, Center for the Study of Evaluation, Los Angeles.
- Baruk S. (1998), *Dizionario di matematica elementare*, Zanichelli, Bologna.
- Consiglio dell'Unione Europea (2018), *Raccomandazione del Consiglio del 22 maggio 2018 relativa le competenze chiave per l'apprendimento permanente* (2018/C 189/01).
- De Mauro T. (2019), "Il nuovo vocabolario di base della lingua italiana", in *Guida all'uso delle parole*, Laterza, Bari.
- Ferrari P.L. (2021), *Educazione matematica, lingua, linguaggi. Costruire, condividere e comunicare Matematica in classe*, UTET, Torino.
- Gerofsky S. (1996), "A linguistic and narrative view of word problems in mathematics education", *For the Learning of Mathematics*, 16 (2), pp. 36-45.
- Greer B., Verschaffel L., de Corte E. (2002), "The answer is really 4.5: beliefs about word problems", in G.C. Leder, E. Pehkonen, G. Törner (eds.), *Beliefs: A Hidden Variable in Mathematics Education?*, Springer, Dordrecht.
- Hater M.A., Kane R.B. (1975), "The Cloze Procedure as a Measure of Mathematical English", *Journal for Research in Mathematics Education*, 6 (2), pp. 121-127.
- ISTAT (2015), *L'uso della lingua italiana, dei dialetti e delle lingue straniere*, testo disponibile al sito: https://www.istat.it/it/files//2017/12/Report_Uso-italiano_dialetti_altrelingue_2015.pdf, data di consultazione 6/3/2024.
- Larte de l'abbacho* (1478), testo disponibile al sito: <http://www.centromorin.it/info/abacho/abbacho.pdf>, data di consultazione 6/3/2024.
- Martiniello M. (2008), "Language and the Performance of English-Language Learners in Math Word Problems", *Harvard Educational Review*, 78 (2), pp. 333-368, <https://doi.org/10.17763/haer.78.2.70783570r1111t32>.
- MIUR (2022), *Gli alunni con cittadinanza non italiana. A.s. 2020/2021*, testo disponibile al sito: https://www.miur.gov.it/documents/20182/0/NOTIZIARIO_Stranieri_2021+%281%29.pdf, data di consultazione 6/3/2024.

- Porter M.F. (1980), "An algorithm for suffix stripping", *Program: electronic library and information systems*, 14 (1), pp. 130-137.
- Shaftel J., Belton-Kocher E., Glasnapp D., Poggio J. (2006), "The Impact of Language Characteristics in Mathematics Test Items on the Performance of English Language Learners and Students With Disabilities", *Educational Assessment*, 11 (2), pp. 105-126.
- Swetz F.J. (1987), *Capitalism and arithmetic: The new math of the 15th century*, OpenCourt, La Salle.
- Toth Z. (2021), *Word formation in the INVALSI tests*, VI Seminar "INVALSI data: a tool for teaching and scientific research", Rome, November.
- Verschaffel L., Schukajlow S., Star J., Van Dooren W. (2020), "Word problems in mathematics education: a survey", *ZDM*, 52 (1), pp. 1-16.
- Zan R. (2017), "Il ruolo cruciale del pensiero narrativo nella comprensione dei problemi", *Didattica della Matematica. Dalla ricerca alle pratiche d'aula*, 2, pp. 45-57.

3. Focus sui concetti di variabile, parametro e incognita di alcuni quesiti INVALSI

di Giada Viola

Questa ricerca si pone come obiettivo quello di studiare la gestione dei concetti di parametro, variabile e incognita in due quesiti INVALSI di grado 10, scelti tra quelli in cui è stata registrata un'alta percentuale di risposte errate o mancanti. Lo studio consiste in un'analisi qualitativa su un campione ristretto di studenti, volta a indagare le difficoltà incontrate nella gestione di questi concetti. Per analizzare le strategie messe in atto dagli studenti è stato scelto il modello 3UV, sviluppato da Ursini e Trigueros, che permette di catalogare le azioni che essi hanno implementato.

The aim of this research is to study the management of the concepts of parameter, variable, and unknown in two grade 10 INVALSI questions, selected from those with a high percentage of incorrect or missing answers. The study consists of a qualitative analysis on a small sample of students, aimed at investigating the difficulties encountered in managing these concepts. To analyze the strategies implemented by the students, the 3UV model developed by Ursini and Trigueros has been chosen, which allows for the categorization of the actions they have taken.

1. Inquadramento teorico

L'origine di questa indagine è da ricercarsi nella volontà di comprendere e interpretare i risultati di due quesiti INVALSI di grado 10 che, a livello nazionale, hanno fatto registrare esigue percentuali di risposte corrette.

In entrambi i casi, infatti, le risposte esatte non raggiungono nemmeno la metà delle risposte totali, mentre quelle errate o non date superano il 60%. Queste percentuali danno modo di sottolineare come, a livello nazionale, gli

studenti abbiano incontrato delle difficoltà nella risoluzione dei quesiti in questione. Per selezionare i due quesiti INVALSI è stata effettuata una ricerca sul database di GESTINV¹, che contiene più di 1.400 quesiti. Per ognuno di questi, vengono riportati il testo e l'eventuale immagine della domanda, lo scopo, il riferimento alle Indicazioni nazionali, le parole chiave, le percentuali di risposta, la curva caratteristica e le informazioni tecniche sull'item.

I due quesiti INVALSI di grado 10, utilizzati in questa ricerca, sono i seguenti (GESTINV 3.0).

D12. È data l'equazione $(3k - 6)x - 5k + 2 = 0$, in cui x è l'incognita e k è un numero reale.

La soluzione dell'equazione è 0 per $k = \dots\dots$

Fig. 1 – Primo quesito

Il quesito è stato somministrato nella prova di Matematica nel grado 10 del 2012 e si colloca nell'ambito Numeri (INVALSI, 2012). I dati nazionali, che fanno riferimento a un campione statistico di circa 40.000 studenti, mostrano che la percentuale di risposte corrette è pari al 15,4%, mentre quelle errate sono del 42,3%; la percentuale di risposte non date è del 41,2%, il restante sono risposte non valide.

D22. Un parcheggio propone ai clienti tre tariffe:

- tariffa A: 15 euro per tutta la giornata (24 ore)
- tariffa B: 1 euro all'ora
- tariffa C: la prima ora gratis e 1,20 euro per ogni ora successiva.

a. Mario deve lasciare al parcheggio l'auto per 8 ore. Quale tariffa gli conviene scegliere?

Risposta: la tariffa

b. Qual è il numero h di ore di parcheggio per cui le tariffe B e C si equivalgono? Scrivi i calcoli che hai fatto per trovare la risposta e poi riporta il risultato.

.....

.....

.....

Risultato: $h = \dots\dots$ ore

Fig. 2 – Secondo quesito

¹ www.gestinv.it.

Il secondo quesito, invece, è del 2014 e si colloca nell'ambito Relazioni e funzioni. La percentuale di risposte corrette dell'item b sul campione nazionale, composto da circa 35.000 studenti, è uguale al 38,4% e quella delle risposte errate è pari al 25%, mentre la percentuale di risposte non date è del 35,2% e le risposte non valide risultano essere l'1,4%. In questa ricerca l'attenzione è stata focalizzata sul secondo punto del problema.

Lo studio dell'Algebra ricopre un ruolo fondamentale nei percorsi di apprendimento della Matematica degli studenti, ma in molti casi costituisce un ostacolo che si frappone a essi. Diversi ricercatori nel campo dell'educazione matematica hanno studiato l'apprendimento e l'insegnamento dell'Algebra, focalizzando l'attenzione sullo sviluppo di un pensiero algebrico (si vedano per esempio gli studi di Arcavi, 1994; Arzarello, 1994, 2001; Kieran, 1996). Alcune ricerche, per esempio, mostrano come molti studenti hanno difficoltà a considerare l'Algebra come uno strumento per generalizzare, creare argomentazioni e formulare dimostrazioni (Arcavi, 1994). Tali ricerche hanno portato allo sviluppo del "symbol sense", definito come un'accurata comprensione riguardo i simboli e uno sviluppo consapevole del pensiero algebrico. L'utilizzo dei simboli, che spesso coincidono con incognite, variabili e parametri, rende allo studente di difficile comprensione il significato del simbolo stesso e, di conseguenza, quello di tutto il quesito. Possiamo quindi osservare che il ruolo di variabili, incognite e parametri crea spesso ostacoli nell'apprendimento degli studenti e questo non permette loro di avere una piena padronanza degli oggetti matematici che stanno trattando. In tal senso sono state condotte alcune ricerche che hanno analizzato tale aspetto nei processi di apprendimento in diversi gradi scolastici (Küchemann, 1978; Furinghetti e Paola, 1994; Ursini e Trigueros, 2004; Capraro e Joffrion, 2006; Postelnicu e Postelnicu, 2015). I risultati di queste ricerche mostrano che gli studenti identificano i concetti di incognita e variabile e la principale differenza che riconoscono riguarda i valori che possono assumere. Dalle ricerche di Furinghetti e Paola emerge che gli studenti vedono l'incognita come il valore che deve essere trovato per risolvere l'equazione, assegnando a essa un unico valore. Al contrario, la variabile può assumere un insieme di numeri, anche infinito. Il parametro viene definito come qualcosa che varia all'interno di un intervallo o un numero fisso (Furinghetti e Paola, 1994). Inoltre, viene evidenziato che gli studenti incontrano maggiori difficoltà nella manipolazione e nell'interpretazione di parametri e nell'uso di questi per generalizzare una situazione (Ursini e Trigueros, 2004).

Nel 2001 Ursini e Trigueros hanno elaborato il modello 3UV – *Tre usi delle variabili*, con cui è possibile classificare le azioni degli studenti, in

modo da studiare l'interpretazione che essi danno a variabili, parametri e incognite e l'uso che ne fanno. In particolare, i *Tre usi delle variabili sono "incognita", "numero generico" e "variabili in una relazione funzionale"*. Come nel caso dei parametri (si veda Ursini e Trigueros, 2004), gli altri usi possono essere ricondotti a questo modello. A ognuno di questi usi corrispondono delle azioni che gli studenti dovrebbero essere in grado di compiere quando lavorano con incognite, parametri e variabili (Ursini, 2011).

L'obiettivo della sperimentazione oggetto di questo contributo è quello di studiare la capacità di utilizzare parametri, variabili e incognite nella risoluzione di quesiti INVALSI e analizzare quali difficoltà incontrano gli studenti nella gestione di questi concetti.

2. Metodologia

La sperimentazione è stata condotta in una classe prima di un liceo classico di Roma composta da 17 studenti. La ricerca è stata effettuata durante i mesi conclusivi dell'anno scolastico.

La sperimentazione è costituita da due fasi: una prima fase di risoluzione individuale dei quesiti e una seconda fase di discussione collettiva sui processi risolutivi messi in atto durante la prima fase. Durante la prima fase, gli studenti sono stati impegnati nella risoluzione dei due quesiti INVALSI (si vedano figg. 1 e 2) e di un'ulteriore richiesta, aggiunta al secondo quesito: "Rappresenta la situazione proposta nel quesito nel modo che ritieni più opportuno".

In tal modo è stato possibile analizzare la capacità di rappresentare una situazione problematica, la gestione di variabili e parametri a livello grafico e, in fase di discussione collettiva, analizzare quale grafico proposto rappresentasse al meglio la situazione.

Alla fine dell'attività è stata condotta una discussione su quanto era emerso dalle risposte ai quesiti. Le risposte raccolte in questa sperimentazione sono state analizzate con il modello 3UV, in modo da evidenziare quali azioni gli studenti sono stati in grado di attivare e quali non sono riusciti a mettere atto.

3. Risultati

Il primo quesito, seguendo la descrizione del modello 3UV, dovrebbe attivare le seguenti azioni “interpretare la variabile simbolica che appare in un’equazione come rappresentazione di valori specifici”, “sostituire alla variabile i valori che rendono corretta un’espressione” e “riconoscere e identificare in una situazione problematica ciò che è sconosciuto e che può essere trovato considerando le condizioni del problema” (Ursini, 2011). Inoltre, nel primo quesito vi è una inversione della richiesta che solitamente si trova nelle equazioni. In questo caso, infatti, gli studenti hanno già il valore dell’incognita e devono trovare il valore del parametro per cui essa è verificata. La “ x ” rappresenta l’incognita dell’equazione ma non del problema, ruolo che è ricoperto dalla “ k ”. Gli studenti, come mostrato dalla ricerca di Furinghetti e Paola (1994), hanno difficoltà a riconoscere questa inversione e a individuare l’incognita del problema. Ci aspettiamo, quindi, che molti studenti cerchino di ricondursi a una situazione nota, cercando di determinare il valore della “ x ”.

Dalle risposte degli studenti emergono le seguenti strategie:

- tentativi di trovare il valore di “ k ” attribuendo valori casuali, in modo da verificare l’uguaglianza;
- assegnare a “ k ” il valore 0 e trovare la soluzione dell’equazione;
- assegnare a “ k ” un valore casuale per determinare la soluzione dell’equazione;
- assegnare alla “ x ” il valore 0 e trovare il valore di “ k ”.

L’ultima strategia, che corrisponde a quella corretta, è stata messa in atto solo in due casi. La maggior parte degli studenti ha incontrato difficoltà nell’invertire lo scopo del problema, ovvero “trovare k sapendo x ”. In questo caso, quindi, gli studenti hanno avuto difficoltà nel riconoscere cosa sia sconosciuto nel quesito. La maggior parte di essi è stata in grado di riconoscere che il parametro “ k ” può assumere diversi valori, come si evince dalle strategie messe in atto dagli studenti. In particolare, 4 studenti hanno messo in atto la prima strategia, 5 la seconda e 6 la terza.

a) Esempio della strategia 1

$$\begin{array}{l}
 (3k-6)x - 5k + 2 = 0 \\
 3k - 6 \cdot x - 5k + 2 = 0 \\
 3k + x - 5k = 0 + 6 - 2 \\
 \frac{2kx = 8}{-2k \quad -2k} \\
 kx = -2 \\
 \begin{array}{c} \uparrow \quad \uparrow \\ (3k-6)x - 5k + 2 = 0 \\ 3 - 6 + x - 5 + 2 = 0 \\ +x = 0 - 3 + 6 + 5 - 2 \\ x = +6 \\ \frac{x}{x} \quad \frac{x}{x} \\ x = 6 \end{array}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 (3k-6)x - 5k + 2 = 0 \\
 (6-6)x - 10 + 2 = 0 \\
 0x + 10 + 2 = 0 \\
 10 = +10 - 2 + 0 \\
 0 = 8 \\
 \begin{array}{c} \uparrow \quad \uparrow \\ (3k-6)x - 5k + 2 = 0 \\ (0-6)x - 0 + 2 = 0 \\ 0x - 6x - 0 + 2 = 0 \\ -6x = 0 - 2 \\ (3 \cdot (-2) - 6)x - 5 \cdot (-2) + 2 = 0 \\ (6 - 6)x + 10 + 2 = 0 \\ -12x + 12 = 0 \\ x = +12 - 12 + 0 \\ x = 0 \\ (0-6) \cdot 0 + 5 \cdot 0 + 2 = 0 \\ 0 - 0 + 2 = 0 \\ (3k-6) \cdot 6 = 8 \end{array}
 \end{array}$$

b) Esempio della strategia 3

$$\begin{array}{l}
 3kx - 6y - 5k + 2 = 0 \\
 -5 = -6 + 3x \\
 (3 \cdot -2) - 6 - 5 \cdot (-2) = 0 \\
 -6x - 6x + 10 + 2 = \\
 +10 + 2 = +6 + 6 \\
 12 = 12x \\
 x = \frac{12}{12} = 1
 \end{array}$$

Fig. 3 – Esempi di strategie del quesito 1

Dalla figura 3a possiamo osservare che lo studente ha tentato di verificare l'uguaglianza attribuendo dei valori casuali a k , per esempio, in questo caso lo studente ha dato a k i valori di 0, 1, 2 e -2 e ha provato a verificare l'uguaglianza $x=0$. Nella figura 3b si può notare che è stato assegnato un unico valore casuale (-2) a "k" con lo scopo di risolvere l'equazione e trovare il valore di x . In questi protocolli è possibile evidenziare che gli studenti sono stati in grado di "interpretare la variabile simbolica che appare in un'equazione come rappresentazione di valori specifici", ma non di "sostituire alla variabile i valori che rendono corretta un'espressione" e "riconoscere e identificare in una situazione problematica ciò che è sconosciuto e che può essere trovato considerando le condizioni del problema". Infatti, il primo studente crede di aver trovato la soluzione (quella che ha riquadrato) ma in realtà ha commesso un errore di calcolo e non è riuscito a trovare il valore che rende vera l'uguaglianza. Il secondo, invece, ha ricondotto il quesito a qualcosa per lui già noto, ovvero, quello di determinare il valore di x . Entrambi, quindi, non sono stati in grado di individuare k come incognita del problema.

$$\begin{aligned}
 & \cancel{(3k-6)x - 5k + 2 = 0} \\
 & \cancel{3kx - 6x - 5k + 2 = 0} \\
 & \cancel{0 - 0 - 5k + 2 = 0} \\
 & \cancel{-5k = -2} \\
 & \cancel{k = \frac{2}{5}}
 \end{aligned}$$

Fig. 4 – Esempio della strategia 4 del quesito 1

In figura 4 possiamo vedere un esempio di uno studente che ha risolto correttamente il quesito, ma ha cancellato quanto fatto, probabilmente perché non sicuro del procedimento eseguito. In questo caso, tutte le azioni che abbiamo identificato con il modello 3UV per questo quesito sono state messe in atto.

