

a cura di  
Laura De Carlo, Leonardo Paris

# Le linee curve

per l'architettura e il design

FORME DEL DISEGNO  
**FrancoAngeli**

## **FORME DEL DISEGNO**

Collana diretta da Elena Ippoliti, Michela Rossi, Edoardo Dotto

La collana FORME DEL DISEGNO si propone come occasione per la condivisione di riflessioni sul disegno quale linguaggio antropologicamente naturale, al tempo stesso culturale e universale, e che indica contemporaneamente la concezione e l'esecuzione dei suoi oggetti.

In particolare raccoglie opere e saggi sul disegno e sulla rappresentazione nell'ambito dell'architettura, dell'ingegneria e del design in un'ottica sia di approfondimento sia di divulgazione scientifica.

La collana si articola in tre sezioni: PUNTO, che raccoglie contributi più prettamente teorici su tematiche puntuali, LINEA, che ospita contributi tesi alla sistematizzazione delle conoscenze intorno ad argomenti specifici, SUPERFICIE, che presenta pratiche ed attività sperimentali su casi studio o argomenti peculiari.

Comitato editoriale - indirizzo scientifico

Carlo Bianchini, Pedro Manuel Cabezas Bernal, Andrea Casale, Alessandra Cirafici, Paolo Clini, Edoardo Dotto, Pablo Lorenzo Eiroa, Fabrizio Gay, Elena Ippoliti, Leonardo Paris, Sandro Parrinello, Fabio Quici, Michela Rossi, Andrew Saunders, Graziano Mario Valenti

Comitato editoriale - coordinamento

Andrea Casale, Elena Ippoliti, Leonardo Paris, Fabio Quici, Graziano Mario Valenti

Progetto grafico

Andrea Casale



Il presente volume è pubblicato in open access, ossia il file dell'intero lavoro è liberamente scaricabile dalla piattaforma **FrancoAngeli Open Access** (<http://bit.ly/francoangeli-oa>).

**FrancoAngeli Open Access** è la piattaforma per pubblicare articoli e monografie, rispettando gli standard etici e qualitativi e la messa a disposizione dei contenuti ad accesso aperto. Oltre a garantire il deposito nei maggiori archivi e repository internazionali OA, la sua integrazione con tutto il ricco catalogo di riviste e collane FrancoAngeli massimizza la visibilità, favorisce facilità di ricerca per l'utente e possibilità di impatto per l'autore.

Per saperne di più:

[http://www.francoangeli.it/come\\_pubblicare/pubblicare\\_19.asp](http://www.francoangeli.it/come_pubblicare/pubblicare_19.asp)

I lettori che desiderano informarsi sui libri e le riviste da noi pubblicati possono consultare il nostro sito Internet: [www.francoangeli.it](http://www.francoangeli.it) e iscriversi nella home page al servizio "Informatemi" per ricevere via e-mail le segnalazioni delle novità.

a cura di  
Laura De Carlo, Leonardo Paris

# Le linee curve

per l'architettura e il design

**FORME DEL DISEGNO**  
Sezione  
**PUNTO**

**FrancoAngeli**

Università Sapienza di Roma, dipartimento di Storia, Disegno e Restauro dell'Architettura

*In copertina:* immagine di Leonardo Paris

Copyright © 2019 by FrancoAngeli s.r.l., Milano, Italy.

L'opera, comprese tutte le sue parti, è tutelata dalla legge sul diritto d'autore ed è pubblicata in versione digitale con licenza *Creative Commons Attribuzione-Non Commerciale-Non opere derivate 4.0 Internazionale* (CC-BY-NC-ND 4.0)

*L'Utente nel momento in cui effettua il download dell'opera accetta tutte le condizioni della licenza d'uso dell'opera previste e comunicate sul sito*  
<https://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/deed.it>

## Indice

Presentazione Andrea Giordano	7
Introduzione Laura De Carlo, Leonardo Paris	11
<b>Parte prima</b>	
<i>Alle origini delle teorie geometriche</i>	
Le linee curve nell'evoluzione del pensiero geometrico nel periodo classico <i>Leonardo Paris</i>	19
Le linee curve tra geometria e analisi nel Rinascimento matematico <i>Laura De Carlo</i>	45
<i>Le linee curve nella progettazione della forma</i>	
Geometria delle linee curve per la genesi della forma <i>Marta Salvatore</i>	73
La rappresentazione digitale delle linee curve <i>Matteo Flavio Mancini</i>	109

Le linee curve per l'architettura e il design

## **Parte seconda**

La spirale cilindrica nelle scale rinascimentali e barocche <i>Leonardo Paris</i>	145
Lo spazio della linea. Il tiburio di Sant'Andrea delle Fratte <i>Giovanna Spadafora</i>	171
Le generatrici tecnologiche <i>Maria Laura Rossi</i>	183
Il ruolo delle curve generative nel design nautico <i>Michele Russo</i>	197
Le linee coniugate <i>Leonardo Paris</i>	211
Dalle linee curve alle superfici libere e viceversa nei modelli digitali dell'architettura <i>Matteo Flavio Mancini</i>	227
Traiettorie curvilinee tra architettura, teatro, cinema e design <i>Massimo Zammerini</i>	237
Linea, curva, taglio, cartamodello. Il disegno nel progetto anti-effimero della moda <i>Massimiliano Ciammaichella</i>	253
<b>English abstracts</b>	267
<b>Bibliografia</b>	275
<b>Gli autori</b>	285

## Presentazione di Andrea Giordano

*Questo volume si configura come un apparato critico/esegetico di una tematica che mi è particolarmente cara, la Geometria. Pienamente d'accordo con quanto asseriscono Laura De Carlo e Leonardo Paris nell'introduzione, questa disciplina, infatti, va intesa come centrale sia nello sviluppo progettuale dal punto di vista creativo che nella possibilità di rendere concreta una forma attraverso la sua effettiva costruzione. Concordo, inoltre, con loro nel ribadire l'importanza della Geometria solida come settore di ricerca, direi "ri-emergente", in grado di connettere e combinare geometria, architettura e design. Tutto questo è ampiamente e profondamente spiegato, provato ed illustrato dagli autori, anche grazie ad un eccezionale apparato grafico-documentale, in grado di comunicare sia il tema delle curve nella loro prospettiva storica (parte prima) che – attraverso alcuni casi studio esemplificativi – di affrontare l'utilizzo delle linee curve in diversi ambiti di applicazione (parte seconda). Lo scopo – effettivamente raggiunto – è quindi quello di ampliare il ventaglio degli strumenti critici da porre a disposizione del lettore: proponendo quindi molteplici punti di vista. Gli autori forniscono gli strumenti per raggiungere una completa consapevolezza nell'ambito dello studio delle linee curve attraverso le azioni del vedere, del pensare e del giudicare criticamente, un'architettura o un qualsiasi oggetto di design. L'utilizzo dei suddetti tre verbi – vedere, pensare e giudicare criticamente – mi*

## Le linee curve per l'architettura e il design

*consente di evidenziare che le linee e le superfici di un oggetto, anche nel caso dell'architettura, necessitano dello spazio per rendersi evidenti, spazio che viene sperimentato come il dato che precede gli oggetti in esso contenuti, un ambito nel quale ogni "cosa" prende il suo posto. D'altronde, proprio l'architettura può essere considerata come una disposizione di costruzioni entro uno spazio determinato, omogeneo e continuo. In termini fisici, così, lo spazio è definito dall'estensione delle superfici dei corpi, confinanti gli uni con gli altri. Il ruolo delle linee e delle superfici, quindi, risulta essere fondamentale, proprio perché agevola la percezione dello spazio che, sotto il profilo psicologico, avviene grazie all'involuppo di esse nell'atto di costituire le superfici delle "cose". Quantunque lo spazio, una volta stabilito, venga sperimentato come un dato sempre presente ed autosufficiente, la sua esperienza sensoriale nasce solo attraverso l'interrelazione degli oggetti. La percezione dello spazio si verifica, così, soltanto in presenza di cose percepibili: ed esse, non solo nel caso dell'architettura o degli oggetti di design, saranno costituite da linee e superfici, reali o virtuali. Sotto il profilo psicologico, inoltre, la nozione di spazio inteso come contenitore, che esiste cioè anche in assenza di oggetti, deve sempre far fede su di un sistema di riferimento, che potrà essere, nel caso dello spazio in cui viviamo, la semplice superficie calpestabile, nel caso dello spazio geometrico – "rappresentante" astratto della realtà –, i piani coordinati o il quadro, a secondo del metodo di rappresentazione.*

*Se rimaniamo ancora nel campo dell'esperienza dello spazio, bisogna fare riferimento ad un interessante "meccanismo" percettivo tra osservatore e realtà osservata, evidenziato da Arnheim<sup>1</sup> ne' La dinamica della forma architettonica. Il critico tedesco ipotizza che agli astronauti venga cancellato dalla mente il ricordo di tutti i corpi pesanti: in questa maniera, nell'osservare la Terra una volta ritornati, costoro istituiranno una connessione lineare che costituirà l'asse di un mondo unidimensionale. Il rapporto percettivo con l'oggetto sarà così "lineare". Anzi, come osserva Arnheim: «[...] la connessione stabilita dall'osservatore fra sé e la sua meta viene sperimentata come una retta. In linea di principio essa potrebbe assumere qualsiasi configurazione scelta fra un numero infinito di curve, cerchi o linee spezzate dei tipi più irrazionali. La scelta economica della connessione più breve costituisce un'elementare applicazione del principio di semplicità della psicologia della Gestalt: ogni pattern creato, adottato o selezionato dal sistema nervoso sarà quello più semplice consentito dalle condizioni date»<sup>2</sup>. Dopo di che, facendo un ulteriore passo in avanti, si ipotizza una condizione per così dire superficiale, quando Arnheim prende in considerazione, assieme al sistema astronauta-Terra, il Sole, come terzo punto di riferimento: per*

*il principio della semplicità, tale situazione creerà nella mente degli astronauti una struttura triangolare, essendo il triangolo la struttura più semplice compatibile con i tre punti. Si passerebbe, così, da un mondo unidimensionale, lineare, ad uno che esiste su una superficie, bidimensionale. Ed in questo sistema la terza dimensione non esiste, né interessa in che maniera quel piano triangolare sia orientato nello spazio. Arnheim infatti avverte il lettore: «Dal momento che abbiamo a che fare con l'esperienza psicologica dello spazio, molto dipende dal modo in cui l'osservatore concepisce, e quindi struttura, la situazione. Se per esempio altri oggetti si inserissero nella gamma dei tre già presenti e agissero in accordo con essi, ciò influirebbe sulla risultante costellazione. In questo caso, tutto dipenderebbe dalla forza relativa delle parti contendenti»<sup>3</sup>. Perciò la piattezza della situazione triangolare risulterebbe compromessa solo se il quarto oggetto fosse forte, determinando una disposizione tridimensionale, e il piano triangolare potrebbe essere sostituito da un poliedro, nel nostro caso con quattro spigoli e quattro facce.*