Per risolvere il secondo quesito, stando al modello 3UV, uno studente dovrebbe mettere in atto le seguenti azioni «tradurre in simboli una relazione funzionale basandosi sull'analisi dei dati di un problema», «esprimere con simboli i valori sconosciuti identificati in una data situazione e usare tali

simboli per scrivere le equazioni» e «determinare il valore sconosciuto che appare in una equazione o problema realizzando le operazioni algebriche e/o aritmetiche necessarie» (Ursini, 2011).

La maggior parte degli studenti analizzati ha risposto correttamente e tra questi però solo pochi studenti sono stati in grado di generalizzare utilizzando i simboli e di creare un grafico coerente con la situazione problematica. Le strategie scelte dagli studenti possono essere riassunte in:

- sostituire dei valori casuali per verificare l’uguaglianza;
- effettuare il minimo comune multiplo tra 1,2 e 1,0;
- generalizzare la situazione.

Handwritten student work on grid paper. The text includes:

- «HO TRASFORMATO
A € E 1,2 €
- «IN AD E A CENTESIMI»
- Equation: $C = 2,6€ - (1,20€) = 8,40€$
- Equation: $m.c.m.(1,2, 1) = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 = 60 (6€)$
- Equation: $6 \text{ ORE CON TARIFFA A} = 1,2 \cdot 6 = 6€$ (with 6€ circled)
- Equation: $6 \text{ ORE CON TARIFFA B} = 1,2 \cdot 6 - (1,2) = 7,2 - 1,2 = 6€$ (with 6€ circled)

Fig. 5 – Esempio della strategia 2 del quesito 2

Dalla figura 5 possiamo vedere che lo studente ha effettuato il minimo comune multiplo tra 1,2 e 1,0, trattandoli, inizialmente, come 12 e 10. In questo caso lo studente ha messo in atto la seguente azione «determinare il valore sconosciuto che appare in una equazione o problema realizzando le operazioni algebriche e/o aritmetiche necessarie» (Ursini, 2011). In questo protocollo non emerge nessun tentativo di generalizzazione o di traduzione in simboli da parte dello studente.

Handwritten student work showing an incorrect symbolic translation of a problem:

$$th = (1,20)h - 1$$

Fig. 6 – Esempio della strategia 3 del quesito 2

In figura 6 è possibile vedere che lo studente ha provato a tradurre in simboli la relazione proposta, ha commesso un errore nella traduzione, ma è possibile notare un tentativo di applicare le seguenti azioni: “tradurre in simboli una relazione funzionale basandosi sull’analisi dei dati di un problema”, “esprimere con simboli i valori sconosciuti identificati in una data situazione

e usare tali simboli per scrivere le equazioni?”. Questa strategia è stata scelta da 4 studenti, la maggior parte sembra che abbia evitato il problema della generalizzazione, andando direttamente a effettuare dei calcoli numerici, come accade, per esempio, nel protocollo mostrato in figura 5, o nel caso della prima strategia. In particolare, la strategia corretta è stata scelta da 4 studenti, la prima strategia da 4 studenti e 9 studenti hanno messo in atto la seconda. Coloro che hanno tradotto in simboli la situazione, però, sono coloro che sono stati in grado di produrre una rappresentazione grafica che vede come oggetto l’intersezione di due rette, come è possibile vedere nella figura 7.

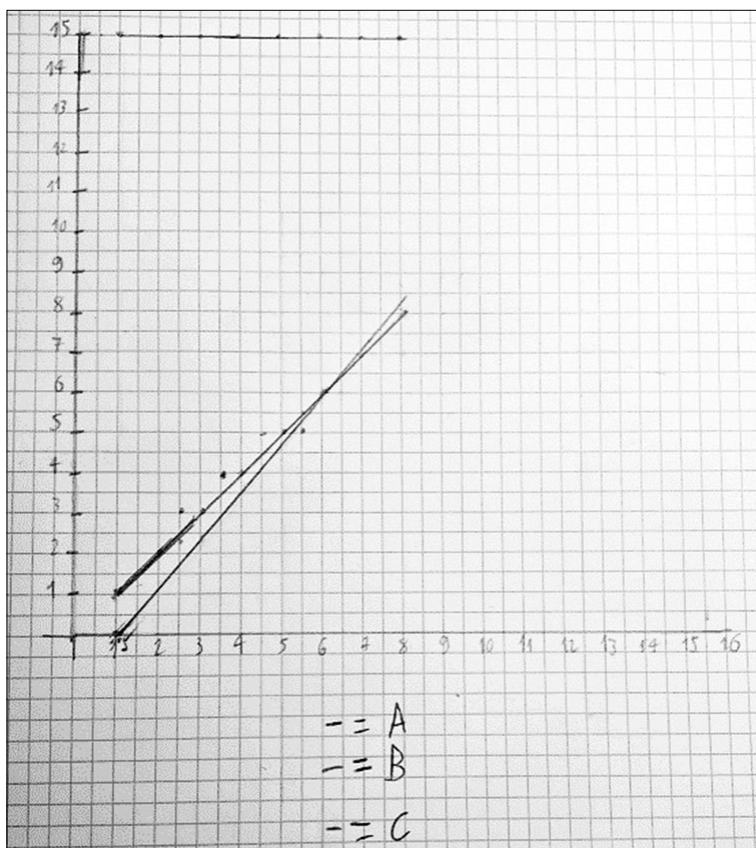


Fig. 7 – Esempio di rappresentazione grafica del quesito 2

13 studenti hanno scelto un altro tipo di rappresentazione grafica, per esempio grafici a torta o grafici a barre, come si può osservare nella figura 8.

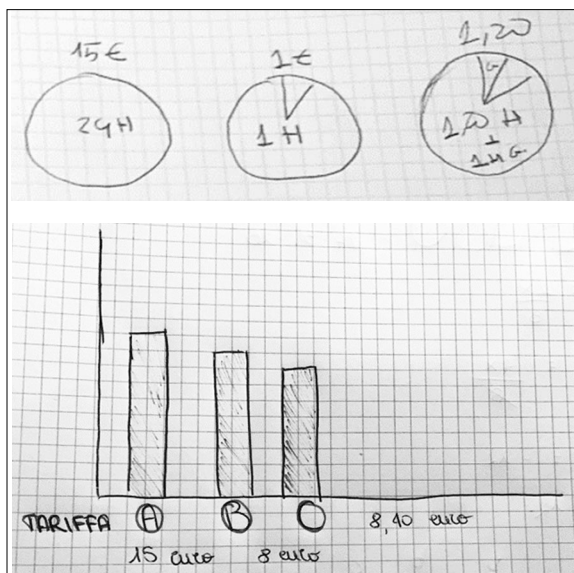


Fig. 8 – Esempi di rappresentazioni grafiche del secondo quesito

Questo tipo di rappresentazioni non aiuta a visualizzare l'andamento delle due offerte nel tempo e a evidenziare il punto in cui le due offerte si equivalgono.

4. Conclusione

Utilizzando il modello 3UV è stato possibile inquadrare le azioni degli studenti e osservare con maggiore attenzione le difficoltà incontrate durante il processo di risoluzione dei quesiti. Dai risultati di questa analisi emerge che le criticità incontrate dagli studenti riguardano principalmente la capacità di formalizzare il percorso di un problema attraverso modelli algebrici e grafici e padroneggiare l'uso della lettera come mero simbolo e come variabile.

La maggior parte degli studenti non è stata in grado di «riconoscere e identificare in una situazione problematica ciò che è sconosciuto e che può essere trovato considerando le condizioni del problema» (Ursini, 2011). La maggiore difficoltà incontrata, quindi, è stata quella di capire che il parametro assume un determinato valore sotto le condizioni dettate dal problema. I risultati di questa ricerca confermano quanto riportato dalla ricerca di Furinghetti e Paola (1994): gli studenti, infatti, non riescono a riconoscere l'incognita del problema e, la maggior parte di essi, cerca di ricondursi a qualcosa di noto e a trovare il valore dell'incognita dell'equazione.

Dai risultati di questo studio, inoltre, si può notare che coloro che sono riusciti a «tradurre in simboli una relazione funzionale basandosi sull'analisi dei dati di un problema», «esprimere con simboli i valori sconosciuti identificati in una data situazione e usare tali simboli per scrivere le equazioni» (Ursini, 2011), sono quelli che sono stati anche in grado di fornire una rappresentazione grafica che facesse emergere il punto di incontro tra le due offerte. In questo caso, è stato possibile osservare una buona gestione sia del registro algebrico sia di quello grafico e la trasformazione da un registro all'altro.

Riferimenti bibliografici

- Arcavi A. (1994), "Symbol sense: Informal sense-making in formal mathematics", *For the learning of Mathematics*, 14 (3), pp. 24-35.
- Arzarello F., Bazzini L., Chiappini G. (1994), *L'algebra come strumento di pensiero*, Pavia, Università di Pavia.
- Arzarello F., Bazzini L., Chiappini G. (2001), "A model for analysing algebraic processes of thinking", in R. Sutherland, T. Rojano, A. Bell, R. Lins (eds.), *Perspectives on school algebra*, Kluwer, Dordrecht, pp. 61-82.
- Capraro M.M., Joffrion H. (2006), "Algebraic equations: Can middle-school students meaningfully translate from words to mathematical symbols?", *Reading Psychology*, 27 (2-3), pp. 147-164.
- Furinghetti F., Paola D. (1994), "Parameters, unknowns and variables: a little difference", *Proceedings of the 18th International Conference of the Psychology of Mathematics Education*, 2, pp. 368-375.
- GESTINV, *Archivio interattivo delle prove INVALSI*, testo disponibile al sito: <http://www.gestinv.it>, data di consultazione 4/4/2023.
- Kieran C. (1996), "The changing face of school algebra", in C. Alsina, J. Alvarez, B. Hodgson, C. Laborde, A. Pérez, *8th International Congress On Mathematical Education: Selected Lectures*, Sociedad Andaluza de Educación Matemática "Thales", Sevilla, pp. 271-290.
- Küchemann D. (1978), "Children's understanding of numerical variables", *Mathematics in School*, 7 (4), pp. 23-26.
- Postelnicu V., Postelnicu F. (2015), "College students' understanding of parameters in algebra", in K. Krainer, N. Vondrová (eds.), *Proceedings of the Ninth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME9, 4-8 February 2015)*, Charles University in Prague, Faculty of Education and ERME, Prague, pp. 453-459.
- Ursini S., Trigueros M. (2004), "How Do High School Students Interpret Parameters in Algebra?", in M.J. Høines, A.B. Fuglestad (eds.), *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Bergen, Norway, vol. 4, pp. 361-368.
- Ursini S. (2011), "Il Modello 3UV: uno strumento teorico a disposizione degli insegnanti di matematica", *Quaderni CIRD*, 2, pp. 59-70.

4. Gli errori in Matematica: un confronto tra i cicli TIMSS 2015 e TIMSS 2019 nella scuola secondaria di I grado

di Francesco Annunziata

Per poter migliorare l'insegnamento e l'apprendimento della Matematica, l'analisi degli errori commessi dagli studenti si rileva di grande utilità e consente di offrire un insegnamento mirato alle esigenze dello studente. In questo studio è stata condotta un'analisi di tipo qualitativo dei risultati degli studenti italiani dell'ottavo grado alla prova cognitiva di Matematica dell'indagine internazionale TIMSS (*Trends in International Mathematics and Science Study*) 2015 e 2019. In entrambi i cicli, gli studenti italiani della terza secondaria di primo grado ottengono risultati peggiori in Algebra mentre in Geometria il loro rendimento è sopra la media della scala complessiva di Matematica. Per cercare di approfondire le tipologie di errori commessi, sono state analizzate le risposte degli studenti a due item di Geometria e due di Algebra, tutti rilasciati e a risposta aperta che presentavano una percentuale di risposte errate superiore al 50%. Gli item presi in considerazione erano presenti nei due cicli TIMSS. Lo studio che viene presentato in questo contributo è di tipo qualitativo. Le risposte errate sono state poi classificate in categorie concettuali e suddivise in base alla tipologia di errore. Questo studio ha rivelato la presenza di tipologie di errore ricorrenti che consentono di avere informazioni utili sul processo messo in atto dagli studenti e fornisce indicazioni per il miglioramento della didattica della Matematica.

In order to improve the teaching and learning of mathematics, analysis of students' errors is of great benefit and provides an instruction that is targeted to the student's needs. In this study, a qualitative analysis of the results of Italian 8th grade students on the mathematics cognitive test of the TIMSS (Trends in International Mathematics and Science Study) 2015 and 2019 international survey was conducted. In both cycles, Italian eighth-grade students perform worse in Algebra while in geometry their performance is

above average on the overall mathematics scale. By means of a qualitative study of the results, in this contribution students' answers to two open-ended items in Geometry and two in Algebra with a percentage of incorrect answers higher than 50%, present in the two TIMSS cycles, were analysed to try to investigate the types of errors committed. The incorrect answers were then classified into conceptual categories and subdivided according to the type of error. This study revealed the presence of recurring error types that provide useful information on the process implemented by the students and provide indications for the improvement of mathematics teaching.

1. Introduzione

L'importanza di migliorare le competenze in Matematica dei giovani è sempre più evidente, come dimostra il crescente interesse dei decisori politici nel valutare il livello di preparazione degli studenti, attraverso le informazioni fornite sia da indagini nazionali sia da indagini internazionali. I risultati degli studenti italiani nelle indagini internazionali IEA e OCSE evidenziano un rendimento intorno alla media in Matematica durante la scuola primaria, rendimento che tende a peggiorare con il progredire dei gradi scolastici. Un modo per cercare di migliorare il rendimento in Matematica è attraverso l'analisi degli errori commessi dallo studente, per cercare di comprendere il processo di pensiero sottostante l'errore. Secondo Popper (1972) quando si affrontano tematiche complesse anche gli errori portano allo sviluppo della conoscenza: se da un lato gli errori non sono sempre evitabili, è proprio dalle teorie più azzardate, comprese quelle erronee, che possiamo imparare di più. Analogamente, nel contesto scolastico, un insegnante può basarsi sulla tipologia di errore dello studente per offrire un insegnamento mirato. In particolare, grazie all'individuazione delle convinzioni errate degli studenti, l'insegnante ha la possibilità di proporre un'istruzione incentrata sulle esigenze dello studente (Cho e Win, 2020).