*Se, quindi, la conquista percettiva dello spazio avviene gradualmente, passando da una fase unidimensionale a quelle più complesse, bi- e tridimensionali, ci si rende conto che, prendendo in considerazione l'architettura – o qualsiasi altro lavoro umano che abbia a che fare con lo spazio –, il più semplice atto architettonico comporta un'operazione tridimensionale, dal momento che detto atto esiste grazie a un mattone (o qualsiasi altro materiale da costruzione) che è un oggetto a tre dimensioni, a sua volta costituito da linee e facce/superfici; tuttavia, anche dopo aver raggiunto la fase di percezione tridimensionale, ciò che un osservatore coglie, come configurative di quello spazio, saranno, nuovamente, linee e superfici, che conformano quell'architettura o l'ambiente circostante, con il loro sempre più vertiginoso intrico dinamico<sup>4</sup>.*

**1** Arnheim 1977.

**2** *Ivi*, p. 21.

**3** *Ivi*, p. 23.

**4** Cfr. Giordano 1999, p. 21.



## Introduzione

di Laura De Carlo, Leonardo Paris

Considerando la geometria al centro sia del processo creativo della progettazione che della concretizzazione della forma nella costruzione vera e propria, lo studio della geometria solida delinea un settore di ricerca attualmente emergente al confine tra geometria applicata e architettura, specie in un momento in cui l'analisi e la produzione si manifestano attraverso forme sempre più complesse. La geometria costruttiva contemporanea trova nella *architectural geometry* un grande potenziale che dimostra come le conoscenze geometriche possano essere alla base di un uso creativo del digitale.

La geometria descrittiva, nei suoi più recenti sviluppi, consente il controllo delle forme tridimensionali in uno spazio virtuale all'interno del quale le operazioni di costruzione e rappresentazione, anche dinamica, della forma si avvicinano al processo progettuale in architettura come nel design.

Gli attuali strumenti informatici, assai più potenti di quelli tradizionali, costituiscono da una parte il mezzo per semplificare e realizzare procedure semplici di problemi classici che, per la loro complessità, era prima impensabile affrontare in forma sintetica; dall'altra innesca un processo generativo della forma che va ben oltre il repertorio classico. Ciò grazie anche ai potenti strumenti parametrici per la generazione ed il controllo di forme complesse, sistemi dinamici modificabili in tempo reale che permettono di creare legami concettuali ed effettivi tra i diversi livelli di approfondimento progettuale.

## Le linee curve per l'architettura e il design

Gli studi che formano questa pubblicazione vogliono indagare, da ottiche diverse, il ruolo delle linee, in particolare le linee curve, intese come matrici formali di ogni processo creativo volto alla costruzione della forma in diversi campi di applicazione.

D'altronde le linee sono le figure geometriche che più frequentemente si incontrano nella teoria e nella pratica e lo studio delle teorie ad esse associate risultano indispensabili dal momento che la soluzione di un problema relativo alla costruzione della forma si riduce sempre al tracciamento di una o più linee e alla ricerca degli elementi ad esse comuni.

Lo studio delle proprietà e della delineazione di queste figure geometriche risulta fondamentale in tutto lo sviluppo storico della geometria a partire dall'antichità, basti pensare alla teoria delle coniche di Apollonio di Perga. Nonostante il notevole livello di conoscenza sulla geometria raggiunto nel mondo antico, soprattutto nel periodo ellenistico, anche in questo campo del sapere seguirà un lungo periodo di letargo cosicché è solo nel Seicento che si può parlare di una vera e propria teoria delle linee e delle superfici curve. Partendo dalla rivisitazione dell'eredità greca la scuola francese ed europea sviluppa le nuove teorie della geometria analitica e dell'analisi moderna in un arco temporale limitato che a ragione è stato chiamato il «Rinascimento matematico». Il contributo dell'analisi alla teoria delle curve porterà a descriverle secondo i principi cartesiani e sarà solo nella prima metà del Settecento che tali principi saranno estesi allo spazio per rappresentare quelle curve che nel sistema cartesiano a tre dimensioni saranno riferite a due piani di proiezione di un diedro solido e saranno perciò dette curve a doppia curvatura.

La corrispondenza tra le operazioni della geometria descrittiva e quelle dell'analisi informa lo studio di questi enti geometrici in ambito matematico, in un'altalenante ricerca tra geometria sintetica e geometria analitica che porterà Gino Loria a scrivere agli inizi del Novecento: «Pretendere che tutte le costruzioni di geometria descrittiva si riducano al tracciamento di rette e circonferenze e alla ricerca dei punti o delle tangenti a esso comuni, sarebbe certamente troppo; ma lo scopo a cui si deve tendere è questo che, senza introdurre ipotesi troppo restrittive alla esposizione dei dati, nelle costruzioni non entrino, all'infuori delle linee date (immaginate già completamente tracciate ovvero costruibili per punti e per tangenti) altre linee all'infuori di quelle il cui uso fu concesso ai geometri da Euclide il grande legislatore della scienza dell'estensione. Ora da quanto esponiamo emerge che tale intento si può spesso conseguire apportando lievi ritocchi alle costruzioni classiche».

Un primo ambito di interesse riguarda quindi i metodi di analisi delle curve, pia-

ne e gobbe, articolato in funzione delle loro proprietà analitiche, differenziali e geometriche e alla traduzione in forma sintetica di tali proprietà, nonché alla esposizione di alcune famiglie di curve. Un secondo ambito di approfondimento storico è stato quello dell'applicazione delle linee in alcuni specifici ambiti di costruzione di forme per l'architettura e per l'ingegneria. Si sono infine indagati gli aspetti più innovativi di costruzione della forma nel campo dell'architettura e anche in particolar modo nel campo del design in relazione alle specificità e alle potenzialità offerte dai più moderni sistemi tecnico-costruttivi.

Si è voluto inoltre indagare sulle possibili ripercussioni della conoscenza degli aspetti geometrici di questi elementi in ambito pratico nei campi dell'architettura e del design, accomunati da una stessa formazione culturale ma che si distinguono soprattutto nel ruolo che può assumere una specifica configurazione formale nella sua traduzione in un elemento architettonico e in un oggetto di design dove minori sono i vincoli tecnologici e funzionali.

La modellazione informatica, intesa come un vero e proprio laboratorio virtuale, permette di sperimentare e verificare le possibili e pressoché infinite configurazioni formali in grado di costituire la matrice progettuale della forma architettonica e dell'oggetto di design.

La costruzione di modelli digitali di rappresentazione permette di rivisitare le teorie classiche nella loro evoluzione storica esplicitando, attraverso idonee visualizzazioni, moltissime proprietà geometriche spesso relegate nell'alveo dell'analisi matematica e delle sue espressioni astratte.

Il volume è strutturato in due parti: la prima raccoglie quattro saggi teorici che affrontano il tema delle curve nella loro prospettiva storica. La seconda propone, in alcune esemplificazioni, l'uso delle linee curve in diversi ambiti di applicazione.

Nella prima parte si è voluto delineare un quadro teorico sulle origini delle teorie matematiche alla base della conoscenza delle proprietà di questi enti geometrici e sulla loro ricaduta nella progettazione della forma, sia in chiave storica che analizzando i più recenti strumenti digitali oggi a disposizione.

Si è voluto considerare un lungo arco temporale che va dal mondo classico alla rivoluzione cartesiana che irrompe nella matematica all'inizio del Seicento, ancora largamente dominata dal paradigma della matematica classica, fino all'invenzione del calcolo differenziale alla fine del secolo per poi esplorare le nuove vie della geometria sintetica tra Settecento e Ottocento e per verificare infine come questo lungo processo abbia avuto una ricaduta sui più recenti metodi di modellazione digitale.

## Le linee curve per l'architettura e il design

La seconda parte del volume raccoglie alcuni saggi dai quali emerge l'ampio spettro di possibili applicazioni sull'uso della linea curva nel processo progettuale: dall'architettura, al design, dalla nautica, al mondo della moda, dalle teorie geometriche degli ingranaggi, alle *freeform* dell'architettura contemporanea. Saggi che testimoniano l'importanza della conoscenza delle proprietà delle curve per la genesi e il controllo della forma.

# Parte prima



# **Alle origini delle teorie geometriche**



# Le linee curve nell'evoluzione del pensiero geometrico nel periodo classico

di Leonardo Paris

*Il cerchio è una figura piana contenuta da una sola linea,  
che dicesi circonferenza;  
alla quale quante linee rette pervengono tirate da un punto,  
che è dentro la figura, sono fra loro uguali.*  
Euclide

La definizione di circonferenza ripresa da una delle numerose edizioni degli elementi di Euclide<sup>1</sup> è significativa per due aspetti. La circonferenza è strettamente connessa al cerchio secondo una logica di algebra geometrica tipica del periodo ellenistico, distinta dall'algebra aritmetica delle civiltà precedenti<sup>2</sup>. La circonferenza è intesa come "luogo di punti" equidistanti da un punto. Anche questo concetto, che sarà esteso sempre nel periodo ellenistico alle coniche, rappresenta un importante indizio sulla evoluzione del pensiero geometrico antico.

Una evoluzione che purtroppo solo in piccola parte è documentata da fonti dirette ed in larga parte testimoniata dai numerosi studi successivi, spesso derivati direttamente dai testi classici andati persi.

**1** *Geometria Piana ossia I primi sei libri degli elementi di Euclide*, tradotti in italiano dall'Abate Fazzini, Napoli 1828.

**2** Non a caso nelle civiltà pre-ellenistiche gli studi sulle linee curve sono pressoché inesistenti.

Anche se Euclide è considerato unanimemente il padre della geometria occorre evidenziare che, con particolare riferimento al tema della linea curva, altri studiosi prima di lui si sono cimentati in alcune interessanti applicazioni e che, anzi, Euclide è tra quelli che l'ha meno approfondito.