Russell e Masters (2009), in un articolo presentato al meeting annuale dell'AERA (American Education Research Association), evidenziano che, quando si analizzano gli errori, gli insegnanti potrebbero trascurare la comprensione concettuale degli studenti a favore di una correzione procedurale. Ketterlin-Geller e Yovanoff (2009) hanno anche notato che gli insegnanti potrebbero avere difficoltà a distinguere tra un errore "lapsus" e un errore "bug". I primi, i lapsus, sono errori casuali nella conoscenza dichiarativa o procedurale degli studenti e non sono il risultato di incomprensioni intrinseche rispetto all'argomento specifico. I bug rappresentano invece misconcezioni degli

studenti su conoscenze o abilità specifiche dell'argomento matematico che costantemente interferiscono con la dimostrazione delle loro abilità.

Analizzare gli errori commessi dagli studenti ha come obiettivo principale quello di far emergere il tipo di ragionamento effettuato che ha portato a quell'errore. L'analisi promossa da Ketterlin-Geller e Yovanoff (2009) riguardava gli errori (o "bug") che gli studenti commettono in base alla loro mancata comprensione dello stimolo o delle procedure da attuare. In particolare, gli autori propongono l'approccio della "misurazione diagnostica cognitiva" basata sui processi decisionali messi in atto dagli studenti. Tale approccio si basa su modelli cognitivi di apprendimento per determinare gli errori cognitivi persistenti degli studenti e per comprendere le pre-competenze e le conoscenze necessarie per risolvere correttamente un problema.

Le competenze matematiche sono inoltre strettamente correlate alla capacità di risolvere determinati compiti matematici e di capire e comprendere il motivo dell'utilizzo di alcune nozioni e processi per risolverli, così come la capacità di argomentare la convenienza del loro utilizzo (Martinez *et al.*, 2018; Llinares, 2003). Per esempio, risolvere le equazioni significa non solo memorizzare un insieme di regole, ma anche imparare a risolverle. Se gli studenti comprendono unicamente un metodo algoritmico per risolvere le equazioni, avranno difficoltà quando, nel corso della loro crescita matematica, incontreranno equazioni in forme diverse (Capraro e Joffrion, 2006). A sostegno di questa teoria, secondo Perso (1996) gli studenti che tendono a risolvere le equazioni esclusivamente attraverso regole memorizzate possono avere idee sbagliate sulla risoluzione delle stesse.

Rosnick (1981) sostiene che la principale difficoltà che incontrano gli studenti è quella di modellare le equazioni a partire da una situazione problematica. Passare da affermazioni di tipo verbale a equazioni di tipo simbolico causa agli studenti di tutte le età una grande confusione.

Le ricerche di Nathan e Koedinger (2000) evidenziano infatti la difficoltà percepita dei quesiti presentati in forma simbolica (frasi numeriche) e di quelli presentati in forma verbale (problemi narrativi), così come dei quesiti di entrambe le tipologie che prevedevano soluzioni non conosciute (principalmente aritmetiche) o non conosciute all'inizio (principalmente algebriche). Gli studenti tendono infatti a utilizzare determinate procedure algebriche senza considerare il motivo per cui le regole e le procedure sono efficaci. Questi studenti si soffermano sul procedimento di calcolo piuttosto che su quello concettuale (Thompson *et al.*, 1994). Gli studenti hanno bisogno di sviluppare entrambi le competenze, sia quelle concettuali (di comprensione) sia quelle procedurali (di vocabolario) per poter comprendere l'Algebra (Capraro e Joffrion, 2006). Le scuole medie rivestono un ruolo cruciale in

quanto è in questa fase del percorso scolastico che le equazioni, le relazioni algebriche e il corrispondente vocabolario rientrano nei programmi scolastici e, per gli studenti, comprendere questi concetti è fondamentale per il successo futuro (Blachowicz e Ogle, 2001).

Questi studi evidenziano che l'inclinazione alle misconcezioni può essere legata ad approcci di tipo prevalentemente procedurale o operativo. D'altra parte, le formule, quali enunciati algebrici che rafforzano l'interazione tra procedurale e concettuale (relazionale), rappresentano un mezzo efficace per trasferire il significato ai simboli (Ferrara e Pozio, 2022).

Esistono ragioni per le quali gli studenti hanno delle concezioni errate in Geometria, come per esempio l'affidamento alle caratteristiche fisiche delle figure, l'incapacità di abbinare le proprietà geometriche tra di loro, il ricorso a una teoria eccessivamente generalizzante e l'apprendimento a memoria (Ozrem, 2012). Nello studio di Cho e Win (2020), è emerso che le cause principali degli errori in Geometria sono dovute al fatto che gli studenti svolgono esercizi routinari, caratterizzati prevalentemente da uno studio mnemonico, e in questo modo non applicano le capacità di pensiero e di ragionamento. Clements e Battista (1992) individuano le ragioni degli errori degli studenti sui concetti geometrici come «gli studenti non comprendono sufficientemente gli argomenti, generalizzano eccessivamente le regole specifiche delle espressioni geometriche, imparano per lo più a memoria e non riescono a comprendere esattamente i concetti» (citati in Biber *et al.*, 2013, p. 51). Secondo alcuni studi le difficoltà degli studenti ricadono principalmente nell'imparare a memoria quando non riescono a cogliere la logica delle situazioni relative alle proprietà geometriche (Biber *et al.*, 2013). Nel contesto geometrico diversi studi trattano le difficoltà incontrate nell'applicare il tema degli angoli alla Geometria solida (Kopelman, 1996), altri invece approfondiscono le difficoltà riscontrate nelle definizioni relative alle misure degli angoli (Matos, 1994). Infine, nel contesto dell'insegnamento e dell'apprendimento delle misure, è interessante notare la confusione tra area e perimetro, soprattutto per i rettangoli, che indica una debolezza nella comprensione di entrambe le formule (Smith e Barrett, 2017). La comprensione concettuale della Matematica si basa quindi sulla consapevolezza delle idee e delle definizioni generali che collegano i costrutti matematici (Ashlock, 2001).

Gli studiosi di didattica della Matematica hanno fatto progressi significativi nel comprendere l'equilibrio tra conoscenze procedurali e concettuali in classe, ma sono giunti a conclusioni contrastanti sul loro rapporto. Per molti di loro è chiaro che sono necessarie entrambe ed è fondamentale integrare i due tipi di conoscenza per migliorare la comprensione degli studenti. Così come lo sviluppo del vocabolario è necessario per la comprensione della

lettura, il procedimento matematico e il vocabolario sono necessari alla comprensione concettuale della Matematica (Capraro e Joffrion, 2006).

Nell'ambito delle indagini su larga scala, le risposte fornite dagli studenti alle domande a risposta aperta si rivelano particolarmente utili per studiare il processo sotteso alla comprensione di un problema matematico, perché sollecitano l'abilità di auto-spiegazione, a differenza di quelle a risposta chiusa, che puntano maggiormente sulla memoria e sulle conoscenze pregresse (Asquini, 2016; Traub e Fisher, 1977).

2. TIMSS

Nel presente studio, per indagare i tipi di errori fatti dagli studenti in Matematica, sono stati utilizzati i risultati dell'indagine internazionale TIMSS (*Trends in International Mathematics and Science Study*) 2015 e 2019 relativi agli studenti di terza secondaria di I grado.

TIMSS è una ricerca internazionale promossa dalla IEA (International Association for the Evaluation of Educational Achievement)¹ che coinvolge circa 60 Paesi in tutto il mondo. Ha come obiettivo la rilevazione degli apprendimenti della Matematica e delle Scienze in studenti di quarto e ottavo anno di scolarità (corrispondenti per noi rispettivamente alla classe quarta della scuola primaria e alla classe terza della scuola secondaria di primo grado) e monitora l'implementazione dei curricoli scolastici nei Paesi partecipanti all'indagine.

Il campione è a due stadi stratificato: le unità di primo stadio sono le scuole, stratificate ed estratte con probabilità proporzionale alla loro dimensione; le unità di secondo stadio sono tutti gli studenti di una o più classi, queste ultime estratte con probabilità uguale all'interno della scuola. Il campione italiano di TIMSS è rappresentativo sia a livello nazionale sia di macro-area geografica (Nord Ovest, Nord Est, Centro, Sud, Sud Isole).

In TIMSS 2015 il campione italiano degli studenti al grado 8 era composto da 161 scuole per un totale di 4.481 studenti; il campione di TIMSS 2019 era composto da 158 scuole per un totale di 3.619 studenti. In entrambi i cicli le percentuali di maschi e femmine erano equivalenti.

Essendo un'indagine internazionale, per consentire confronti tra i Paesi partecipanti, entrambe le rilevazioni TIMSS 2015 e 2019 sono state condotte

¹ IEA è un'associazione internazionale indipendente di enti nazionali di ricerca e di agenzie governative che dal 1959 conduce studi volti a valutare il rendimento scolastico degli studenti a livello internazionale.

verso la fine dell'anno scolastico, che ha coinciso con i mesi di marzo e aprile per i Paesi dell'emisfero Nord; per i Paesi dell'emisfero Sud, invece, le somministrazioni si sono svolte nel periodo tra ottobre e novembre dell'anno precedente.

Per ogni livello di scolarità, il Quadro di riferimento di Matematica (Mullis e Martin, 2013) è articolato in due dimensioni: una dimensione di contenuto in cui si specificano i domini o gli argomenti matematici (Numero, Algebra, Geometria, Dati e probabilità per l'ottavo anno di scolarità) e una dimensione cognitiva in cui vengono presentati i domini cognitivi o i processi di pensiero (Conoscenza, Applicazione e Ragionamento). Il 60% della prova cognitiva presenta domande di Numero e Algebra, l'altro 40% domande di Geometria e di Dati e probabilità (20% ciascuna). Ogni dominio di contenuto è composto da diverse aree tematiche, ognuna delle quali, a sua volta, comprende diversi argomenti:

- Numero: numeri interi, frazioni e numeri decimali, rapporti, proporzioni e percentuali;
- Algebra: espressioni, operazioni ed equazioni, relazioni e funzioni;
- Geometria: forme geometriche, misure geometriche, posizione e movimento;
- Dati e probabilità: caratteristiche degli insiemi di dati, interpretazione dei dati e probabilità.

Le prove cognitive non si differenziano solo per il tipo di contenuto, ma anche per il tipo di processo cognitivo che ci si aspetta gli studenti mettano in atto ogni qualvolta essi lavorino con la Matematica. Il dominio di Conoscenza si riferisce ai fatti, ai concetti e alle procedure che gli studenti dovrebbero conoscere; il dominio di Applicazione riguarda la capacità degli studenti di applicare nozioni e apprendimenti; infine, il dominio di Ragionamento va oltre la risoluzione di problemi di routine per includere situazioni non familiari, contesti complessi e problemi che richiedono una soluzione in più fasi.

Le tabelle seguenti illustrano la percentuale di quesiti relativa a ciascun dominio.

Tab. 1 – Numero di quesiti relativi a ciascun dominio di contenuto in TIMSS G8 Matematica 2015-2019

	2015		2019		2015		2019	
	Numero totale di domande				Domande a risposta aperta			
Dominio di contenuto	N	N	N	%	N	%	N	%
Numero	64	64	35	54,7	33	51,6		
Algebra	61	62	27	44,3	29	46,8		
Geometria	43	43	21	48,8	26	60,5		
Dati e probabilità	41	42	14	34,1	19	45,2		

Tab. 2 – Numero di quesiti relativi a ciascun dominio cognitivo in TIMSS G8 Matematica 2015-2019

	2015		2019		2015		2019	
	Numero totale di domande				Domande a risposta aperta			
Dominio cognitivo	N	N	N	%	N	%	N	%
Conoscenza	69	65	19	27,5	19	29,2		
Applicazione	94	97	47	50,0	53	54,6		
Ragionamento	46	49	31	67,4	35	71,4		

TIMSS si basa sulla costruzione di prove curricolari: seppure vi siano molteplici diversità tra i Paesi che partecipano alle indagini IEA in termini di sviluppo economico, posizione geografica e dimensione della popolazione, nonché di organizzazione del sistema scolastico, la base concettuale di TIMSS è un quadro teorico di riferimento condiviso da tutti i Paesi partecipanti al progetto.

Per evitare che ciascuno studente risponda a tutti i quesiti e garantire che la durata della prova sia sostenibile per gli studenti in TIMSS viene utilizzato un campionamento a matrice che comporta la suddivisione di tutto l'insieme dei quesiti di Matematica e di Scienze, in una serie di fascicoli cognitivi. Ogni studente compila soltanto un fascicolo per una durata complessiva della prova di 90 minuti (45 minuti per le prove di Matematica e 45 minuti per le prove di Scienze). Vengono poi utilizzate tecniche di scaling dell'*Item Response Theory* che forniscono una rappresentazione complessiva del rendimento dell'intera popolazione studentesca, combinando le risposte dei singoli studenti ai fascicoli loro assegnati.

Obiettivo di questo studio di approfondimento è stato quello di effettuare un'analisi qualitativa dei risultati delle prove cognitive di Matematica TIMSS 2015 e TIMSS 2019 somministrate agli studenti italiani di terza se-

condaria di I grado. Se da un lato le analisi quantitative già presenti nei rapporti nazionali TIMSS 2015 e TIMSS 2019 forniscono un quadro generale dell'apprendimento degli studenti italiani, dall'altro l'analisi qualitativa ha permesso di esplorare e far emergere le risposte fornite dagli studenti, sottolineando caratteristiche diverse da quelle trattate fino a oggi.

3. Una breve sintesi dei risultati di Matematica degli studenti italiani in TIMSS 2015 e TIMSS 2019 al grado 8

I risultati di TIMSS offrono diversi spunti di riflessione e possono essere letti da diverse prospettive: è possibile confrontare gli apprendimenti degli studenti in funzione dei differenti sistemi scolastici dei diversi Paesi e individuare, a livello comparativo, punti di forza e di debolezza dei rispettivi sistemi educativi per migliorare l'insegnamento e l'apprendimento della Matematica e delle Scienze. TIMSS 2019 ha segnato l'inizio del passaggio a un sistema di somministrazione computerizzata. Più della metà dei Paesi, tra cui l'Italia, ha infatti utilizzato il formato elettronico (indicato con la lettera "e" davanti), mentre gli altri Paesi hanno continuato con la somministrazione cartacea. I Paesi "e" (eTIMSS) hanno anche somministrato una parte delle prove in cartaceo per creare un "ponte" tra TIMSS 2015 e TIMSS 2019. Nel 2015, l'Italia ottiene un punteggio medio di 494, nel 2019 un punteggio medio pari a 497, entrambi lievemente ma significativamente inferiori alla media internazionale (500). In TIMSS 2019 l'Italia mantiene il notevole miglioramento già riscontrato in TIMSS 2011 rispetto ai dati del 2007. A livello di macro-area geografica, nel 2015 il Nord Est spicca in positivo con un punteggio medio di 520 (significativamente superiore alla media nazionale di 494), nel 2019 invece, spicca in positivo il Nord Ovest con un punteggio medio di 517 (significativamente superiore alla media nazionale di 497). Al contrario il Sud Isole registra il punteggio più basso, e significativamente inferiore alla media dell'Italia, sia nel 2015 sia nel 2019, con un punteggio medio rispettivamente di 452 e 469.