Gli indizi riconducibili direttamente alle civiltà più antiche, come quella egiziana e mesopotamica, sono decisamente scarsi e non lasciano intravedere il raggiungimento di un pensiero geometrico maturo. Volendo quindi dare un inizio a questo breve racconto, si potrebbe senz'altro partire da quella che Carl B. Boyer<sup>3</sup> chiama «l'età eroica della Matematica», dal V secolo a.C. in poi in un'area geografica molto vasta intorno al Mediterraneo. A questo periodo risale la suddivisione dei saperi matematici nel famoso quadrivio (l'aritmetica, la geometria, la musica e l'astronomia), ai quali si aggiungeranno le arti del trivio (la grammatica, la retorica e la dialettica). Questo aspetto è significativo perché testimonia come la maturazione del pensiero matematico sia strettamente connessa all'interdisciplinarietà dei saperi da cui scaturisce l'esigenza di astrazione teorica di fenomeni tangibili.

Scrive Lucio Russo sul ruolo del pensiero scientifico greco in relazione allo sviluppo ed alla affermazione della cosiddetta scienza moderna: «Una migliore comprensione della scienza classica e dei suoi rapporti con la scienza moderna può far luce, in particolare, sulla struttura interna della scienza, i suoi rapporti con la tecnologia e gli altri aspetti della civiltà, l'origine e il possibile superamento dell'attuale frattura tra cultura umanistica e cultura scientifica»<sup>4</sup>. Testimonianze di studi risalenti al V secolo a.C. sulle proporzioni tra lunghezze di segmenti retti e/o circolari e tra aree fanno, per esempio, riferimento alla costruzione di alcune interessanti figure geometriche racchiuse da archi di circonferenza. Le lunule

<sup>3</sup> Boyer 1976.

<sup>4</sup> Russo 1996, p. 17.

Le linee curve nell'evoluzione del pensiero geometrico nel periodo classico

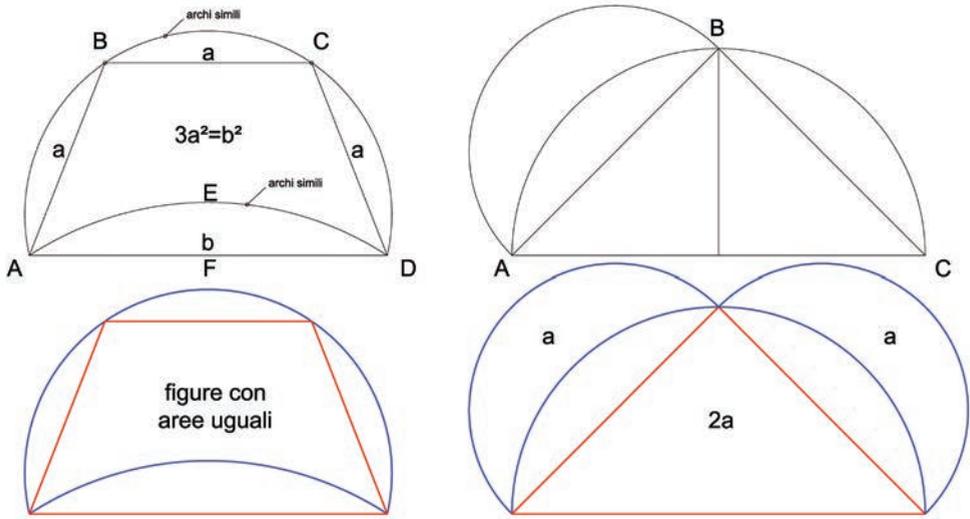


Fig. 1/ Alcune delle lunule descritte da Ippocrate.

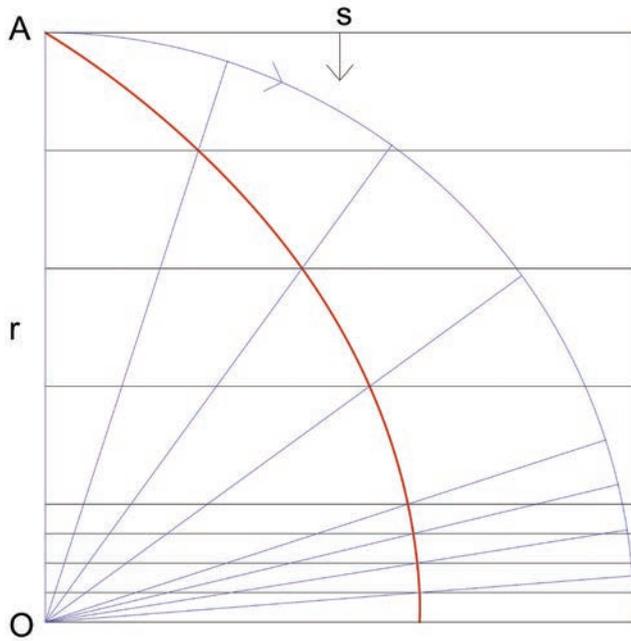
di Ippocrate di Chio (430 a.C.) per esempio, riprese subito dopo da Eudemo (attivo verso la fine del 320 a.C.) (fig. 1), sono state pensate con l'obiettivo di risolvere due dei tre grandi problemi dell'antichità, oltre a quello della duplicazione del cubo, cioè la quadratura del cerchio e la trisezione dell'angolo. Da questi primi studi deriva quella che potremmo definire la prima curva derivata dalla circonferenza, la trisettrice di Ippia<sup>5</sup>. La curva è generata dal movimento simultaneo di due lati perpendicolari di un quadrato. Il primo lato trasla verso il lato opposto, il secondo invece ruota (fig. 2). Questa curva ha consentito prima di tutto di risolvere il problema della trisezione di un angolo e successivamente è stata utilizzata anche per cercare di risolvere la quadratura del cerchio, probabilmente ad opera di studiosi successivi come Dinostrato. Per questo motivo la curva è anche nota come quadratrice.

L'evoluzione del pensiero geometrico al tempo di Platone e Aristotele (IV secolo a.C.) è riconducibile a due specifiche linee di ricerca. La prima, derivata dalla scoperta delle grandezze incommensurabili

<sup>5</sup> Ippia di Elide era un noto sofista attivo ad Atene nella seconda metà del V secolo a.C., di cui si hanno informazioni dirette dallo stesso Platone.

## Le linee curve per l'architettura e il design

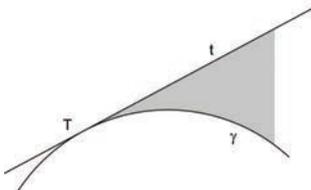
Fig. 2/ Trisettrice di Ippia.



li, si basa sul confronto tra configurazioni curvilinee e rettilinee. Esponente di spicco di questa scuola di pensiero è Eudosso di Cnido (morto verso il 355 a.C.) al quale si deve l'intuizione del cosiddetto "assioma di continuità" da cui deriverà il metodo di esaustione, cioè il precursore greco del calcolo integrale.

Questa intuizione geometrica intende tra l'altro risolvere le implicazioni geometriche connesse all'analisi del cosiddetto angolo di contingenza, cioè di quella parte di piano compresa tra una circonferenza e la tangente in un punto (fig. 3). Poiché la definizione di angolo si riferisce a due rette, l'angolo di contingenza non lo si può considerare come un vero e proprio angolo, ma la parte di piano delimitata da una semiretta e da un arco di circonferenza. Nella sua estensione rispetto ad un punto della circonferenza che si avvicina al punto di tangenza l'ampiezza di un angolo di contingenza va considerata nulla. Sempre ad Eudosso si deve l'altra linea di sviluppo della geometria curvilinea, quella collegata all'astro-

Fig. 3/ Angolo di contingenza.



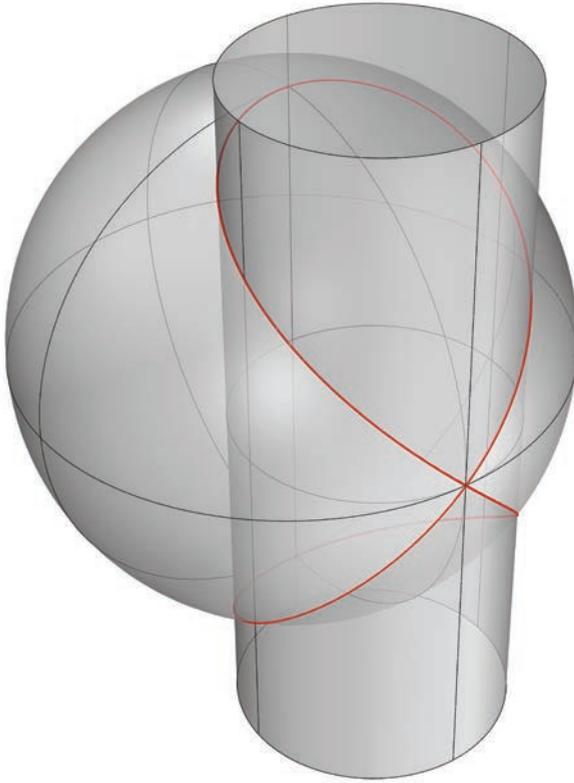
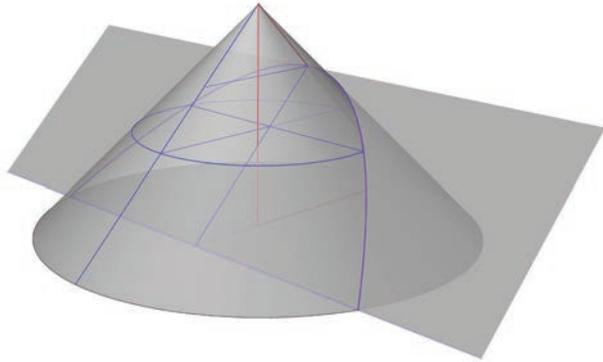


Fig. 4/ Lemniscata sferica. Linea definita dall'intersezione di una sfera con un cilindro tangente interno alla sfera stessa.

nomia. In questi studi viene descritta, per esempio, una particolare linea curva, la ippopeda o ferro di cavallo che solo in seguito verrà denominata lemniscata sferica, ottenuta per intersezione di una sfera con un cilindro tangente e interno alla sfera stessa (fig. 4). Lo schema astronomico di Eudosso deriva dalla combinazione di movimenti circolari del moto dei pianeti. L'importanza di questo studio prelude ad uno degli aspetti fondamentali sulla genesi delle linee curve nel momento in cui queste vengono individuate come intersezione di superfici geometriche. Già nel periodo pre-euclideo quindi si possono individuare due ben distinte modalità di analisi sulle linee curve, quello dato dalla combinazione di movimenti uniformi di un punto e quello derivato da intersezioni di superfici. L'altro aspetto rilevante è

## Le linee curve per l'architettura e il design

Fig. 5/ Cono di Menecmo con l'angolo al vertice di  $90^\circ$ .



l'evoluzione del pensiero algebrico di una matematica di stampo prevalentemente aritmetico, ereditato dalle culture precedenti, nell'algebra geometrica attraverso cui alcuni concetti potevano essere compresi più facilmente. Un esempio significativo sotto questo punto di vista è il noto dibattito, al tempo stesso scientifico e filosofico, sulle grandezze incommensurabili e sul concetto di infinito. Gli studi sulle coniche ne rappresentano sicuramente l'apice.

Il matematico greco al quale è indissolubilmente legato il concetto di conica è Apollonio di Perga (262-190 a.C.) al quale si deve un trattato interamente dedicato a questo tema. In realtà le tre curve piane, note come ellisse, parabola e iperbole, erano già note ai tempi di Apollonio per merito di un allievo di Eudosso (a sua volta allievo diretto di Platone), Menecmo. Certamente le coniche di Menecmo se confrontate con lo studio di Apollonio rappresentano solo un primo parziale approccio. Questo testimonia la significativa evoluzione del pensiero geometrico avvenuta nel giro di un secolo. In Menecmo il cono è inteso come rotazione di un triangolo retto intorno alla sua altezza. Questo comporta che la superficie, e quindi conseguentemente anche la curva ottenuta per intersezione piana, non è infinita. Menecmo parla di un particolare tipo di cono, circolare retto (non obliquo) con una sola falda, motivo per cui

## Le linee curve nell'evoluzione del pensiero geometrico nel periodo classico

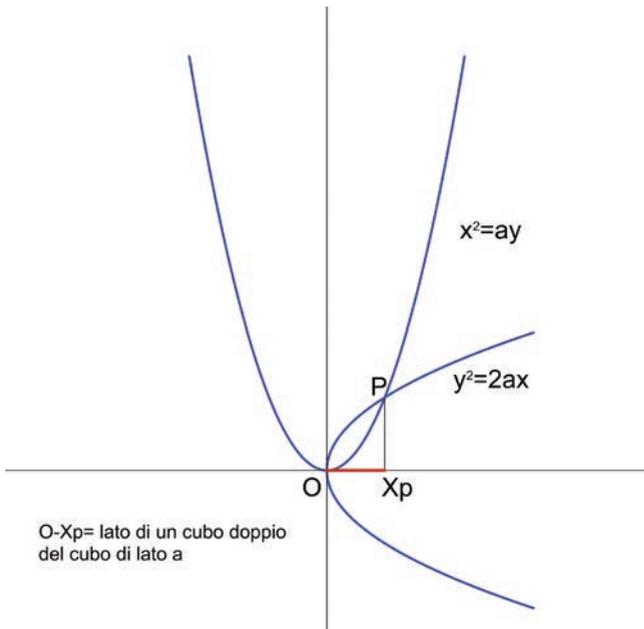


Fig. 6/ Combinazione di due parabole applicata alla duplicazione del cubo in Menecmo.

anche l'iperbole viene descritta come curva con un unico ramo. I suoi studi inoltre si riferiscono a condizioni geometriche particolari in cui, per esempio, il piano sezione è ortogonale ad uno dei lati del triangolo che genera il cono stesso (fig. 5).

Anche se non si hanno notizie certe è possibile ipotizzare, da commenti successivi, che Menecmo si sia imbattuto nelle coniche alla ricerca della soluzione di uno dei famosi problemi dell'antichità, quello della duplicazione del cubo. La combinazione infatti di due parabole ottenute per sezione attraverso il *latus rectum* consente di determinare il valore del lato del cubo di volume doppio rispetto ad un altro (fig. 6). Che la parabola potesse essere considerata come la conica principale e le altre due come casi particolari lo si potrebbe dedurre anche analizzandone l'etimologia. Il termine parabola in greco aveva, tra gli altri, anche il significato di confrontare, porre accanto. Questa curva pertanto poteva presumibilmente essere utilizzata come applicazione nella risoluzione di un problema specifico. Rispetto al caso corretto

(quello della parabola), il caso per difetto attingeva all'ellisse (il cui termine ancora oggi viene utilizzato per descrivere una diminuzione, una mancanza), il caso per eccesso all'iperbole (nel suo significato di esagerazione).

Abbiamo introdotto il tema delle coniche parlando di Apollonio, esponente di spicco insieme ad Euclide ed Archimede (287 a.C.) dell'età aurea della matematica greca. I contributi di Apollonio sono successivi a quelli di Euclide ed Archimede. Abbandonando per un momento l'ordine cronologico della narrazione continuiamo il discorso sulle coniche iniziato con Menecmo.

Ad Apollonio è riconosciuta una enorme produzione scientifica anche se sono soltanto due i trattati tramandati in forma quasi completa, *Sezione di un rapporto* e *Le coniche*.

Quest'ultimo è senza dubbio il suo capolavoro composto da otto libri, di cui i primi quattro originari. Degli altri ne sono noti tre grazie a trascrizioni successive. Quello che colpisce è la completa generalizzazione del problema di sezione di un cono, retto od obliquo<sup>6</sup>, infinitamente esteso<sup>7</sup>.

Più volte nel suo trattato Apollonio rimarca la differenza dei suoi studi rispetto a quello dei suoi predecessori e contemporanei, anche rispetto all'opera di Euclide. Molte delle proprietà enunciate da Apollonio sono ancora oggi pienamente valide e su alcuni concetti è tale l'astrazione teorica che soltanto secoli dopo ne verrà compresa l'utilità nei campi, per esempio, della cinematica, della cartografia e soprattutto dell'astronomia. Interessante è l'individuazione di particolari rette denominate diametri coniugati e delle loro proprietà in relazione all'individuazione delle tangenti in un punto delle coniche. Se nell'accezione moderna i diametri coniugati sono in qualche modo connessi al concetto di retta perpendicolare ad una conica è interessante rileva-

**6** Apollonio fu il primo matematico a mostrare che le proprietà delle curve non cambiano se intersecate in coni obliqui o in coni retti.

**7** Apollonio definisce un cono circolare come rotazione di una retta prolungantesi all'infinito, passante sempre per un punto fisso, lungo la circonferenza di un cerchio (che non contenga il punto fisso), in modo che passi successivamente attraverso ogni punto di quella circonferenza, generando così un cono doppio.

re come Apollonio le sfrutti invece per determinare i segmenti massimi e minimi che si possono tracciare rispetto ad una conica.

Vi sono evidentemente alcune mancanze come per esempio la parte relativa alle proprietà focali delle coniche mentre risulta essere particolarmente interessante l'associazione dei punti delle coniche a rette di riferimento (per esempio come detto i diametri coniugati obliqui) secondo una logica di relazione analitica che sembra anticipare di 1800 anni la geometria analitica di Descartes.

Nonostante l'alto livello scientifico della *Coniche* di Apollonio, apice delle conoscenze geometriche del II secolo a.C., occorre sottolineare come a quel tempo non c'era ancora piena consapevolezza di una teoria geometrica delle linee curve. Boyer sostiene che «gli antichi trascurarono quasi completamente il ruolo che curve di vario genere svolgono nel mondo che ci circonda. Sebbene fossero fra i popoli più dotati di senso artistico di tutti i tempi, le uniche curve che essi trovarono in cielo e sulla terra erano combinazione di cerchi e di rette. Essi non sfruttarono neppure efficacemente i due mezzi di definizione delle curve che avevano riconosciuto. L'approccio cinematico e l'uso di sezione piane di superfici sono suscettibili di vaste generalizzazioni; ciononostante agli antichi erano note appena una dozzina di curve. Persino la cicloide, generata da un punto di un cerchio che rotola lungo una retta, sembra essere sfuggita alla loro attenzione»<sup>8</sup>.

Abbiamo iniziato questo capitolo parlando di Euclide perché è unanimemente riconosciuto come il padre della geometria. Il suo trattato, gli *Elementi*, composto verso il 300 a.C. rappresenta indubbiamente uno spartiacque anche se, come abbiamo visto, ai suoi tempi il pensiero geometrico su alcuni specifici temi era già pienamente maturo. La fortuna degli *Elementi* è dovuta sicuramente alla novità

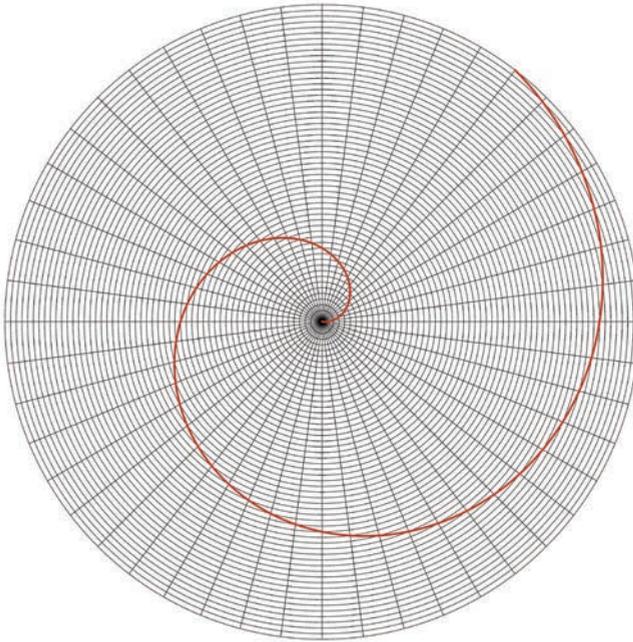
<sup>8</sup> Boyer 1976, p. 224.

nell'impostazione di un trattato scientifico secondo definizioni e postulati ma anche alla diffusione delle sue numerose riedizioni, alcune delle quali anche con significative rielaborazioni, che gli hanno consentito di accrescere progressivamente la sua fama fino ai giorni nostri. Negli *Elementi* non si parla però di linee curve se non, come detto all'inizio, della circonferenza. Euclide ha studiato le coniche scrivendone un trattato di cui però non si ha più traccia e che, a detta dello stesso Apollonio, conteneva molte limitazioni. Di fatto se anche Euclide avesse avuto coscienza di una teoria delle linee curve conosciute a quel tempo l'opera quasi coeva di Apollonio da una parte e di Archimede dall'altra ne hanno definitivamente fatto perdere le tracce.