Per quanto riguarda le differenze di genere in TIMSS 2015, in Italia i maschi ottengono punteggi statisticamente migliori delle femmine (498 vs 491), una situazione questa confermata anche nel 2019 dove le differenze di genere nella scala totale di Matematica sono a favore dei maschi (504 vs 491). I dati disaggregati di TIMSS 2015 per macro-area geografica evidenziano differenze statisticamente significative solo nel Sud (490 maschi vs 478 femmine); nel 2019 i maschi superano le femmine nel Nord Est (15 punti); Centro e Sud (17 punti). Nel Nord Ovest e nel Sud Isole, invece, non sono emerse differenze significative.

Infine, in entrambi i cicli, i risultati italiani hanno messo in evidenza una carenza degli studenti in Algebra mentre Geometria è risultata un punto di forza, a differenza invece dei domini Numero e Dati e probabilità che non si sono discostati significativamente dalla scala principale (per una descrizione dettagliata dei risultati italiani, si vedano Palmerio e Caponera, 2016; Palmerio e Caponera, 2021).

4. Metodo

Il presente studio si inserisce nel filone di ricerche volte a studiare le risposte degli studenti italiani a indagini su larga scala (e.g. Bassani, Fioravanti, Pelillo e Pozio, 2012; Bolondi, Ferretti e Spagnolo, 2021; Ferretti, Lemmo e Maffia, 2016; Pozio, 2011, 2013) e indaga i tipi di errori fatti dagli studenti in Matematica, attraverso un'analisi qualitativa delle risposte aperte date dagli studenti italiani dell'ottavo grado nelle rilevazioni TIMSS 2015 e TIMSS 2019.

A partire dai risultati TIMSS 2015 e TIMSS 2019, l'analisi qualitativa delle risposte errate è stata effettuata partendo dalla lettura delle risposte ad alcune domande aperte date dagli studenti campionati, che sono state corrette da un team di codificatori esperti in Matematica e sono state classificate come "risposte errate".

In base alle definizioni del Quadro di riferimento TIMSS (Mullis e Martin, 2013), per rispondere correttamente alle domande dell'indagine, lo studente non solo deve conoscere i contenuti della Matematica oggetto dell'indagine, ma deve anche dimostrare una serie di abilità cognitive.

In questo lavoro, si è deciso di limitare l'attenzione alle sole domande rilasciate, somministrate nello studio principale TIMSS 2019, ovvero quelle che sono state pubblicate e non riutilizzate nei cicli successivi.

Successivamente, per meglio comprendere le strategie di risoluzione alla base delle risposte degli studenti e definire con più precisione le possibili ragioni degli errori, si è deciso di analizzare quattro domande a risposta aperta relative ai domini cognitivi di ragionamento e di applicazione, che registravano una percentuale elevata di errori.

Durante la fase di analisi, la lettura delle singole risposte degli studenti per ciascun item selezionato ha permesso di esplorare e sviluppare nuove categorie concettuali in base al tipo di errore. In questo processo, l'obiettivo è stato quello di identificare e organizzare tutte le risposte fornite dagli studenti per esplorare, in dettaglio, il tipo di errore commesso dagli studenti per ogni singolo item.

5. Risultati

5.1. Analisi degli errori

L'analisi preliminare di questo lavoro è stata quella di verificare la situazione generale delle risposte degli studenti alle domande che richiedevano una risposta aperta, cercando così di capire la percentuale di risposte corrette date per ogni singolo item dagli studenti che hanno partecipato all'indagine.

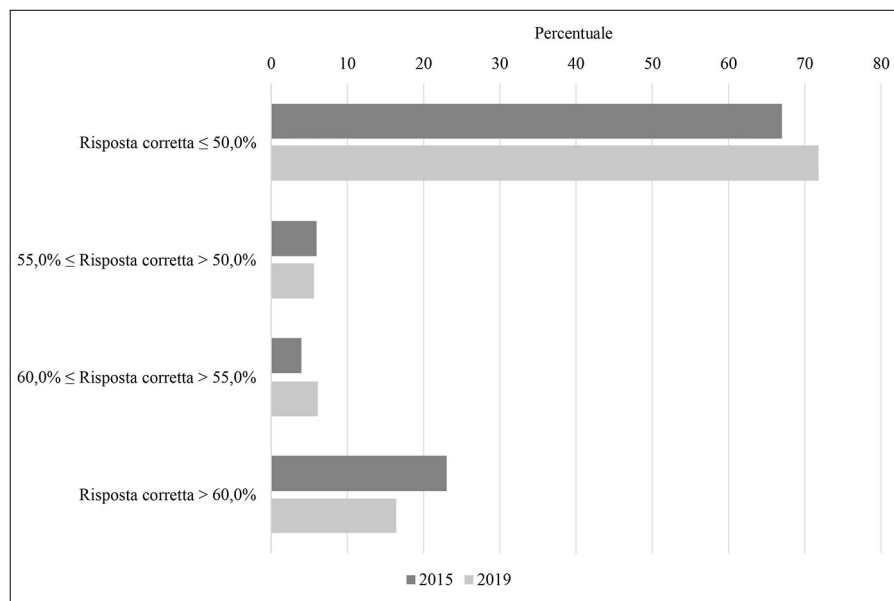


Fig. 1 – Domande a risposta aperta in TIMSS 2015-2019: percentuale di item con rispettive risposte corrette

Dal grafico si evince che nel 2015 il 23% delle domande a risposta aperta ha avuto una percentuale di risposte corrette superiore al 60%. Nel 2019 c'è stato un peggioramento: infatti solo il 16% degli item ha avuto una percentuale di risposte corrette superiore al 60%. Inoltre, nei due cicli TIMSS, più della metà degli item a risposta aperta, precisamente il 67% per il 2015 e il 72% per il 2019, hanno avuto una percentuale di risposte corrette del 50% o meno.

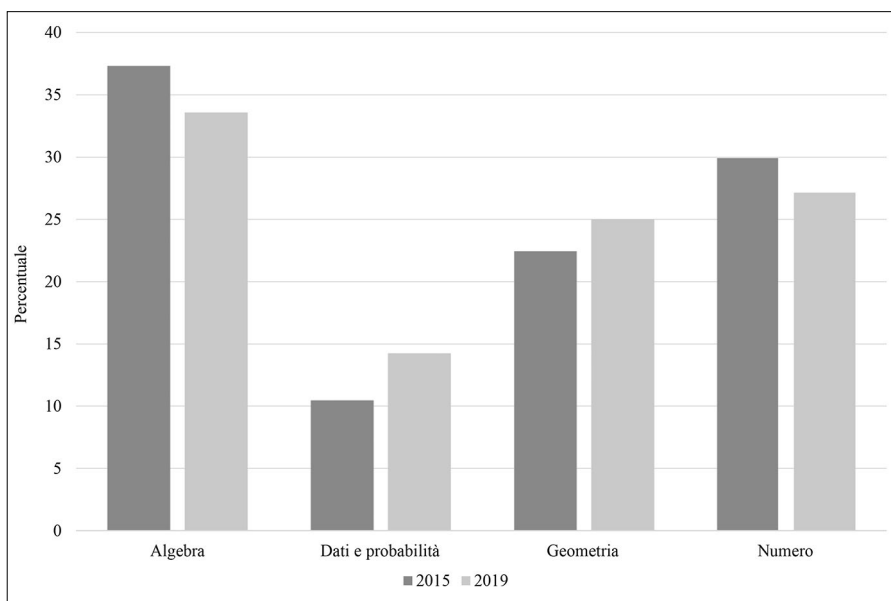
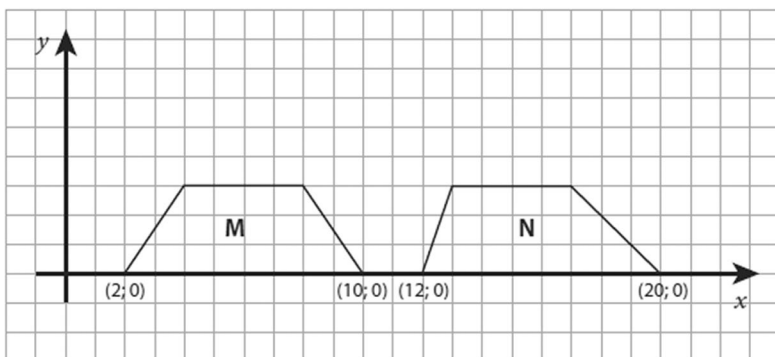


Fig. 2 – Percentuale di item con una percentuale di risposte corrette $\leq 50,0\%$ rispetto ai domini di contenuto

Nello specifico, esplorando in dettaglio solo le domande aperte che avevano una percentuale di risposte corrette inferiore o uguale al 50%, si è costruito il grafico di fig. 2 che mostra la distribuzione di questi item nei diversi domini di contenuto dei due cicli TIMSS. Nel 2015 il 37,3% delle domande erano rappresentate dal dominio di contenuto Algebra, seguito dai domini Numero (29,9%) e Geometria (22,4%). Il 10,4% riguardavano il dominio di contenuto Dati e probabilità. Nel 2019, invece, il 33,6% delle domande erano rappresentate dal dominio di contenuto Algebra, seguito dai domini Numero (27,1%), Geometria (25%) e Dati e probabilità (14,3%). Nel confronto tra i due cicli è possibile notare una riduzione degli item dal 2015 al 2019, dove emerge una percentuale di risposte corrette inferiore o uguale al 50% per i domini di contenuto di Algebra e Numero.

Dopo un'attenta lettura di tutti gli item con percentuale di risposte corrette inferiore al 50%, si è passati alla scelta delle singole domande aperte preferendo quattro item significativi riguardanti i domini di contenuto di Geometria e di Algebra (due per ogni dominio), e i domini cognitivi del Ragionamento e dell'Applicazione, con l'obiettivo di individuare gli errori comuni per ogni ciclo d'indagine e per ogni singolo item.

Due trapezi, M ed N, sono disegnati nella griglia sottostante.



Prolunga i lati non paralleli di M per formare un triangolo. Prolunga anche i lati non paralleli di N per formare un altro triangolo.

Indica le coordinate del terzo vertice di ogni triangolo.

A. Vertice del triangolo formato dalla Figura M: _____

B. Vertice del triangolo formato dalla Figura N: _____

Fig. 3 – Item rilasciato dominio di contenuto Geometria – Dominio cognitivo Applicazione

L'item relativo al dominio di contenuto Geometria e al dominio cognitivo Applicazione presenta due trapezi su una griglia. Per rispondere a questa domanda in modo corretto viene chiesto allo studente di prolungare i lati non paralleli dei trapezi per formare due triangoli e di fornire le coordinate del punto in cui le linee prolungate si intersecano e formano il terzo vertice per entrambe le figure (M e N).

Tab. 3 – Dominio di contenuto Geometria – Dominio cognitivo Applicazione – Descrittive

	2015 (%)	2019 (%)
Parzialmente corretta	14,0	14,2
Corretta	26,0	23,9
Errata	60,0	61,9

Questo item ha presentato nel 2015 il 60% di risposte errate e nel 2019 il 61,9%. Viene inoltre attribuito un punteggio parziale agli studenti che hanno risposto in modo corretto solo a una delle due parti, che rappresentano il 14% nel 2015 e il 14,2% nel 2019.

Tab. 4 – Dominio di contenuto Geometria – Dominio cognitivo Applicazione – Risposte errate

	Categorie	2015	2019		2015	2019
		(%)	(%)		(%)	(%)
Geometria Applicazione	Solo disegno	17,3	13,8	–	–	–
	Solo coordinata X	35,2	43,5	Valore X corretto	14,5	13,8
				Valore X non corretto	20,7	29,7
	Coordinate invertite	11,9	9,6	Corrette ma invertite	5,3	4,6
				Errate e invertite	6,6	5
	Altre tipologie di errore	35,5	33,05	Altre coordinate	21,1	24,7
Altro				14,5	8,4	

Per quanto riguarda la tipologia di errori, il 17,3% (2015) e il 13,8% (2019) degli studenti si limitano a disegnare i lati sulla griglia senza fornire una risposta numerica, sebbene più della metà di queste risposte riporti una rappresentazione grafica corretta.

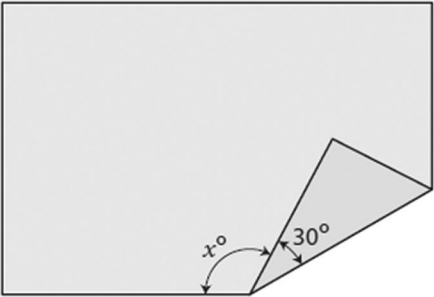
Il 35,2% nel 2015 e il 43,5% nel 2019 indicano nella risposta solo il valore della coordinata X, senza indicare la Y. Di questi il 14,5% nel 2015 e il 13,8% nel 2019 indicano il valore della X corretto.

Dalla lettura delle risposte degli studenti è emerso, inoltre, che il 12% degli studenti del 2015 e il 10% circa degli studenti del 2019 hanno rappresentato graficamente i triangoli e hanno inserito nella risposta le coordinate del terzo vertice invertendo la posizione delle X e delle Y. Circa la metà di queste risposte, in entrambi i cicli, presenta l'individuazione corretta delle coordinate ma l'indicazione della Y al posto della X (per esempio "Vertice del triangolo formato dalla figura N: 6;14"). Nell'altra metà delle risposte gli studenti individuano graficamente le coordinate errate e le inseriscono invertendo l'ordine (per esempio "Vertice del triangolo formato dalla figura N: 5;13").

Il 35,5% (2015) e il 33,05% (2019) delle risposte degli studenti presentano altre tipologie di errori. Nello specifico, il 21,1% e il 24,7% indicano come risposta valori della X e della Y errati rispetto alle coordinate corrette; il 14,5% e l'8,4% provano a dare delle risposte indicando altro, per esempio: – "triangolo equilatero, triangolo rettangolo, triangolo scaleno", riportando quindi la figura emersa prolungando i lati graficamente;

- “B ed E”, inserendo le lettere in corrispondenza di ciascun angolo dei nuovi triangoli senza indicarne le coordinate;
- indicando il valore dell’angolo dei nuovi vertici.

In questo item non risultano differenze tra maschi e femmine: nello specifico, il 48,3% (2015) e il 52,2% (2019) delle risposte errate sono state fornite dalle femmine mentre il 51,7% (2015) e il 47,8% (2019) dai maschi.



Un pezzo di carta rettangolare viene piegato in un angolo, come mostrato qui sopra. Qual è il valore di x ?

Risposta: _____

Fig. 4 – Item rilasciato dominio di contenuto Geometria – Dominio cognitivo Ragionamento

In quest’altra domanda del dominio di contenuto Geometria e del dominio cognitivo Ragionamento, si chiede agli studenti di indicare il valore dell’angolo x° rappresentato graficamente. La risposta corretta è $x=120^\circ$.

Tab. 5 – Dominio di contenuto Geometria – Dominio cognitivo Ragionamento – Descrittive

	2015 (%)	2019 (%)
Corretta	34,9	31,1
Errata	65,1	68,9

Questo item ha presentato nel 2015 il 65,1% di risposte errate e nel 2019 il 68,9%.