Se parlando di coniche lo studioso di riferimento è indubbiamente Apollonio, parlando di spirali il principale riferimento è, altrettanto indubbiamente, Archimede. «Ebbe Archimede tanto alti pensieri, sì profondo intelletto, e sì ricco tesoro di contemplazioni geometriche, che non volle lasciare scrittura alcuna di questa arte, da cui acquistò gloria e nome non d'umana conoscenza, ma più tosto di divina sapienza: anzi avendo tenuta per vile e per meccanica ogni cognizione che porta utile per metterla in uso, impiegò l'ingegno e lo studio in quelle sole, nelle quali la beltà e l'eccellenza non fusse mista con la necessità»<sup>9</sup>. In questo bellissimo elogio Plutarco descrive il personaggio Archimede passato alla storia non solo per i suoi temibili marchingegni militari ma anche per l'amore e la profonda conoscenza della geometria. «Onde non è da discredere a quanto fu detto di lui, che sempre rapito da certa particolare e seco abitante sirena, obliava il bere e 'l mangiare, e abbandonava ogni coltura del suo corpo, e spesso trainato a forza da' suoi servidori al bagno per lavarsi ed ungersi, disegnava nella cenere del focolare le figure di geometria, e col dito tirava le linee sopra 'l corpo

<sup>9</sup> Da *Le vite parallele* di Plutarco volgarizzate da Marcello Adriani, tratte da un codice autografo inedito della Corsiniana, vol. 2. Firenze: Le Monnier, 1859. Il testo è inserito nella parte dedicata alla vita di Marcello §XVII.

Fig. 7/ Spirale di Archimede.



suo mentre l'ungevano, tanto era trasportato fuor di sé da gran diletto che sentiva, e rapito veramente dall'amor delle Muse»<sup>10</sup>.

Nel 1906 uno studioso danese, J.L. Heiberg, trovò a Costantinopoli una vecchia pergamena che celava niente meno alcuni testi originali di epoca ellenistica. Vennero così scoperti alcuni scritti di Archimede tra i quali l'unica copia esistente de *Il metodo* e un altro trattato, *Sulle spirali*.

La spirale di Archimede com'è noto è una curva piana che descrive la traiettoria di un punto che si sposta uniformemente lungo una semiretta mentre questa ruota uniformemente attorno al suo estremo (fig. 7).

Lo studio di questa curva è molto probabilmente collegato allo studio dei tre famosi problemi classici della geometria, tra i quali la trisezione dell'angolo e la quadratura del cerchio<sup>11</sup>.

La trisezione dell'angolo è ben evidente nella costruzione grafica della spirale in cui il vertice dell'angolo

<sup>10</sup> Cfr. nota 9.

<sup>11</sup> Si tratta ovviamente di una costruzione non esatta in quanto la quadratura del cerchio dipende dalla caratteristica trascendentale di  $\pi$  quindi non costruibile con riga e squadra.

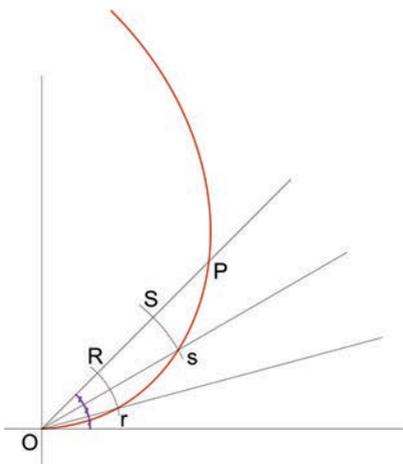
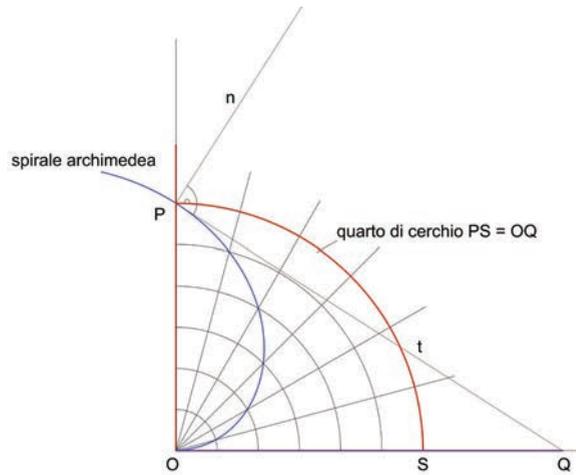


Fig. 8/ Trisezione dell'angolo tramite l'uso della spirale.

Fig. 9/ Costruzione grafica di base per la quadratura del cerchio di Archimede.



coincide con il punto iniziale  $O$ ; una delle due rette che definiscono l'angolo coincide con la posizione iniziale della semiretta che ruota intorno ad  $O$  (fig. 8). Scelta a piacere una retta che forma un angolo in  $O$  con la retta iniziale questa seziona la spirale in un segmento che suddiviso in  $n$  parti consente di determinare, tramite circonferenze di centro  $O$ , altrettanti punti di suddivisione della spirale che consentono a loro volta di suddividere l'angolo in  $n$  parti uguali.

Un altro concetto geometrico desumibile dagli studi di Archimede sulla spirale riguarda la determinazione della retta tangente alla curva, primo caso applicato ad una curva diversa dalla circonferenza.

L'aspetto forse più interessante di questo tema è che, seguendone il ragionamento, Archimede relazioni la retta tangente alla risultante dei due moti componenti la curva, determinata mediante il parallelogramma della velocità. Una anticipazione del calcolo differenziale applicato alla cinematica.

Sempre Archimede utilizza le proprietà geometriche della sua curva per cercare di risolvere la quadratura del cerchio. Nella costruzione grafica di fig. 9 si può facilmente verificare come sia possibile determinare la lunghezza di un arco  $PS$  uguale al segmento rettilineo  $OQ$ , in cui  $PQ$  è una tangente alla spirale in  $P$

e  $OQ$  (definita sottotangente polare) è ortogonale a  $OP$  in  $O$ . La stessa costruzione grafica applicata partendo dal punto  $P$  ortogonale alla semiretta di partenza della spirale consente di determinare la lunghezza di un quarto della circonferenza di raggio  $OP$  e di conseguenza determinare la quadratura del cerchio.

Archimede ed Apollonio rappresentano il culmine degli studi geometrici in epoca ellenistica. Il periodo successivo sarà caratterizzato da una maggiore attenzione verso altre branche della matematica come per esempio la trigonometria ma in generale la tendenza sarà verso un lento declino del pensiero scientifico. È veramente difficile comprendere oggi le ragioni e le cause di quella che Lucio Russo ha definito una vera e propria rivoluzione dimenticata.

Come è noto dobbiamo ai Bizantini ed agli Arabi la conservazione e la successiva diffusione di quei testi che ci consentono oggi di apprezzare il livello speculativo raggiunto dai Greci.

Molte delle nozioni che sono alla base della moderna teoria delle linee fanno riferimento ad un periodo, il XVII secolo, che proprio per il suo radicamento scientifico nella cultura della tradizione greca è stato da alcuni definito «Rinascimento matematico». Di questo importante periodo storico si parlerà nel prossimo capitolo.

A conclusione di questo breve excursus sulle origini del pensiero geometrico con particolare riferimento allo studio delle linee curve è doveroso citare forse l'ultimo grande matematico greco autore di una mirabile *Collezione matematica*, Pappo di Alessandria vissuto tra la fine del III secolo ed i primi anni del IV. Nel libro III della *Collezione* Pappo distingue i problemi geometrici in piani, solidi e lineari. I primi si risolvono tramite cerchi e rette, i secondi con l'uso di coniche, gli ultimi necessitano di altri tipi di curve.

Nel richiamare tutte le nozioni già note ai tempi dell'età dell'oro Pappo raggiunge notevoli livelli di

generalizzazione di problemi geometrici nel Libro VII in cui descrive linee come luogo geometrico di punti in relazione ad una serie di linee rette, tre o quattro citando Apollonio, ma anche di più, fino a sei. «Nel caso di sei rette giacenti in un piano egli riconosceva che una curva è determinata dalla condizione che il prodotto delle distanze da tre delle rette abbia un rapporto fisso con il prodotto delle distanze dalle altre tre»<sup>12</sup>.

Dopo Pappo non sono noti altri contributi significativi sulla geometria. Bisognerà attendere ben otto secoli prima che un lento processo di riscoperta scientifica, avviato nel XII secolo grazie al dilagare delle traduzioni dall'arabo, consentisse il risveglio delle civiltà sfociato poco dopo nel Rinascimento.

### **Le linee curve in architettura**

Nella storia della scienza c'è sempre stato un rapporto stretto tra teoria ed applicazioni pratiche. Anche nel nostro ambito di studio, quello della geometria e più in dettaglio quello sulle linee curve, sono numerosi i campi di applicazione: il rilevamento e la topografia, la geografia e la cartografia, la meccanica, l'idrostatica, la pneumatica e l'astronomia.

L'architettura è spesso trascurata anche se, a ben vedere, si possono riconoscere alcune interessanti applicazioni soprattutto in epoca romana.

Solo a titolo esemplificativo, senza la pretesa di voler fare una trattazione esaustiva in merito ma solo come spunto iniziale per possibili approfondimenti, si possono citare alcuni casi interessanti: il rapporto tra ovale ed ellisse, la spirale nella voluta ionica, la curvatura dell'entasis delle colonne, la conformazione di archi e relativi sistemi voltati, la spirale cilindrica.

I primi due casi hanno un aspetto interessante che li accomuna e cioè la relazione tra due tipologie di curve concettualmente ben distinte ma che, in alcuni casi, possono assumere configurazioni apparentemente simili. Da una parte abbiamo delle curve

**12** Boyer 1976, p. 267. Sarà Renè Descartes (1596-1650) nella sua *Gèometriè* a riprendere e sviluppare il cosiddetto Problema di Pappo: «Tutti i problemi della geometria si possono facilmente ridurre a tali termini, che in seguito per costruirli basta conoscere la lunghezza di alcune rette».

continue definite come luogo dei punti quali l'ellisse e la spirale, dall'altra una curva composta da settori di circonferenza, cioè una policentrica, la cui apparente continuità viene garantita dall'unicità della tangente nel passaggio da un arco a quello successivo. Da un lato abbiamo delle curve che potremmo definire nobili perché oltre ad avere delle specifiche proprietà – molte delle quali già note ai greci ed altre scoperte successivamente con lo sviluppo delle altre geometrie (analitica e differenziale) – esistono in natura, seguono cioè delle leggi che prescindono dalla componente speculativa dell'uomo.

Nella realizzazione di alcuni artefatti l'architetto sente l'esigenza di copiare queste linee ma si rende anche conto che in alcuni casi, per motivi diversi, è più utile non "ricalcare" quelle linee nobili ma sovrascriverne altre, più "facili" da tracciare, più "semplici" da gestire nella pratica costruttiva.

Nel 1999 uscì un numero doppio della rivista *Disegnare Idee Immagini*<sup>13</sup> interamente dedicato al Colosseo. Al di là degli aspetti scientifici riguardanti gli studi e le ricerche derivate da una approfondita attività di rilievo strumentale, un tema ricorrente nei diversi contributi è stato quello della *querelle* sulla vera forma planimetrica del Colosseo.

Nonostante un approfondito rilievo geometrico è significativo il fatto che nello stesso numero della rivista trovino spazio le tue opposte tesi. Da un lato i sostenitori della forma ovale dall'altro quelli dell'ellisse (fig. 10).

Le dimensioni del Colosseo, il suo stato di conservazione e la mancanza di fonti documentali esplicite sul tema del tracciamento planimetrico di un anfiteatro hanno lasciato un'aurea di indeterminatezza. Mario Docci scrive «...le misurazioni fin qui effettuate ci consentono di sostenere che, allo stato attuale delle conoscenze, la forma del Colosseo che trova i maggiori riscontri è quella ovoidale»<sup>14</sup>.

**13** AA.VV. 1999. Si tratta di un numero doppio della rivista dell'allora Dipartimento di Rappresentazione e Rilievo, oggi Dipartimento di Storia, Disegno e Restauro dell'architettura della Sapienza Università di Roma.

**14** Docci 1999, p. 30.

## Le linee curve per l'architettura e il design

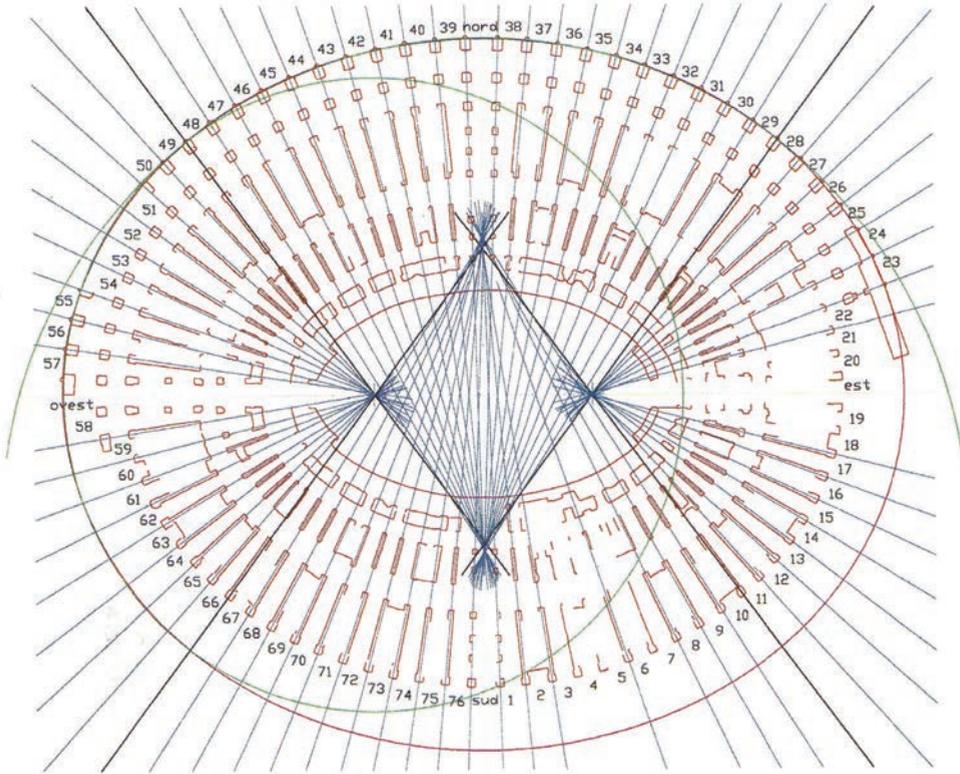


Fig. 10/ Studio geometrico sulla forma del Colosseo. Sovrapposizione di ellisse e policentrica. Da AA.VV. 1999, p. 81.

Di tutt'altra idea Roberto de Rubertis: «L'ellisse è l'elegante perfezione dello scorcio proiettivo del cerchio, non un suo surrogato; è la forma esatta a cui tende la circonferenza se omogeneamente deformata; è addirittura il caso generale di una conica chiusa, di cui il cerchio è solo un caso particolare. L'ellisse è dunque un concetto puro e universale che doveva essere presente in un monumento di così alto significato con tutta la pienezza della sua precisione geometrica. Altri anfiteatri hanno andamento meno rigoroso, per incuria, per ignoranza o superficialità dei loro maestri costruttori: il Colosseo doveva essere perfetto»<sup>15</sup>.

Sebbene orientato per l'ovale, Riccardo Migliari lancia un'ipotesi suggestiva: «Si potrebbe allora avanzare un'ipotesi alternativa, che mi sembra non priva

<sup>15</sup> De Rubertis 1999, p. 99.

del suo fascino. L'ellisse e l'ovale potrebbero essere entrambi incorporati nella pietra del Colosseo: l'ovale come matrice progettuale, l'ellisse come raffinata soluzione esecutiva. Se così fosse ci troveremmo di fronte a una testimonianza forte della mentalità romana: l'ovale guida il progetto consentendo una rapida definizione di tutti i parametri funzionali e il calcolo delle quantità; l'ellisse guida il solo profilo esterno, per compiacere un gusto raffinato e una sensibilità estetica che, come osserva Martines, noi abbiamo perduto. Ma questa è l'unica concessione che mi sento di fare all'ipotesi dell'ellisse»<sup>16</sup>.

Anche nel caso di applicazioni pratiche basate sulla spirale esiste in epoca romana questa ambiguità di fondo tra linea curva e sua apparenza. Studiando il disegno degli ordini architettonici ebbi modo di approfondire la forma del capitello ionico<sup>17</sup>. Sebbene lo studio si riferisse a soluzioni della trattatistica rinascimentale (fig. 11) il riferimento a Vitruvio, e quindi all'ordine di epoca romana, era sempre presente.

La voluta ionica, com'è noto, si ispira alla spirale archimedeica ma è, di fatto, una policentrica, cioè una linea curva composta da una serie di archi che si appoggiano progressivamente a diversi centri, due nell'Alberti, fino anche a dodici in Palladio (fig. 12). Nel caso della voluta ionica di epoca romana, o meglio di epoca vitruviana, la questione ha assunto le forme di un vero e proprio giallo. «La mancanza di precise indicazioni vitruviane sulla quantità e posizione dei centri per il tracciamento ha svincolato i trattatisti rinascimentali dal rapporto con il maestro impegnando ciascuno di loro nella definizione di una regola»<sup>18</sup>.

Molti studiosi rinascimentali hanno ritenuto di individuare la regola vitruviana andandola a ricercare tra le rovine di Roma. La più studiata e ritenuta, erroneamente, coeva di Vitruvio è quella applicata nel secondo ordine architettonico del Teatro di Marcello. Nel terzo libro delle *Antiquità* Sebastiano Serlio pre-

**16** Migliari 1999, p. 48.

**17** Cfr. Paris 2008.

**18** Paris 2008, p.89.

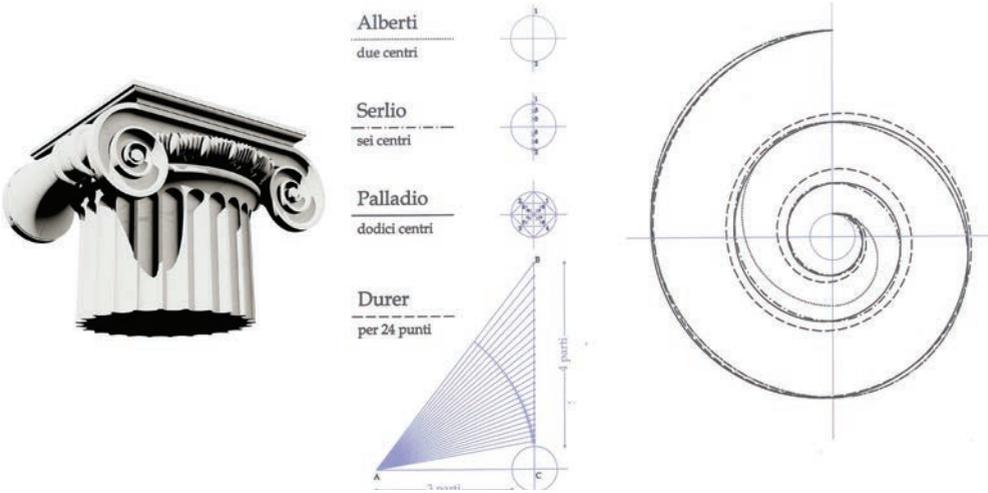


Fig. 11/ Disegno del capitello ionico. Tratto da Paris 2008, pag. 91 (modello di Leonardo Paris).

Fig. 12/ Voluta ionica e relazione con i suoi centri. Tratto da Paris 2008, pag. 88 (disegno di Leonardo Paris).

senta, come primo dei tre esempi di teatri romani, la pianta e l'alzato del Teatro di Marcello. Il commento di Serlio rivela quali riflessioni poteva suscitare l'esame del teatro antico e la ricostruzione della sua originaria forma architettonica. Misurare gli elementi compositivi superstiti ed analizzarne la disposizione doveva essere la dimostrazione della congruenza del monumento con i dettami compositivi di Vitruvio<sup>19</sup> che, nel suo trattato aniconico, descrive bene la procedura per individuare il centro della voluta in relazione al proporzionamento complessivo del capitello. Sulla costruzione della spirale è meno preciso. «Partendo dalla base inferiore dell'abaco, si descriva una spirale che vada restringendosi ad ogni quadrante di una misura uguale alla metà del diametro dell'occhio, fino a tornare nel quadrante di partenza sotto l'abaco». Non descrive la costruzione ed il posizionamento dei centri della policentrica rispetto al centro della voluta. Questa mancanza, come detto, ha dato adito ad un accesissimo dibattito tra cultori rinascimentali a partire dall'Alberti e che vede coinvolti Salviati, Barbaro, Durer, Palladio, Serlio, Philandrier, solo per citarne i principali.

Un recente studio<sup>20</sup> ripropone la spinosa questione

**19** Losito 1993. Cfr. anche Denise Andrey e Mirko Galli, Metodi geometrici del '500 per tracciare la voluta ionica, *Nexus Network Journal*, 2, 2004, vol. 6, <https://www.nexusjournal.com/volume-6/number-2-october-2004.html>.