Tab. 6 – Dominio di contenuto Geometria – Dominio cognitivo Ragionamento – Risposte errate

	Tipi di errore	2015 (%)	2019 (%)
Geometria Ragionamento	$x = 150^\circ$	32,0	35,9
	$x = 60^\circ$	17,1	12,9
	$x = 90^\circ$	7,2	7,4
	$x > 90^\circ$ (esclusi valori uguali a 150°)	25,6	30,7
	$x < 90^\circ$ (esclusi valori uguali a 60°)	15,7	12,1
	Altri tipi di errore	2,4	1,0

In particolare, si rileva che tra le categorie di risposte sbagliate, il 32% (2015) e il 35,9% (2019) degli studenti ha risposto $x=150^\circ$ includendo quindi anche il valore dell'angolo corrispondente al lato piegato del pezzo di carta rettangolare; il 17,1% (2015) e il 12,9% (2019) degli studenti ha risposto $x = 60^\circ$; il 7,2% ha indicato come valore della x quello di un angolo retto (90°); nel 2015 il 25,6%² ha indicato valori superiori a 90° rispetto al 30,7% nel 2019, di cui il 4% nel 2015 e il 7% circa nel 2019 ha fornito come risposta il valore dell'angolo piatto (180°); l'altro 15,7%³ ha indicato come risposta valori inferiori a 90° , di cui il 3% circa, in entrambi i cicli, ha fornito come risposta il valore dell'angolo corrispondente al foglio piegato (30°). Infine, il 2,4% nel 2015 e l'1% nel 2019 provano a dare delle risposte indicando altro.

In questo item non risultano differenze tra maschi e femmine: nello specifico, il 52,5% (2015) e il 54% (2019) delle risposte errate sono state fornite dalle femmine e il 47,5% (2015) e il 46% (2019) dai maschi.

Rocco acquista telefoni cellulari a x zed ciascuno e li rivende per ricavarne un guadagno. Stabilisce il prezzo di vendita per ogni telefono, y zed, raddoppiando il prezzo che ha pagato e sottraendo 3 zed.

Scrivi un'equazione che mostra y in funzione di x .

Equazione: _____

Fig. 5 – Item rilasciato dominio di contenuto Algebra – Dominio cognitivo Applicazione

² Sono esclusi dal conteggio i valori $x=150^\circ$.

³ Sono esclusi dal conteggio i valori $x=60^\circ$.

Nella domanda di Algebra-Applicazione individuata si chiede agli studenti di scrivere un'equazione che mostra y in funzione di x . Per rispondere correttamente a questa domanda è richiesto quindi agli studenti di considerare nell'equazione le informazioni presenti nello stimolo, ovvero raddoppiare il prezzo di acquisto di ciascun telefono ($2x$) e sottrarre 3 zed (-3). Vengono considerate quindi corrette le risposte che presentano l'equazione $y=2x-3$ oppure equivalenti. Vengono considerate quindi corrette le risposte che presentano l'equazione $y=2x-3$ oppure equivalenti.

Tab. 7 – Dominio di contenuto Algebra – Dominio cognitivo Applicazione – Descrittive

	2015 (%)	2019 (%)
Corretta	42,2	38,5
Errata	57,8	61,5

Questo item ha presentato nel 2015 il 57,8% di risposte errate e nel 2019 il 61,5%.


Tab. 8 – Dominio di contenuto Algebra – Dominio cognitivo Applicazione – Categoria risposte errate

	2015 (%)	2019 (%)
Sommano o sottraggono X e Y	12,9	9,0
Moltiplicano o dividono X e Y	8,4	13,8
Elevano al quadrato	7,3	6,6
Altre tipologie di errore	34,2	41,3
Utilizzano frazioni	2,8	0,6
Segni vari	5,6	9,6
Y al posto della X	28,7	19,2

La lettura delle risposte fornite dagli studenti ha permesso di individuare le seguenti categorie di errore: il 21,3% nel 2015 e il 22,8% nel 2019 degli studenti somma o sottrae (rispettivamente, 12,9% e 9%) e divide o moltiplica (8,4% e 13,8%) il valore della X alla Y, riportando per esempio nella risposta “ $Y+X-3$ ” oppure “ $X-Y-3$ ”. Il 7,3% nel 2015 e il 6,6% nel 2019 confonde il termine “raddoppiare” presente nello stimolo con l’elevamento al quadrato della x o della y ($X+Y^2-3$ oppure X^2-3); il 34,2% nel 2015 e il 41,3% nel 2019 fornisce altre tipologie di errore. Infine, 37,1% nel 2015 e il 29,4% nel 2019 degli studenti presentano errori come: utilizzo di frazioni (2,8% e 0,6%), confusione tra Y e X (28,7% e 19,2%), indicando quindi come risposta “ $x=2y-3$ ” e il 5,6 nel 2015 e il 9,6% nel 2019 degli studenti ragionano

sulla domanda, appuntano alcune informazioni presenti nello stimolo, senza fornire una risposta numerica.

Il perimetro del rettangolo qui sotto è di 20 cm. Qual è l'area del rettangolo?



$2x + 1$

Risposta: _____ cm²

Fig. 6 – Item rilasciato dominio di contenuto Algebra – Dominio cognitivo Ragionamento

L'item del dominio di contenuto Algebra e del dominio cognitivo Ragionamento presenta un rettangolo e si chiede allo studente, dato il perimetro pari a 20 cm, di calcolare l'area. Per rispondere a questa domanda è richiesto quindi agli studenti di ricavare le lunghezze dei lati del rettangolo integrando le informazioni date nel testo (perimetro 20 cm) e nella figura (misure dei lati in funzione di x) e impostare l'equazione: $(2x+1+x)X2=20$. Svolgendo questa equazione ricavano il valore della x , quindi le lunghezze dei due lati (rispettivamente, 3 cm e 7 cm) e applicano la formula per calcolare l'area del rettangolo.

Tab. 9 – Dominio di contenuto Algebra – Dominio cognitivo Ragionamento – Descrittive

	2015 (%)	2019 (%)
Parzialmente corretta	2,2	0,3
Corretta	26,8	29,3
Errata	71,0	70,4

Questo item ha presentato nel 2015 il 71% di risposte errate e nel 2019 il 70,4%.

Tab. 10 – Dominio di contenuto Algebra – Dominio cognitivo Ragionamento – Categoria risposte errate

	2015 (%)	2019 (%)
Da 1 a 50	48,2	62,4
Da 51 a 100	18,0	16,6
Oltre 100	9,4	7,8
Bianca con segni	7,6	2,3
Altro	16,9	10,9

Le risposte date a questo item sono state raggruppate in 5 classi: valori da 1 a 50; da 51 a 100; oltre 100; risposta lasciata in bianco ma presenza di segni; altre tipologie di errore. Alcuni studenti hanno scritto sul fascicolo il procedimento effettuato per dare la risposta e grazie a questi appunti è stato possibile individuare il ragionamento errato.

Nella classe “da 1 a 50” emergono come valori modali: 24, 25, 40. 25 è stato ottenuto dividendo il valore del perimetro per quattro (considerando la figura come se fosse un quadrato) e moltiplicando la base per l’altezza: $20/4=5$; $5 \times 5=25$.

Nella classe “da 51 a 100” emergono valori modali 55, 60, 80. 55 è stato ottenuto dividendo anche in questo caso il valore del perimetro per quattro (considerando la figura come se fosse un quadrato) e successivamente è stato sostituito alla x il valore ottenuto: $20/4=5$; $[2(5)+1]*5$; $11*5=55$. La categoria “oltre 100” presenta come valori modali 200, 210, 400. 400 è stato ottenuto considerando 20 come il valore di ogni singolo lato: $20*20=400$.

Infine, il 24,5% nel 2015 e il 13,2% nel 2019 delle risposte è rappresentata nel 7,6% e 2,3% delle risposte dagli studenti che ragionano sulla domanda, appuntano alcune informazioni presenti nello stimolo, senza fornire una risposta numerica (questo potrebbe rappresentare il fatto che conoscono il procedimento ma non lo applicano) e dal 16,9% e 10,9% degli studenti che forniscono altre tipologie di risposta.

6. Conclusioni

Obiettivo del presente studio è stato quello di fornire un quadro delle tipologie di errore commesse dagli studenti di terza secondaria di I grado in domande di Algebra e di Geometria dell’indagine TIMSS. I risultati dimostrano che dietro ogni singolo errore in Matematica può esserci una varietà di fattori, che possono interagire tra loro: errori concettuali, mancanza di conoscenza, come per esempio nel caso della domanda sulle coordinate di un

piano cartesiano, mancanza di attenzione nella lettura della domanda, mancanza di comprensione dello stimolo o errori attribuibili alle aspettative dello studente su come completare il compito. L'identificazione degli errori degli studenti può diventare un punto di partenza che consente di attuare strategie didattiche per superare le difficoltà degli studenti.

I dati qui analizzati derivano dai risultati degli studenti che hanno partecipato al TIMSS, un'indagine internazionale che ha come base la presentazione agli studenti di prove curricolari, dove sono presentati argomenti affrontati durante il percorso scolastico della scuola secondaria di I grado. Le difficoltà degli studenti italiani che commettono errori non sembrano attribuibili a una scarsa conoscenza dell'argomento, quanto piuttosto a una mancata consolidazione di quanto appreso che comporta errori proprio nelle fasi di applicazione e di ragionamento necessarie per arrivare a una risposta corretta.

Per quanto riguarda i due quesiti di Algebra, sembra che gli errori possano esser attribuiti a una mancata conoscenza del linguaggio astratto matematico che consenta loro di identificare correttamente la richiesta. Nei quesiti di Geometria emergono errori attribuibili a una mancata conoscenza dell'argomento o a una scarsa attenzione nella lettura della domanda.

Occorre qui sottolineare alcune limitazioni di questo studio: i risultati esaminati fanno riferimento solo a un grado scolastico e solo al campione italiano. Proprio a questo proposito, sarebbe utile studiare più a fondo le tipologie di errori commessi dagli studenti su base internazionale, cercando di decifrare, tra i vari Paesi partecipanti, eventuali similitudini negli errori ricorrenti.

Nonostante queste limitazioni, questo studio offre un'analisi delle risposte sbagliate su un campione rappresentativo degli studenti di terza secondaria di I grado e può fornire spunti utili agli insegnanti, dimostrando lo stretto legame tra l'esperienza di ricerca e la pratica didattica (Asquini, 2016; Calvani e Menichetti, 2013). I risultati, infatti, possono essere utilizzati per comprendere meglio le modalità di utilizzo di specifici aspetti del pensiero e dell'apprendimento della Matematica nella scuola secondaria italiana (Ferrara e Pozio, 2022) fornendo indicazioni didattiche concrete per un intervento più mirato ed efficace.

Riferimenti bibliografici

- Ashlock R.B. (2001), *Error patterns in computation: Using error patterns to improve instruction*, Merrill Prentice Hall, Columbus.
- Asquini G. (2016), “L’uso delle domande aperte per la verifica della competenza matematica. Suggestioni da PISA 2012”, *Form@re, Open Journal per la Formazione in Rete*, 16 (1), pp. 55-69.
- Bassani P., Fioravanti E., Pelillo M., Pozio S. (2012), “Le prove INVALSI di matematica nella prima e nella terza classe della scuola secondaria di primo grado (Prova nazionale)”, INVALSI, *Quaderni SNV*, 3 – MAT, testo disponibile al sito: https://www.invalsi.it/snvpn2013/documenti/Quaderni/Quaderni_SNV_N3_MAT.pdf, data di consultazione 6/3/2024.
- Biber C., Tuna A., Korkmaz S. (2013), “The Mistakes and the Misconceptions of the Eighth Grade Students on the Subject of Angles”, *European Journal of Science and Mathematics Education*, 1 (2), pp. 50-59.
- Blachowicz C., Ogle D. (2001), *Reading comprehension: Strategies for independent learners*, Gilford Press, New York.
- Bolondi G., Ferretti F., Spagnolo C. (2021), “Argomentare in Matematica. Analisi di protocolli di studenti su catene di quesiti INVALSI proposti in diversi gradi scolastici”, in P. Falzetti (a cura di), *I dati INVALSI: uno strumento per lo sviluppo delle competenze trasversali*, FrancoAngeli, Milano.
- Calvani A., Menichetti L. (2013), “Evidence Based Education: superare il gap tra ricerca e pratica”, *Form@re, Open Journal per la Formazione in Rete*, 13 (2), pp. 1-5.
- Capraro M.M., Joffrion H. (2006), “Algebraic equations: Can middle-school students meaningfully translate from words to mathematical symbols?”, *Reading Psychology*, 27 (2-3), pp. 147-164.
- Cho P.T., Win H. (2020), “A study of misconceptions about geometry in middle school learners”, *Journal of the Myanmar Academy of Arts and Science*, 18 (9C), pp. 165-181.
- Clements D.H., Battista M.T. (1992), “Geometry and spatial reasoning”, in D. Grouws (ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, MacMillan, New York, pp. 420-464.
- Ferrara F., Pozio S. (2022), *Incorrect responses to the national assessment of mathematics: Gaining insights into mathematical proficiency at middle school*, Twelfth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME12).
- Ferretti F., Lemmo A., Maffia A. (2016), “Confrontare decimali e frazioni: analisi delle concezioni degli studenti a partire da una domanda INVALSI”, *L’insegnamento della Matematica e delle scienze integrate*, 39 (5), pp. 451-464.
- INVALSI, *Rapporto nazionale indagini IEA TIMSS 2015, La rilevazione IEA: i risultati degli studenti italiani nell’indagine internazionale TIMSS 2015*, testo disponibile al sito: https://www.invalsi.it/invalsi/ri/timss2015/index.php?page=timss2015_it_05, data di consultazione 6/3/2024.
- INVALSI, *Rapporto nazionale indagini IEA TIMSS 2019, IEA TIMSS 2019: I risultati degli studenti italiani in Matematica e Scienze*, testo disponibile al sito:

- https://www.invalsi.it/invalsi/ri/Timss2019/index.php?page=timss2019_it_04, data di consultazione 6/3/2024.
- Ketterlin-Geller L.R., Yovanoff P. (2009), “Diagnostic assessments in mathematics to support instructional decision making”, *Practical Assessment, Research, and Evaluation*, 14 (16), pp. 1-11.
- Kopelman E. (1996), “Invisible angles and visible parallels which bring deconstruction to geometry”, *Proceedings of the 20th International Conference for Psychology of Mathematics Education*, University of Valencia, Spain, pp. 185-192.
- Llinares S. (2003), “Matemáticas escolares y competencia matemática”, in M.C. Chamorro (coord.), *Didáctica de las matemáticas para primaria*, Prentice Educación, Madrid, pp. 3-30.
- Martínez B.A., Ascencio E.N., Rey A.F., Alonso P.A.R. (2018), “Adaptación de la prueba TIMSS para la evaluación de la competencia matemática en alumnos de magisterio”, *Bordón: Revista de pedagogía*, 70 (3), pp. 95-113.
- Matos J.M. (1994), “Cognitive models of the concept of angle”, in J.P. Da Ponte, J.F. Matos (eds.), *Proceedings of the International Conference for the Psychology of Mathematics Education (PME)*, 18th, Lisbon, pp. 263-270.
- Mullis I.V.S., Martin M.O. (eds.) (2013), *TIMSS 2015 Assessment Frameworks*, retrieved October 15, 2022, from Boston College, TIMSS & PIRLS International Study Center, testo disponibile al sito: <http://timssandpirls.bc.edu/timss2015/frameworks.html>, data di consultazione 6/6/2024.
- Nathan M.J., Koedinger K.R. (2000), “Teachers’ and researchers’ beliefs about the development of algebraic reasoning”, *Journal for Research in Mathematics Education*, 31, pp. 168-190.
- Ozerem A. (2012), “Misconceptions in geometry and suggested solutions for seventh grade students”, *Procedia – Social and Behavioral Sciences*, 55, pp. 720-729.
- Palmerio L., Caponera E. (a cura di) (2016), *La rilevazione IEA: i risultati degli studenti italiani nell’indagine internazionale TIMSS 2015*, INVALSI, Roma, testo disponibile al sito: https://www.invalsi.it/invalsi/ri/timss2015/documenti/Rapporto_nazionale_TIMSS_2015.pdf, data di consultazione 4/4/2023.
- Palmerio L., Caponera E. (a cura di) (2021), *IEA TIMSS 2019. I risultati degli studenti italiani in Matematica e Scienze*, FrancoAngeli, Milano, testo disponibile al sito: <https://series.francoangeli.it/index.php/oa/catalog/book/733>, data di consultazione 04/04/2023.
- Perso T. (1996), “Teaching equation solving-again?”, *The Australian Mathematics Teacher*, 52 (1), pp. 19-21.
- Popper K.R. (1972), *Objective knowledge*, Oxford University Press, Oxford, vol. 360.
- Pozio S. (2011), *La risoluzione di prove di competenza matematica. Analisi dei risultati italiani nell’indagine OCSE-PISA 2003*, Nuova Cultura, Roma.
- Pozio S. (2013), “Math proficiency test: Analysis of Italian scores in the OCSE-PISA 2003 survey”, in B. Di Paola (ed.), *Mathematics education in a globalized environment – L’enseignement des mathématiques dans un environnement globalisé*, *Quaderni di Ricerca in didattica*, 23 (1), pp. 1592-4424.