**20** Cfr. Inglese 2017.

## Le linee curve nell'evoluzione del pensiero geometrico nel periodo classico

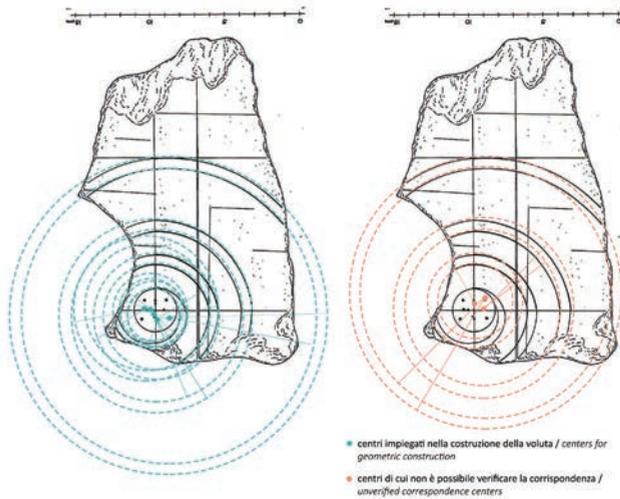


Fig. 13/ Lastra di marmo di Thysdrus, in Tunisia, risalente al II sec. d.C. Tratto da Inglese 2017, pag. 44 (elaborazione di Carlo Inglese).

già sollevata dagli studiosi rinascimentali alla ricerca di indizi (nel nostro caso fori che potessero essere assunti come i centri della spirale) da cui far risalire l'esatto grado di conoscenza dei romani sulla costruzione approssimata di questa linea.

Un esempio molto interessante è quello della lastra di marmo proveniente dalla città di fondazione romana Thysdrus, in Tunisia, risalente al II sec. d.C. (fig. 13). Sulla parte di lastra pervenuta fino a noi è incisa in scala al vero una voluta ionica. Un altro esempio, meno significativo per lo stato di conservazione, è quello di un resto di capitello ionico del Teatro Marittimo a Villa Adriana in cui, anche qui, sono visibili delle incisioni.

Purtroppo l'enigma che ha appassionato gli studiosi del rinascimento non trova qui una soluzione ben definita ma solo delle ipotesi. Così «..è lecito pensare che nella realizzazione dei capitelli ionici e delle relative volute si facesse ricorso a regole predefinite, a proporzionamenti dati, a costruzioni geometriche ricorrenti ma che, citando Serlio, alla teoria dovesse accompagnarsi l'esperienza dello scalpello chiamato a risolvere problemi di natura geometrico-proporzionali su manufatti di dura pietra»<sup>21</sup>.

<sup>21</sup> Inglese 2017, p. 49.

## Le linee curve per l'architettura e il design

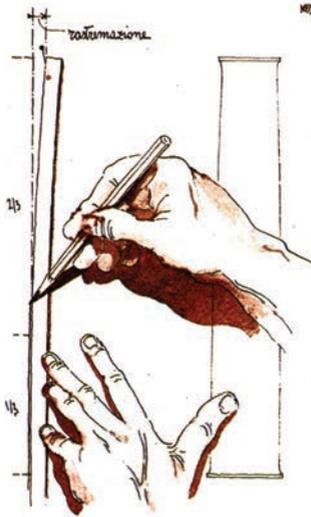


Fig. 14/ Disegno dell'entasis. Tratto da *Disegnare Idee Immagini* 2, 1991, p. 56 (disegno di Riccardo Migliari)

Altrettanto sconosciuta è la natura geometrica dell'entasis delle colonne negli ordini architettonici. La curvatura delle colonne è presente in moltissimi esempi di architettura antica ed il suo principale scopo era quello di compensare l'aberrazione percettiva. «La rastremazione delle colonne mediante l'aggiustamento del diametro in altezza si rende necessaria perché lo spettatore guarda dal basso verso l'alto. Infatti l'occhio ricerca il bello e se noi non intervenissimo a soddisfare le sue esigenze, alterando proporzionalmente le misure in modo da rimediare ad ogni difetto ottico, gli spettatori avrebbero una vista deformata e sgraziata. Alla fine del libro darò anche la formula del rigonfiamento delle colonne nella parte mediana, illustrandola con figure; insegnerò anche come si debba operare per conferirgli un aspetto armonioso e gradevole»<sup>22</sup>.

Purtroppo anche in questo caso Vitruvio, demandando la costruzione grafica alle tavole del libro, non ci aiuta a capire a quale tipo di linea curva faccia riferimento.

Seguendo le indicazioni di Riccardo Migliari, che a sua volta si rifà ad una bellissima descrizione di Palladio, si può disegnare l'entasis, sia in scala che al vero, appoggiandosi alla curvatura di un listello in legno al quale viene imposta all'estremità superiore una flessione, fermo restando il punto di attacco con la parte rettilinea della colonna, generalmente pari ad  $1/3$  dell'altezza complessiva (fig. 14).

In questo modo la colonna appare «alquanto gonfia nel mezzo, e si rastrema molto garbatamente»<sup>23</sup>. Oggi questo tipo di linea potrebbe essere calcolato secondo il metodo della linea elastica applicato ad una mensola con un'equazione matematica decisamente incomprensibile ai non addetti ai lavori. Rimane la consapevolezza, probabilmente condivisa già dai greci e dai romani, di come alcune curve ottenute, diremmo oggi, per via analogica, come per

<sup>22</sup> Vitruvio 27 a.C., p. 64.

<sup>23</sup> Palladio 1570, p. 15.

## Le linee curve nell'evoluzione del pensiero geometrico nel periodo classico

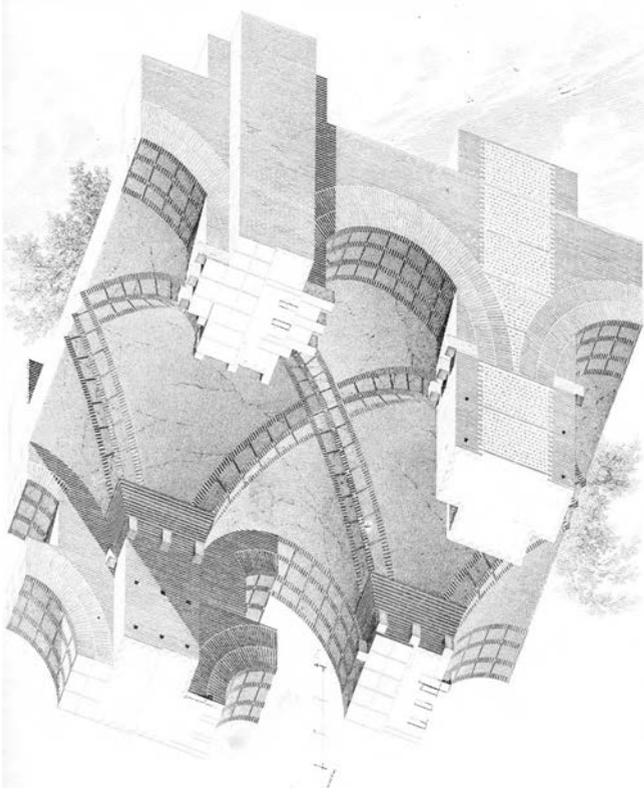


Fig. 15/ Volta a crociera con nervature sul Palatino. A. Choissy. Tratto da Adam 1988, p. 209.

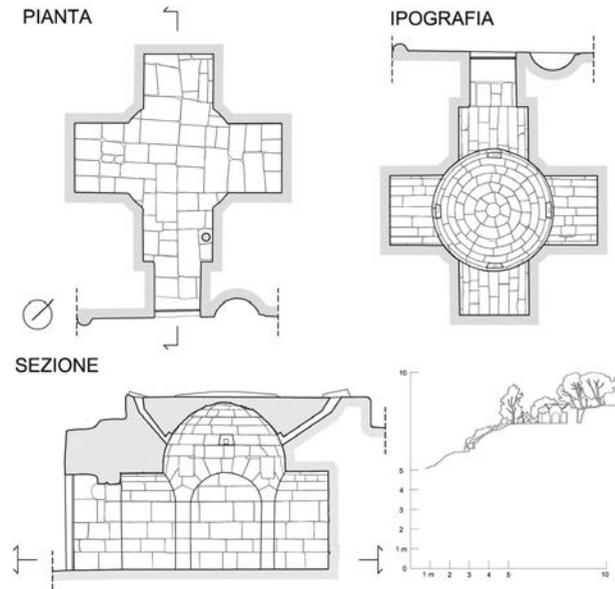
esempio la catenaria, mantengono inalterato il loro fascino e la loro funzione estetica.

Un altro ambito costruttivo in cui la linea curva assume un ruolo rilevante è quello dei sistemi voltati. In una volta a crociera classica le due linee di intersezione delle due superfici cilindriche sono delle ellissi. Qui non c'è alcuna possibilità di interpretazione. È una regola geometrica che i greci conoscevano bene, avendo studiato le coniche, e che anche i romani hanno applicato nello sviluppo delle loro tecniche costruttive (fig. 15).

Un aspetto interessante deriva dall'applicazione stereotomica nei sistemi voltati, quando cioè la superficie intradossata a vista non è il semplice negativo di centinature in legno a supporto di strutture in mattoni o in concrezioni, spesso poi intonacate, ma

## Le linee curve per l'architettura e il design

Fig. 16/ Tomba di Ummidia Quadratilla nel sito archeologico di Cassino (elaborato di rilievo di Robeto Di Maccio).



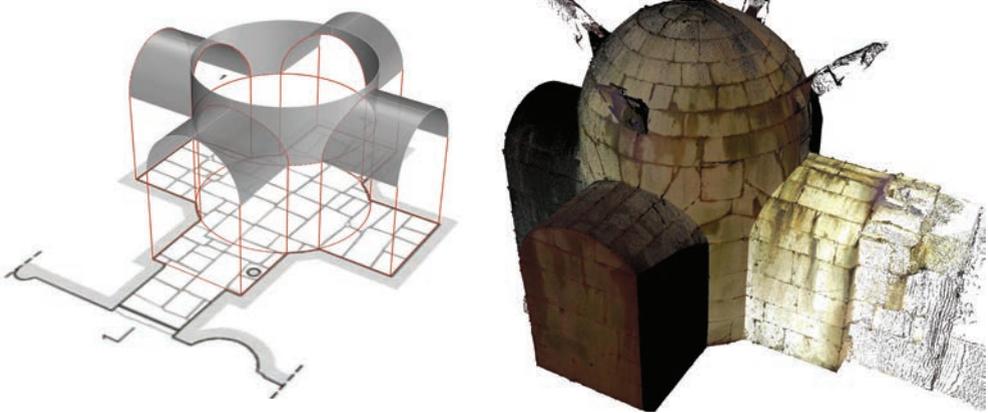
deriva da un taglio vivo di blocchi di pietra, in parte sgrossati in cantiere e poi rifiniti in opera.