- Rosnick P. (1981), "Some misconceptions concerning the concept of variable. Are you careful about defining your variables?", *Mathematics Teacher*, 74 (6), pp. 418-420.
- Russell M., Masters J. (2009), *Formative diagnostic assessment in algebra and geometry*, paper presented at the annual meeting of the American Education Research Association, San Diego.
- Smith J.P., Barrett J.E. (2017), *Learning and teaching measurement: Coordinating quantity and number*, in J. Cai (ed.), *Compendium for research in mathematics education*, National Council of Teachers of Mathematics, Reston, pp. 355-385.
- Thompson A.G., Phillip R.A., Thompson P.W., Boyd B. (1994), "Calculational and conceptual orientations in teaching mathematics", in D. Achele, A.F. Coxford (eds.), *Professional development of teachers of mathematics*, National Council of Teachers of Mathematics, Reston, pp. 79-92.
- Traub R., Fisher C. (1977), "On the equivalence of constructed-response and multiple choice tests", *Applied Psychological Measurement*, 1 (3), pp. 355-369.

5. I pensieri degli insegnanti sull'origine degli errori nei test INVALSI di quinta primaria di Matematica

di Annarita Monaco, Barbara Balconi, Ottavio G. Rizzo

Cosa pensano gli insegnanti (di Matematica della quinta primaria) delle proprie pratiche didattiche relative ai test INVALSI? Nel 2020, un gruppo misto di ricercatori in pedagogia, didattica della Matematica e dell'Informatica, e insegnanti-ricercatori ha ideato e somministrato un questionario (N=526 docenti rispondenti) per esplorare l'atteggiamento verso le prove INVALSI e, in particolare, sull'origine degli errori dei propri alunni.

In questo contributo intendiamo presentare un'analisi riferita solo a 4 item del questionario sopracitato (3, 9, 15, 20), che presentano una struttura analoga, volti a indagare le ragioni possibili della distribuzione delle risposte degli alunni nei test INVALSI.

Nello specifico sono state prese in esame le 121 risposte narrative fornite dai docenti che hanno scelto di non selezionare una delle risposte chiuse formulate dai ricercatori sulle ragioni della distribuzione delle risposte degli alunni, ma hanno deciso di ipotizzare *ex novo*, nel campo aperto "altro", altre spiegazioni.

La metodologia utilizzata per l'analisi delle risposte aperte consiste nella creazione di tag, rappresentativi di tre possibili cause degli errori commessi dagli studenti: la didattica del docente, la formulazione del quesito INVALSI e le ragioni attribuibili a una mancata comprensione dell'item da parte dello studente.

L'analisi delle risposte aperte dei docenti evidenzia una tendenza alla devoluzione di responsabilità rispetto agli errori commessi dagli alunni, sottolineando la necessità di proporre interventi formativi che possano sostenere le progettazioni di azioni didattiche maggiormente consapevoli.

What do (5th grade Mathematics) teachers think of the relationship of their didactical practices and the standardized INVALSI tests? In 2020, a

mixed research group of researchers in pedagogy, math education and computer science education, together with teacher-researchers, designed and administered a questionnaire (N=526 teachers) to explore teachers' attitude on INVALSI tests and, in particular, on the origin of the mistakes of their students.

In this paper, we present the results of the analysis of four items (3, 9, 15, 20) of the aforementioned questionnaire that, with a common structure, investigate the possible reasons of the distribution of pupils' answers in INVALSI tests. In particular, we analyze the 121 narrative answers given by those teachers that elected not to select one of the closed answers provided by the research group on the possible reasons of pupils' answers, but rather to explain with their own words, in the open "other" field, the possible reasons.

The methodology used to analyze the open answers consists in the creation of a set of three tags representative of three different possible reasons for students' mistakes: the teacher's praxeology, the way the INVALSI item was written, and reasons that relate to the student misunderstanding the item.

The analysis of teachers' open answers highlights the tendency of teachers to devolve the responsibility of errors towards their pupils, thus underlining the necessity of formative interventions that could foster the design of more knowledgeable teaching practices.

1. Introduzione

Il presente contributo si inserisce nei lavori dell'Osservatorio "Didattica e saperi disciplinari" della SIRD (Società Italiana di Ricerca Didattica), volti a promuovere il dialogo fra il mondo della ricerca didattica e quello della didattica delle discipline, al fine di offrire contributi interessanti nel dibattito scientifico sulla formazione docente e sullo sviluppo professionale.

In questo scenario si è costituito, nel 2020, un gruppo misto di ricercatori in Pedagogia, Didattica della Matematica e dell'Informatica, insegnanti-ricercatori, che ha condiviso il comune obiettivo di indagare atteggiamenti e convinzioni dei docenti in merito ai test INVALSI.

A questo proposito il gruppo di ricerca ha messo a punto, e poi somministrato, un questionario a 526 docenti di classe quinta primaria, che risiedono e lavorano in varie regioni del territorio nazionale.

La rilevazione ha avuto come obiettivi principali quelli di indagare:

- la relazione tra le prove di Matematica INVALSI e i processi di insegnamento e apprendimento della Matematica in classe, con particolare riferimento alle pratiche didattiche adottate dagli insegnanti;

- le concezioni emergenti rispetto alle cause degli errori degli studenti nei test;
- i possibili utilizzi delle prove nella didattica quotidiana.

L'azione dei ricercatori è animata dall'intento di identificare possibili bisogni formativi dei docenti, a livello nazionale, e proporre linee guida per promuovere un uso consapevole delle prove e dei risultati che ne derivano, nelle pratiche didattiche quotidiane di Matematica.

Il questionario somministrato ai docenti, e già ampiamente descritto in diverse pubblicazioni (Arzarello e Ferretti, 2021; Truffelli e Vannini, 2021; Vaccaro, Faggiano e Ferretti, 2021; Rizzo *et al.*, 2021), è costituito da tre sezioni: la prima riguarda l'insegnamento della Matematica, ovvero come gli insegnanti interpretano gli item INVALSI e i loro risultati; la seconda sezione è volta a indagare convinzioni e atteggiamenti degli insegnanti rispetto ai test e come questi ultimi si riversano nelle pratiche di insegnamento; la terza sezione, invece, si compone di domande riguardanti la formazione professionale dei docenti, oltre che relative a dati personali e di contesto.

Prima di procedere con l'analisi di alcuni item del questionario – oggetto principale dell'indagine qui presentata – si riporta in forma sintetica quanto rilevato attraverso gli item della terza sezione (dati anagrafici e informazioni di contesto) al fine di definire le caratteristiche del campione dei docenti rispondenti:

- il 95% dei rispondenti è di genere femminile;
- il 68% dei rispondenti ha ricevuto un invito a compilare il questionario dalla propria scuola e in particolare dal proprio Dirigente scolastico, i rimanenti hanno ricevuto l'invito dal gruppo di ricerca o tramite passaparola;
- il 71% dei rispondenti insegna in Piemonte o Emilia-Romagna (che insieme costituiscono il 15% della popolazione italiana), il rimanente è distribuito nelle altre regioni italiane;
- il 90% dei rispondenti sono insegnanti di ruolo;
- il 21% dei rispondenti partecipa attivamente alla vita scolastica (RAV, Nucleo di valutazione, INVALSI).

2. Oggetto di ricerca

Il seguente contributo prende in esame la prima sezione del questionario e approfondisce l'analisi di quei quesiti che mirano a indagare la consapevolezza che gli insegnanti hanno dell'origine degli errori dei propri studenti, considerandoli come una potenziale risorsa per ripensare la pratica didattica e un passaggio utile per costruire processi di apprendimento significativi per gli alunni.

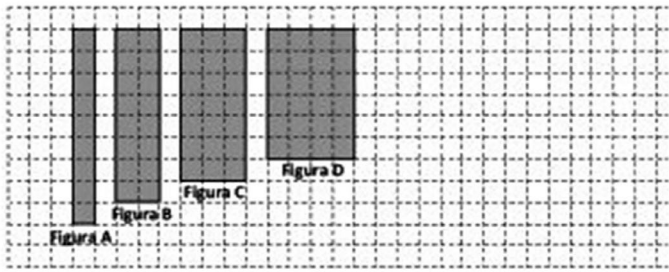
Per fare questo sono stati selezionati solo quegli item che richiedevano al docente di ipotizzare la ragione della percentuale di distribuzione delle risposte degli studenti al test INVALSI, scegliendo tra alcune opzioni già presenti, ideate dai ricercatori, oppure argomentando una nuova ragione in un campo libero.

Gli item del questionario oggetto di indagine sono quindi stati 3, 9, 15, 20 e presentano la struttura che segue:

- riproposizione dell'immagine del quesito INVALSI nella sua formulazione originaria (nella domanda 3 è stato riproposto l'item INVALSI D3 del grado 6 del 2012; nella domanda 9 l'item D3 del grado 6 del 2012; nella domanda 15 l'item D25 del grado 6 del 2012; nella domanda 20 l'item D31 del grado 5 del 2016);
- presentazione delle percentuali della distribuzione delle risposte degli alunni a livello nazionale;
- richiesta di individuare il motivo (prevalente) della distribuzione delle risposte degli alunni scegliendo tra alcune risposte chiuse, selezionate dal gruppo di ricerca, e una voce "altro", per permettere ai docenti di esplicitare le loro idee.

A titolo esemplificativo si riportano i quesiti del questionario che sono divenuti oggetto di indagine all'interno del contributo, con le relative percentuali di scelta di ciascuna risposta da parte dei docenti.

Osserva la seguente sequenza di figure:



a. Disegna accanto alla Figura D, nello spazio quadrettato, la figura successiva della sequenza.

b. Quale tra le seguenti affermazioni è vera?

- A. Le aree delle figure restano sempre uguali
- B. Le aree delle figure raddoppiano a ogni passaggio
- C. I perimetri delle figure restano sempre uguali
- D. I perimetri delle figure aumentano a ogni passaggio

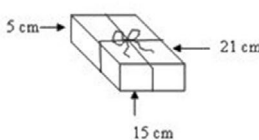
Fig. 1 – Aree e perimetri

Item 3 – L'85,8% degli alunni ha risposto correttamente all'item a, e solo il 35,7 % risponde correttamente C all'item b; quasi altrettanti scelgono la risposta D.

Secondo te, questo è dovuto prevalentemente a (scegli un motivo)

Gli alunni non leggono con attenzione il testo	34%
Gli alunni non conoscono bene le formule per l'area e per il perimetro	2%
Gli alunni si lasciano ingannare dalla figura	33%
Gli alunni pensano che, se aumenta l'area aumenta anche il perimetro	21%
Altro	10%

Alessandra acquista un libro all'ipermercato; a casa prepara un pacchetto simile a questo:



Quanti cm di nastro ha usato in tutto, sapendo che per fare il fiocco ne sono serviti 30 cm?

A. 41.

B. 71.

C. 112.

D. 122.

Fig. 2 – Il pacchetto regalo

Item 9 – La percentuale di risposte corrette (opzione “D”) a livello nazionale è stata del 14,7%.

Perché, secondo te, il quesito è risultato così difficile?

Scegli al più due tra le seguenti opzioni. Seleziona tutte le voci applicabili.

Perché gli alunni non hanno sufficiente capacità di visualizzazione spaziale	60%
Perché non hanno fatto abbastanza attività manipolative	32%
Perché non hanno compreso la consegna	14%
Perché hanno sbagliato i calcoli	8%
Perché non leggono il testo con attenzione	19%
Perché pensano solo a fare le operazioni	15%
Altro	7%

(Il totale è superiore a 100% perché potevano essere scelte fino a due opzioni.)

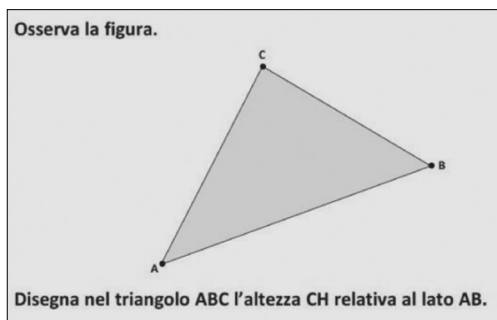


Fig. 3 – L'altezza del triangolo

Item 15 – Solo il 51,5% degli alunni di quinta scuola primaria ha risposto correttamente al quesito.

Secondo te questo è dovuto prevalentemente a:

Gli alunni non leggono il testo con attenzione	8%
Gli alunni non conoscono bene la definizione di altezza di un triangolo	21%
Gli alunni si lasciano ingannare dalla figura	29%
Gli alunni pensano che l'altezza debba essere verticale	35%
Altro	7%

Le caraffe che vedi in figura sono uguali.
La caraffa F contiene 280 ml di acqua.
La caraffa G contiene 125 ml di acqua.

Caraffa F Caraffa G

a. Quanta acqua contiene la caraffa F più della caraffa G?
Risposta: ml

b. Anna aggiunge 100 ml di acqua nella caraffa F e 100 ml di acqua nella caraffa G.
La differenza tra la quantità di acqua contenuta nella caraffa F e quella contenuta nella caraffa G cambia?
Scegli l'affermazione corretta.

A. Sì, cambia perché si aggiunge acqua nelle due caraffe

B. Sì, cambia perché la caraffa F contiene 380 ml di acqua e la caraffa G ne contiene 225 ml

C. No, non cambia perché si aggiunge nelle due caraffe la stessa quantità di acqua

D. No, non cambia perché le due caraffe sono uguali

Fig. 4 – Le caraffe

Il 50,1% degli alunni ha risposto correttamente (opzione “C”) all’item “b”, ma il 26,8% ha scelto l’opzione “B”.

Secondo te, questo è dovuto prevalentemente a:

Gli alunni non leggono il testo con attenzione	28%
Il testo del quesito è troppo complesso per gli alunni	9%
Il testo del quesito fa scattare in loro automatismi legati alla parola differenza	41%
Il testo della risposta confonde gli alunni su quanto chiesto nel quesito	12%
Gli alunni eseguono la sottrazione e sbagliano il calcolo	1%
Altro	9%

Diviene rilevante analizzare cosa i docenti hanno inserito nel campo libero “altro”, non utilizzando quindi le risposte chiuse fornite dal questionario, ma proponendo una risposta narrativa per dettagliare le proprie motivazioni rispetto all’origine degli errori degli studenti. Questa scelta è guidata dall’intento da un lato di valorizzare il pensiero dei docenti che hanno inserito un commento volutamente “diverso”, ma anche dall’intercettare un osservatorio più ampio di quelle che sono le concezioni dei docenti, relative alle origini degli errori degli studenti.

Le risposte fornite sull’item “altro” non sono particolarmente numerose, si tratta di 121 risposte così suddivise: 34 all’item 3, 27 all’item 9, 27 all’item 15 e 33 all’item 20. Sebbene il risultato non sia significativo da un punto di vista quantitativo, costituisce un *corpus* testuale interessante da analizzare da un punto di vista qualitativo; non solo, come già indicato, per avere informazioni rispetto alle diverse concezioni dei docenti sugli errori degli studenti, ma anche per valutare eventuali omissioni del gruppo di ricerca nella messa a punto delle opzioni di risposte chiuse fornite all’interno del questionario.

Prima di prendere in esame quali misconcezioni o ostacoli possono essere rilevati a partire dall’analisi delle risposte fornite dai docenti negli item selezionati, è possibile formulare una considerazione generale: come già evidenziato da Vaccaro, Faggiano e Ferretti (2021) risulta rilevante la frequenza con cui i docenti selezionano come possibile ragione degli errori commessi dagli studenti l’incomprensione del testo da parte degli stessi.

Questo dato conferma quella che Weiner (1985) ha rilevato come tendenza, per chi è spettatore di un fenomeno – in questo caso il docente – ad attribuire le cause di un possibile errore all’attore e alla sua responsabilità; quindi, in questo caso agli alunni. Rende, anche, evidente un bisogno formativo in termini di conoscenze specifiche di didattica della Matematica e di pratiche didattiche, che facciano della comprensione del testo, un oggetto,

anche, dell'insegnamento della Matematica. Questa questione sarà ulteriormente approfondita nelle conclusioni del contributo.

3. La metodologia di analisi

Nell'analisi del *corpus* testuale generato dalle risposte dei docenti all'opzione "altro", il sottogruppo di ricerca composto da una pedagoga, un didatta della Matematica e un'insegnante ricercatrice ha concordato nel non presupporre una categorizzazione chiusa delle risposte, costruendo in itinere una possibile classificazione. Questa scelta è stata dovuta, almeno parzialmente, alla necessità di aprire il ventaglio delle possibili cause di errore scelte a priori nella costruzione del questionario. La procedura seguita è stata strutturata in più cicli di analisi, ciascuno composto da un'analisi individuale del *corpus* dei dati testuali da parte dei tre ricercatori coinvolti, seguita da una discussione collettiva volta alla ridefinizione delle categorie su cui impostare un nuovo ciclo di analisi.

In particolare, riguardo al quesito dell'item 3 (figura 1), in aggiunta alle risposte prefissate 1-4 sono state create nove nuovi descrittori possibili di cause presunte come segue:

Opzioni già presenti nel questionario:

- 1) gli alunni non leggono con attenzione il testo;
- 2) gli alunni non conoscono bene le formule per l'area e per il perimetro;
- 3) gli alunni si lasciano ingannare dalla figura;
- 4) gli alunni pensano che, se aumenta l'area aumenta, anche il perimetro.

Possibili altre cause degli errori degli studenti, ipotizzate a partire dalla prima lettura del *corpus* di testo prodotto dalle risposte "altro", fornite dai docenti:

- gli alunni non sanno applicare le formule;
- gli alunni non verificano concretamente le ipotesi formulate rispetto alla relazione tra perimetro e area;
- gli alunni fanno confusione fra area e perimetro;
- gli alunni non fanno attività pratiche di Geometria;
- gli alunni hanno problemi linguistici nella comprensione della consegna;
- gli alunni non hanno pratica con questo tipo di esercizio;
- il quesito è difficile; gli alunni si arrendono subito;
- gli alunni hanno fretta di rispondere;
- gli alunni non *leggono* con attenzione la figura.

Una simile classificazione, che cerca di categorizzare ogni singola risposta ottenuta, è stata ritenuta inutile al fine di un'analisi scientifica dei dati.

Questa modalità di analisi, infatti, si è mostrata immediatamente poco funzionale a un accordo condiviso tra i ricercatori, a causa dell'importante grado di interpretazione possibile delle cause nominate dai docenti. A questo proposito, si mostra, attraverso un esempio, la difficoltà di codifica delle risposte con l'utilizzo dei nuovi descrittori: un docente, infatti, ha inserito alla voce "altro" nell'item 3 «gli alunni osservano superficialmente le figure e fanno riferimento a stereotipi studiati»; un ricercatore ha inserito tale affermazione nella categoria 3, precedentemente ipotizzata nel questionario, ma è al contempo giustificabile, per gli altri due ricercatori, la creazione della categoria 1 per la codifica della frase in oggetto.

Tale criticità nel procedere ha portato i ricercatori a elaborare, al termine del secondo ciclo di analisi, una nuova categorizzazione, sviluppando un'ontologia dell'origine dell'errore basata sulla teoria degli ostacoli didattici di Brousseau (1983).

La classificazione ipotizzata dai ricercatori per codificare le cause degli errori degli studenti, descritte nelle risposte "altro", fornite dai docenti, è stata quindi la seguente:

- alunni (A): l'errore è legato a un ostacolo ontogenetico del singolo alunno. La responsabilità dell'errore è devoluta allo studente che è disattento, non legge con attenzione, fa confusione su concetti *ovvii* che sono stati ben spiegati dal docente e ben recepiti dal *resto* della classe;
- didattica (D): l'errore deriva da un ostacolo didattico. Per esempio, perché non sono state mai fatte attività di questo tipo, o perché agli alunni sono sempre state presentate situazioni stereotipate;
- INVALSI (I): l'errore deriva da una domanda poco chiara, o fuori tema, o che presuppone attività che non è corretto presumere siano state fatte in classe. Questa categoria, pur non essendo sovrapponibile con gli ostacoli epistemologici, soddisfa però il principio di devoluzione dell'errore verso l'esterno del contesto classe.

Qualora, all'interno di una risposta del docente, fossero state identificate due cause, è stato assegnato il tag riferito alla causa prevalente – dal ricercatore – all'interno della risposta.

Per la codifica ci si è basati solo su quanto scritto esplicitamente dai docenti. Per esempio, quando i docenti hanno usato espressioni come "non sono abituati" o "non si sono esercitati", l'attribuzione di causa assegnata è stata *Didattica*, perché entrambi questi verbi rimandano a un'abitudine o a un esercizio realizzato con il docente; quando i docenti hanno usato termini come "non ragionano" o "non leggono", l'attribuzione di causa assegnata è stata *Alunni*, perché entrambi questi verbi rimandano a un'azione dell'alunno.

Il terzo ciclo di tagging ha portato a una discussione finale fra i tre autori per le poche risposte in cui la categorizzazione individuale non era unanime, con l'obiettivo di creare consenso rispetto all'individuazione della causa presunta.

4. Discussione dei risultati

Nel presente paragrafo saranno presentati e discussi i risultati della codifica, effettuata dai ricercatori, delle risposte descrittive fornite dai docenti. Nella tabella 1 è stato riportato il riassunto degli esiti.

Tab. 1 – Distribuzione dei tag alunni/didattica/INVALSI sulle risposte analizzate

	<i>Alunni</i>	<i>Didattica</i>	<i>INVALSI</i>	<i>Totale risposte analizzate</i>	<i>Percentuale sul totale</i>
Item 3	19	11	4	34	6,5%
Item 9	8	7	12	27	5,1%
Item 15	9	17	1	27	5,1%
Item 20	21	9	3	33	6,3%

Notiamo subito che quesiti diversi hanno sollecitato risposte diverse: in parte questo è dovuto al fatto che pochi insegnanti hanno risposto “altro” in più item, in parte alla diversa natura dei quesiti.

La codifica più frequente è “alunni”, infatti, compare come maggiormente selezionata dai ricercatori negli item 3 e 20; “didattica” è la codifica più ricorrente nell’item 15; mentre “INVALSI” nell’item 9.

Nel caso di quest’ultimo, i docenti, in molte risposte, evidenziano difficoltà – anche contrapposte! – nella lettura dell’immagine. Si riportano alcuni esempi di risposta descrittiva, fornita nel campo “altro”:

- il disegno non indica bene quali sono le misure delle varie dimensioni;
- le frecce non indicano con precisione a quale dimensione si riferiscono;
- perché le frecce indicano gli angoli;
- perché a prima vista le frecce indicano gli angoli.

Le risposte fornite dagli insegnanti rispetto all’individuazione delle cause dell’errore dell’item 9 circoscrivono, nella maggior parte dei casi (12 risposte su 27) il problema al disegno proposto nel quesito, nello specifico all’uso delle frecce che non indicherebbero con chiarezza a quali dimensioni ci si riferisca. Tali affermazioni richiamano una certa tendenza dei docenti nel considerare poco chiari i quesiti proposti nei test INVALSI o, talvolta, dalle caratteristiche insolite per il contesto scolastico italiano.

Rispetto alla “non adeguatezza” dei quesiti INVALSI si riportano anche i seguenti esempi di risposta descrittiva fornita dai docenti:

- argomento di terza media;
- necessita di tempo, calma e tranquillità; per molti bambini risulta difficile;
- il ragionamento richiede troppi passaggi.

La risoluzione dell’item è percepita dai docenti come “lontana” dalle possibilità degli alunni. Le convinzioni presentate hanno alimentato e alimentano nei docenti delle resistenze nella ricerca di “codici di collegamento” possibili nell’utilizzo di quanto segnalato da una rilevazione di tipo esterno (INVALSI), e il processo didattico quotidiano (Pagani e Pastori, 2016); ma anche nella possibilità di utilizzo delle prove come un’occasione per la scuola di attivare una riflessione critica su processi e modelli di insegnamento-apprendimento e su processi e modelli di valutazione.

Anche nelle risposte fornite dai docenti nell’item 15 viene richiamata una “distanza” tra quanto richiesto dal quesito INVALSI e quanto viene proposto a scuola.

In questo caso la causa categorizzata come più frequente è “didattica”, infatti, nelle risposte dei docenti vengono sollevate interessanti riflessioni sulle pratiche didattiche quotidiane (dei colleghi?).

Nel campo “altro” compaiono le seguenti affermazioni:

- molti docenti presentano le figure geometriche in “posizioni” fisse e stereotipate;
- gli alunni hanno esercitato poche volte il disegno dell’altezza in figure date;
- gli alunni non sono abituati a lavorare sul concetto di perpendicolarità con riga e squadra;
- gli alunni hanno esercitato poche volte il disegno dell’altezza in figure date.

Tali risposte rilevano la consapevolezza, da parte dei docenti, del ruolo che la didattica può rivestire nella creazione di misconcezioni su alcuni concetti matematici, come per esempio, l’altezza, in questo caso di un triangolo: se disposta non in verticale, l’altezza non è riconosciuta come tale.

All’interno di una ricerca condotta da D’Amore e collaboratori si sottolinea la responsabilità degli insegnanti nella costruzione di tale misconcezione, attraverso l’uso di figure presentate in modo standard, utilizzo per altro incoraggiato anche dalle immagini presenti sui libri di testo.

In questo modo si sostiene il radicamento dell’apprendimento di una caratteristica accessoria dell’altezza, come la verticalità, trascurando, invece, una caratteristica fondante come la perpendicolarità (D’Amore *et al.*, 2008).

Se l’insegnante disegna solo triangoli in posizione “standard” come quello mostrato in figura 5 nell’alunno si rinforza la confusione tra le caratteristiche intrinseche del concetto di altezza con le caratteristiche accessorie, parassite, come, per esempio la verticalità.

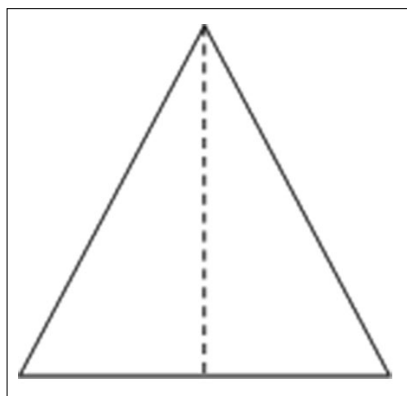


Fig. 5 – Triangolo con altezza tratteggiata, in posizione standard

In altre parole, l'esempio di altezza (verticale) relativa al lato orizzontale di un triangolo (fig. 5), essendo proposto spesso e in differenti occasioni, funziona come modello primitivo e l'alunno fa riferimento a esso nello svolgimento di esercizi analoghi (Zan e Baccaglini-Frank, 2017). Notiamo inoltre come gli insegnanti, nelle risposte descrittive, sollevino una questione relativa alla scarsa pratica concreta di disegno nell'apprendimento di concetti di Geometria. Si sottolinea, quindi, la presenza di una didattica della Matematica poco orientata al “fare” dei bambini, all'utilizzo di strumenti di lavoro utili, quali riga e squadra, ma piuttosto all'imparare concetti, in situazioni “standard” create da docente e da libri di testo.

Nell'item 20 le risposte dei docenti hanno mostrato che sarebbe stato necessario aggiungere come possibile ragione degli errori degli studenti una risposta sull'utilizzo delle proprietà delle operazioni. Tale necessità è stata citata in 14 risposte su 33.

I docenti, attraverso affermazioni differenti, fanno un richiamo esplicito e frequente all'errata applicazione della proprietà invariantiva e al fatto che tale proprietà non venga, ancora una volta, sperimentata nella pratica:

- dipende se hanno interiorizzato l'applicazione pratica della proprietà invariantiva;
- dipende se hanno lavorato sulla proprietà invariantiva in concreto;
- non mettono in pratiche le regole legate alle proprietà della sottrazione, dando per scontato che basta calcolare;
- dipende quanto si sia lavorato con la proprietà invariantiva con applicazione pratica;
- spesso gli alunni non sanno applicare nel concreto le proprietà delle operazioni (in questo caso la proprietà invariantiva della sottrazione).

Dalla categorizzazione dei ricercatori, l'attribuzione della causa di errore nelle risposte descrittive dei docenti ricade su "alunni", infatti i docenti dichiarano che sono gli alunni che non riescono ad applicare la proprietà invariante in situazioni pratiche.

Ancora una volta si assiste al fenomeno di devoluzione della responsabilità dell'errore, non considerando come la difficoltà degli alunni nell'applicazione e nell'utilizzo della proprietà invariante possa essere posta in relazione al lavoro didattico del docente nella presentazione di tale conoscenza. Nelle risposte descrittive dei docenti compare l'espressione "mettere in pratica la proprietà o le regole", non si fa cenno alla possibilità e all'importanza – a fronte della distribuzione di risposte fornite dagli alunni descritta dal quesito del questionario – di indagare la reale comprensione della proprietà in oggetto, anche attraverso esperienze didattiche concrete e significative. Inoltre, si fa riferimento a una presunta "interiorizzazione", della proprietà stessa, non a una possibile manifestazione osservabile della comprensione della stessa, sottolineando nuovamente l'attribuzione di responsabilità degli alunni, non evidenziando un margine di azione possibile da parte del docente.

Partendo dalle difficoltà degli alunni nel rispondere correttamente al quesito proposto sarebbe interessante andare a esaminare le pratiche didattiche dei docenti, ascrivendo quindi il possibile ostacolo tra quelli di natura didattica (D'Amore *et al.*, 2008). La distribuzione delle risposte degli alunni riportata nell'item fa pensare che poche volte – nella pratica didattica in Matematica della scuola – le proprietà delle operazioni vengano fatte utilizzare per risolvere quesiti reali, come potrebbe essere, per esempio, il contesto del problema delle caraffe, che, se ben compreso, potrebbe fornire al docente un osservatorio interessante per valutare la comprensione degli alunni, per esempio, della proprietà invariante. Le affermazioni dei docenti rispetto alle origini della distribuzione delle risposte all'item 3 "Aree e perimetri", dove viene richiesto all'alunno di mettere in relazione il concetto di area e perimetro, sono estremamente varie; tuttavia, la causa maggiormente ricorrente nella categorizzazione dei ricercatori è nuovamente alunni (19 risposte su 34).

Alcuni docenti forniscono semplificazioni della risposta presente nel questionario "gli alunni pensano che se aumenta l'area aumenta anche il perimetro", invece altri presuppongono, come causa dell'errore degli alunni, una distrazione o la mancanza di strategie di verifica di quanto ipotizzato:

- non contano i quadretti (2 docenti);
- non verificano la risposta data (2);
- rispondono d'impulso;
- non si danno il tempo (2).

Altre risposte descrittive dei docenti sottolineano, di nuovo, una responsabilità degli alunni nella non comprensione del concetto di perimetro e area:

- confondono il concetto di perimetro e area;
- non hanno ben acquisito il concetto di area e di perimetro e/o non sanno applicarlo;
- fanno confusione tra area e perimetro.

In 11 risposte su 34 compare un riferimento alla didattica come possibile causa dell'errore degli alunni, con affermazioni quali:

- mancanza di attività pratiche legate alla Geometria;
- gli alunni non sono allenati al tipo di quesito.

La causa dell'errore degli alunni potrebbe derivare dalla misconcezione: «Se aumenta l'area, aumenta anche il perimetro» (Fandiño Pinilla e D'Amore, 2006, pp. 83-84), che evidenzia come l'ostacolo che si oppone alla costruzione di una conoscenza soddisfacente sulla relazione tra area e perimetro non sia solo di natura epistemologica, ma anche di natura didattica: molto raramente viene proposto in classe di mettere in relazione l'area e il perimetro di una stessa figura. Si insiste sul fatto che il perimetro si misura in grandezze lineari (il metro) e l'area in grandezze quadrate (metro quadrato), centrando l'attenzione sui singoli concetti di area e di perimetro, anziché sulla loro relazione.

Tuttavia, le risposte dei docenti restano a un iniziale livello di consapevolezza, nominando nuovamente solo la mancanza di attività pratica legata a questo tipo di apprendimento, come causa possibile degli errori degli studenti.

5. Conclusioni

L'analisi delle risposte dei docenti nel campo "altro" richiama da un lato una tendenza – frequente da parte degli insegnanti – alla devoluzione di responsabilità rispetto agli errori commessi dagli alunni (Weiner, 1985); ma evidenzia anche la scarsa presenza di proposte di esperienze concrete di apprendimento che consentano agli alunni di utilizzare i concetti della Matematica.

Questa sembra essere identificata – nelle risposte descrittive fornite dai docenti – come causa principale, per gli alunni, nell'effettuare quel processo di matematizzazione e modellizzazione, che consiste nell'organizzare e analizzare una situazione reale tramite gli strumenti della Matematica: traducendo, riorganizzando e ricostruendo un problema dal contesto reale nel mondo simbolico della Matematica, e viceversa (Jupri e Drijvers, 2016).

Tale considerazione rende evidente la necessità di proporre interventi formativi per i docenti, volti a sostenere sia la promozione di consapevolezza

nelle progettazioni didattiche, sia la problematizzazione dei comportamenti cognitivi dei propri alunni.

Inoltre, l'osservatorio qualitativo proposto da questa analisi ha permesso al gruppo di ricerca di attivarsi in due direzioni:

- la prima è stata quella di considerare le risposte analizzate come un suggerimento per la revisione – attualmente in corso – del questionario stesso. Non in tutte le opzioni fornite dal questionario era possibile una differente attribuzione di causa dell'errore degli studenti, anche solo considerando la tripartizione presente nel seguente contributo (didattica, alunni, INVALSI);
- la seconda è quella di ipotizzare uno sviluppo marcatamente qualitativo dell'indagine, volto a interrogare maggiormente, e molto più da vicino, le pratiche didattiche dei docenti connesse agli item INVALSI o generate da una riflessione con gli alunni sugli errori commessi nel test.

Domande quali:

- Attribuire prevalentemente la causa dell'errore agli alunni, quali rappresentazioni del processo di insegnamento-apprendimento sottende da parte dei docenti?
- Identificare la causa degli errori nella didattica in che modo può attivare una riflessione sistematica e consapevole sulle pratiche di insegnamento messe in campo?
- Identificare le cause possibili di errori commessi nei test INVALSI come può divenire una pratica utile a sostenere un uso proattivo dei test nella didattica quotidiana dei docenti?

Potrebbero risultare una traccia per l'implementazione di uno sviluppo qualitativo dell'indagine.

In chiusura, è interessante sottolineare un ulteriore fenomeno degno di nota, verificatosi durante il processo di analisi dei dati: le discordanze nell'attività di tagging erano prevalentemente – il 62% in media – fra i due ricercatori da un lato e l'insegnante ricercatrice dall'altro: le discordanze, come precisato nel paragrafo dedicato alla metodologia d'analisi dei dati, non sono mai state risolte a maggioranza, ma tramite elaborazione del consenso. Questo fatto, indipendentemente dalla sua origine, che richiederebbe uno studio più approfondito per essere discussa, evidenzia un possibile parallelismo con quanto Anna Sfard definisce come «discorso incommensurabile» (2008, p. 296) tra alunni e insegnanti. Tale fenomeno sembra risiedere in una non comprensione che si verifica quando vengono usate le stesse parole, ma con significati diversi, essendo inconsapevoli delle reciproche differenze di utilizzo. Anche in questo caso la docente e i ricercatori, nell'operare la classificazione delle risposte “altro”, hanno fatto riferimento a significati ap-

partenenti a due mondi non sempre comunicanti quali quello della ricerca e quello delle pratiche didattiche. Anche a seguito di quanto affermato, diventa utile approfondire e promuovere l'interazione fra ricercatori e insegnanti ai fini di sostenere un'alleanza tra scuola e università, volta al miglioramento delle pratiche didattiche quotidiane.

Riferimenti bibliografici

- Arzarello F., Ferretti F. (2021), "The connection between the mathematics INVALSI test and the teaching practices: an explorative study", in P. Falzetti (eds.), *INVALSI data to investigate the characteristics of students, school, and society*, FrancoAngeli, Milano, pp. 96-109.
- Brousseau G. (1983), "Les obstacles épistémologiques et les problèmes in mathématiques", *Reserches en Didactique des Mathématiques*, 4, 2, pp. 165-198.
- D'Amore B., Fandiño Pinilla M.I. (2005), "Relazioni tra area e perimetro: convinzioni di insegnanti e studenti", *La Matematica e la sua didattica*, 2, pp. 165-190.
- D'Amore B., Fandiño Pinilla M.I., Marazzani I., Sbaragli S. (2008), *La didattica e le difficoltà in matematica. Analisi di situazioni di mancato apprendimento*, Erickson, Trento.
- Faggiano E., Monaco A., Rizzo O.G., Vaccaro V. (2023), "An exploratory study on the connection between INVALSI assessment and mathematics teaching and learning processes at the Primary School level", in P. Falzetti (ed.), *The school and its protagonists: the teachers. V Seminar "INVALSI data: a tool for teaching and scientific research"*, FrancoAngeli, Milano, pp. 9-23.
- Fandiño Pinilla M.I., D'Amore B. (2006), *Area e perimetro. Aspetti concettuali e didattici*, Erickson, Trento.
- Fischbein E. (1989), "Tacit models and mathematical reasoning", *For the Learning of Mathematics*, 9 (3), pp. 9-14; trad. it. "Modelli taciti e ragionamento matematico", in E. Fischbein, G. Vergnaud, *Matematica a scuola: teoria ed esperienze*, Pitagora, Bologna, 1992, pp. 25-38.
- Jupri A., Drijvers P. (2016), "Student difficulties in mathematizing word problems in algebra", *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, 12 (9), pp. 2481-2502.
- Martini B., Sbaragli S. (2005), *Insegnare e apprendere la matematica*, Tecnodid, Napoli.
- Pagani V., Pastori G. (2016), "What do you think about INVALSI tests? School directors, teachers and students from Lombardy describe their experience", *Journal of Educational, Cultural and Psychological Studies (ECPS Journal)*, 13, pp. 97-117.
- Sfard A. (2008), *Thinking as communicating: human development, the growth of discourses, and mathematizing*, Cambridge University Press, Cambridge.
- Truffelli E., Vannini I. (2021), "Convinzioni e atteggiamenti degli insegnanti di scuola primaria italiani e orientamento all'uso formativo delle prove INVALSI di Matematica", in P. Lucisano (a cura di), *Ricerca e didattica per promuovere intelligenza comprensione e partecipazione*, Pensa Multimedia, Lecce, pp. 376-395.

- Vaccaro V., Faggiano E., Ferretti F. (2021), “Consapevolezza degli insegnanti delle ragioni degli errori degli studenti”, in P. Lucisano (a cura di), *Ricerca e didattica per promuovere intelligenza, comprensione e partecipazione*, Pensa Multimedia, Lecce, pp. 411-430.
- Weiner B. (1985), “An attribution theory of achievement motivation and emotion”, *Psychological Review*, 92, pp. 548-573.
- Zan R., Baccaglioni-Frank A. (2017), *Avere successo in Matematica: strategie per l'inclusione e il recupero*, UTET, Torino.
- Zan R. (2016), *I problemi di Matematica. Difficoltà di comprensione e formulazione del testo*, Carocci Faber, Roma.

Gli autori

Francesco Annunziata, laureato in Sociologia e Politiche per il territorio presso l'Università degli Studi di Salerno, lavora nell'area Indagini internazionali dell'INVALSI, si occupa del supporto alla somministrazione delle prove internazionali, monitoraggio delle prove e verifica della congruenza dei dati per le indagini OCSE e IEA.

Barbara Balconi, Ricercatrice presso il Dipartimento di Scienze umane per la formazione "Riccardo Massa", dell'Università degli Studi di Milano-Bicocca. I suoi principali interessi di ricerca sono: il processo di insegnamento apprendimento, la formazione degli insegnanti, la didattica generale e le didattiche disciplinari. È membro del centro di ricerca CRESPI – Centro di ricerca educativa sulla professionalità dell'insegnante.

Ivan Graziani insegna Matematica e Scienze. Formatore in Didattica della Matematica. Esperto di progettazione e valutazione educativa. Appassionato di problem solving e comunicazione didattica. Fa parte del "Gruppo di Ricerca e Sperimentazione in Didattica della Matematica – Pisa" (GRSDM) e del gruppo di ricerca "Divertical-Math". Collabora da anni con UNIBO, INDIRE, INVALSI e Mondadori-Rizzoli educational. È membro delle Equipe formative territoriali per la diffusione del PNSD.

Annarita Monaco è PhD in Psicologia sociale, dello sviluppo e della ricerca educativa. È insegnante di scuola primaria, tutor coordinatrice del tirocinio e docente di Laboratorio nei percorsi riservati ai futuri maestri e agli specializzandi dei corsi di sostegno, dall'infanzia alla secondaria. È membro del NRD di Bologna e del Centro di ricerca CRESPI. I suoi principali interessi di ricerca sono: problem solving e problem posing; lingua e linguaggi nell'educazione matematica.

Ottavio Giulio Rizzo è ricercatore in Matematica all'Università degli Studi di Milano. I suoi principali interessi di ricerca sono l'insegnamento-apprendimento della Matematica nei corsi di servizio universitari, la formazione pre-servizio degli insegnanti, le applicazioni alla crittografia della Geometria aritmetica.

Chiara Saletti, docente di scuola primaria, laureata in Materie letterarie, tutor coordinatore UNIFI, autrice di testi scolastici e articoli di Didattica della Matematica. Collabora con Giunti come consulente su valutazione. Esperta formatrice OM 172/2020 e NEV SNV. Si occupa di valutazione con formazione acquisita presso MIUR, INDIRE, INVALSI e POLIMI.

Giada Viola, dottoranda in Didattica della Matematica presso l'Università di Ferrara. Nel 2019 ha conseguito la laurea triennale in Matematica, sviluppando la tesi sulle prove INVALSI. Nel 2021 ha conseguito la laurea magistrale in Matematica presso Sapienza Università di Roma, sviluppando la tesi su attività della teoria dei giochi. Svolge diverse ricerche in ambito della Didattica della Matematica.

VAI SU: www.francoangeli.it

**PER SCARICARE (GRATUITAMENTE)
I CATALOGHI DELLE NOSTRE PUBBLICAZIONI
DIVISI PER ARGOMENTI E CENTINAIA DI VOCI:
PER FACILITARE LE TUE RICERCHE.**

Management & Marketing
Psicologia e psicoterapia
Didattica, scienze della formazione
Architettura, design, territorio
Economia
Filosofia, letteratura, linguistica, storia
Sociologia
Comunicazione e media
Politica, diritto
Antropologia
Politiche e servizi sociali
Medicina
Psicologia, benessere, auto aiuto
Efficacia personale, nuovi lavori



FrancoAngeli

FrancoAngeli

a strong international commitment

Our rich catalogue of publications includes hundreds of English-language monographs, as well as many journals that are published, partially or in whole, in English.

The **FrancoAngeli**, **FrancoAngeli Journals** and **FrancoAngeli Series** websites now offer a completely dual language interface, in Italian and English.

Since 2006, we have been making our content available in digital format, as one of the first partners and contributors to the **Torrossa** platform for the distribution of digital content to Italian and foreign academic institutions. **Torrossa** is a pan-European platform which currently provides access to nearly 400,000 e-books and more than 1,000 e-journals in many languages from academic publishers in Italy and Spain, and, more recently, French, German, Swiss, Belgian, Dutch, and English publishers. It regularly serves more than 3,000 libraries worldwide.

Ensuring international visibility and discoverability for our authors is of crucial importance to us.

FrancoAngeli



torrossa
Online Digital Library

L'INVALSI si è trovato spesso a dover rispondere a domande sulle sue prove. Come nascono? Cosa misurano? Le prove nascono dal lavoro di oltre duecento autori, selezionati tra insegnanti e dirigenti scolastici, che vengono aiutati per la parte metodologica da esperti nazionali e internazionali. Le domande, dopo aver superato una prima selezione, vanno a comporre un fascicolo provvisorio che viene pre-testato su un campione di alcune migliaia di ragazzi dell'ordine e del grado a cui sono rivolte. Tutto questo per verificarne precisione, equità, capacità di misurazione e identificare eventuali problemi. Segue una seconda fase di lavoro in cui le domande vengono modificate e testate nuovamente su un altro campione di ragazzi per essere certi che ogni problema sia stato risolto. Il prodotto finale è quindi uno strumento preciso e affidabile che permette a chi studia i risultati conseguiti nelle Rilevazioni nazionali di individuare i campi di intervento nei processi di apprendimento. Nel volume qui descritto sono riportati cinque lavori sulle prove di Matematica delle Rilevazioni nazionali e internazionali presentati durante le giornate del VII Seminario "I dati INVALSI: uno strumento per la ricerca e la didattica" (Roma, 27-30 ottobre 2022).

Come Servizio Statistico ci auguriamo che i contributi inseriti nel volume mostrino come non solo i dati rilasciati da INVALSI, ma anche gli stessi strumenti possano essere utilizzati proficuamente per attivare dei percorsi di miglioramento didattico.

Patrizia Falzetti, Dirigente tecnologa, è Responsabile del Settore della ricerca valutativa dell'INVALSI; è inoltre responsabile dell'Ufficio Statistico per il SISTAN e del Servizio Statistico INVALSI, che cura l'acquisizione, l'analisi e la restituzione dei dati riguardanti le Rilevazioni nazionali e internazionali (OCSE e IEA) sugli apprendimenti. Coordina e gestisce il processo di restituzione dei dati e delle analisi statistiche alle singole istituzioni scolastiche e al Ministero dell'Istruzione e del Merito.