Da questo punto di vista non sono moltissimi gli esempi di architettura greco-romana nei quali è possibile ammirare la precisione e raffinatezza delle intersezioni e degli incroci.

Il mausoleo di Teodorico di Ravenna (530 d.C.) presenta una bellissima volta a crociera stereotomica. Altri esempi precedenti si trovano in aree geografiche fuori dalla nostra penisola<sup>24</sup>.

Poco noto e anche poco studiato è un vero e proprio capolavoro stereotomico che si trova nell'area archeologica di Cassino. L'interno della Tomba di Ummidia Quadratilla (fig. 16) ha una forma a croce greca con quattro volte a botte che si raccordano ad una cupola emisferica tramite una superficie cilindrica disegnando una bellissima sequenza di quattro quartiche, cioè curve non piane, segmentate da una texture di linee orizzontali a spessore variabile. Colpisce la raffinatezza dello spigolo vivo di questi enormi blocchi in pietra che molto probabilmente

<sup>24</sup> Un esempio si trova nel Teatro di Filippopoli in Siria, databile intorno al 250 d.C. Cfr. Adam 1988.



sono stati prima sbizzati in basso, posti in opera tramite carrucole e poi rifinite in opera (fig. 17).

Per concludere questa breve digressione sulle linee curve nell'architettura del mondo antico, in particolare in epoca romana, un esempio (anzi due) particolarmente significativo in cui la linea non ha solo un ruolo geometrico ma anche una forte connotazione simbolica lo troviamo nel cuore della romanità. Guardando le colonne coclidi di Traiano (fig. 18) e di Marco Aurelio (fig. 19) si rimane affascinati non solo dalla dimensione ma anche dall'eleganza della fascia spiraliforme che avvolge il fusto della colonna in tutta la sua interezza.

L'andamento spiraliforme è marcato da una *corda* in rilievo che separa nettamente la fascia, che alcuni studiosi immaginano come una specie di fregio che si svolge a partire dal capitello dorico, nella quale sono scolpite le scene in bassorilievo che raccontano le gloriose gesta dei due imperatori.

All'interno delle due colonne si trova una scala a chiocciola che consente di raggiungere la terrazza sommitale che ospitava le statue degli imperatori. Entrambe queste colonne sono di tipo *centenario* cioè alte, escludendo i basamenti e le terrazze, 100 piedi cioè 29,78 metri.

Fig. 17/ Tomba di Ummidia Quadratilla nel sito archeologico di Cassino. Modello geometrico del sistema volta e nuvola di punti dell'aula interna (elaborazione di Leonardo Paris).



Fig. 18/ Colonna di Traiano.

Parlando della prima colonna, in ordine di costruzione, cioè la colonna Traiana (113 d.C), Gianciacomo Martines scrive: «La Colonna Traiana non è solo il gioco di un geniale progettista, nutrito della scienza greco alessandrina, ma di più è l'omaggio filosofico e morale ad un sovrano: un monumento di geometria, un congegno meccanico a scala di colosso bloccato nel tempo»<sup>25</sup>. Riguardo il riferimento al congegno meccanico Martines fa corrispondere il modello della struttura della Colonna alla vite di Archimede che, com'è noto, si basa sullo studio delle spirali.

Il nesso tra colonna coclide e spirale è quindi strettissimo e assume qui una doppia valenza: motore nascosto, non visibile, funzionale nello sviluppo della scala elicoidale interna; linea visibile della narrazione retorica in omaggio alla gesta dell'imperatore in cui il racconto, inserito in una geometria che sembra non avere inizio né fine, diventa solo uno degli infiniti racconti possibili sulla magnificenza della civiltà romana. Le due parti, interna ed esterna, non sono collegate geometricamente. La scala, dovendo rispettare delle regole geometriche rigorose per rispondere prima di tutto ad una esigenza funzionale, si sviluppa all'interno di 18 blocchi di marmo tutti uguali con 14 gradini per ogni giro. La fascia esterna ha un andamento più irregolare e si avvolge 23 volte per uno sviluppo in lunghezza di circa 200 metri.

Non sono molti gli studiosi che entrano in dettaglio sulla reale conformazione di questo nastro spiraliforme.

Bianchi Bandinelli annota<sup>26</sup> che l'altezza del fregio cresce con l'altezza, da 89 a 125 cm, in maniera da correggere la deformazione prospettica verso l'alto. La colonna coclide di Marco Aurelio (192-196 d.C) presenta molte analogie con quella di Traiano. Dal punto di vista geometrico si rileva che i roccchi sono leggermente rastremati verso l'alto e che il fregio spiraliforme, che si avvolge per 21 giri, ha un'altezza costante di circa un metro.

<sup>25</sup> Martines 1983, p. 65.

<sup>26</sup> Bianchi Bandinelli 2005.

Se si prende per buona la tesi di Bandinelli, cioè di un'altezza crescente del fregio, la colonna di Traiano avrebbe un andamento geometrico a dir poco sorprendente. La linea non sarebbe un'elica classica, contraddistinta da un movimento omogeneo del punto nelle due direzioni, ma avrebbe una pendenza variabile con un movimento accelerato in altezza<sup>27</sup>. Non disponendo di un rilievo accurato si è proceduto con una verifica fotogrammetrica speditiva<sup>28</sup>. Anche solo visivamente si osserva che il passo dell'elica è alquanto irregolare e non omogeneo. L'analisi della sinusoide data dalla proiezione della linea curva su un piano verticale corrispondente ad uno dei lati della colonna (fig. 20), quello sud-ovest allineato con la base, restituisce misure del passo (cioè la distanza tra i punti d'intersezione della linea curva con una generatrice verticale) che variano da 95 cm a 134 cm, ma non secondo la legge di progressione geometrica ipotizzata da Bandinelli. Escludendo le prime due misure, che dipendono dal punto di attacco e di arrivo della linea curva – e che quindi non sono significative – le altre sono tra loro variabili ma abbastanza simili, ad eccezione delle ultime due di dimensioni maggiori, rispettivamente 124 e 134 cm. Si può pertanto escludere la suggestiva ipotesi di una linea curva progettata secondo una legge di compensazione percettiva della deformazione prospettica; legge che i greci, come è noto, conoscevano dimostrando di saperla applicare in maniera molto raffinata.

Non è facile concludere questo capitolo. Si potrebbe continuare con molti altri esempi di architetture del periodo antico nei quali è significativo l'uso della linea curva, come per esempio nelle cattedrali gotiche o in tutte quelle realizzazioni stereotomiche costruite molto tempo prima della teorizzazione geometrica. Come detto all'inizio, lo scopo di queste brevi note



Fig. 19/ Colonna di Marco Aurelio.

**27** La linea in questo caso non sarebbe più una lossodromia del cilindro né tantomeno una geodetica.

**28** N. 24 immagini con Canon 350D, processate con Agisoft Photoscan. Dal modello 3D si è ricavata un'ortofoto scalata secondo l'altezza complessiva della colonna, 100 piedi cioè 29,67 m.

## Le linee curve per l'architettura e il design



Fig. 19/ Colonna di Traiano. Rilievo.

non è quello di farne una trattazione esaustiva – che potrebbe essere argomento di futuri sviluppi della ricerca – ma di evidenziare lo stretto legame tra evoluzione del pensiero geometrico ed evoluzione del pensiero artistico in cui l'architettura gioca un ruolo determinante. Si potrebbe pertanto concludere lasciando la parola al sommo Platone: «Sono ben d'accordo, disse, poiché la geometria è conoscenza di ciò che sempre è. Essa è dunque, o egregio amico, argano che tira l'anima verso l'alto lo sguardo [...] Dunque si dovrà raccomandare a coloro che vivranno nella nostra bella Repubblica di non trascurare in alcun modo la geometria»<sup>29</sup>.

<sup>29</sup> Platone, *Repubblica*.

# Le linee curve tra geometria e analisi nel Rinascimento matematico

di Laura De Carlo

*Finché l'algebra e la geometria procedettero su sentieri separati,  
il loro progresso fu lento e le loro applicazioni limitate.  
Ma quando queste scienze si unirono,  
trassero l'una dall'altra nuova vitalità  
e da allora in poi procedettero  
con passo rapido verso la perfezione.*  
J. L. Lagrange, *Leçons Élémentaires Sur Les Mathématiques*, 1795

Nel 1745 il pittore inglese William Hogarth pubblica nel frontespizio di una raccolta di incisioni un autoritratto con cane ponendovi, in basso, una tavolozza con sopra disegnata una linea, elegante e inusuale, definita senza spiegazioni «La Linea della Bellezza e della Grazia» (fig.1). La stessa linea la troviamo nel frontespizio del suo trattato di estetica, *L'analisi della bellezza*, pubblicato dallo stesso Hogarth nel 1753 e tradotto in italiano da autore anonimo nel 1761. In questa incisione, una base con scritto *variety* fa da supporto ad una piramide trasparente che racchiude un segno, apparentemente indecifrabile, una linea a forma di esse (figg. 2,3).

La bellezza per Hogarth consiste in una "linea"

## Le linee curve per l'architettura e il design

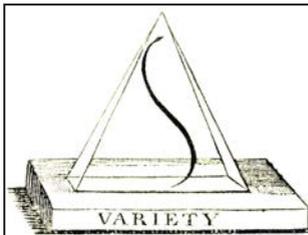
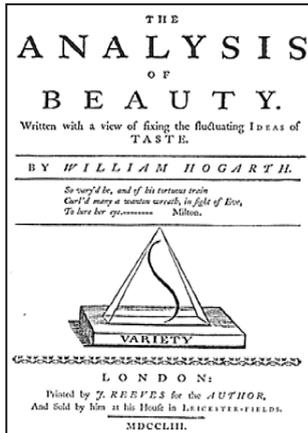


Fig. 1/ W. Hogarth, autoritratto con cane, dettaglio.

Fig. 2, 3/ Frontespizio e dettaglio del trattato di W. Hogarth *L'analisi della bellezza*.

(quella ondulata o a serpentina, di origine manieristica, poi barocca e rococò) e in un "metodo compositivo" (convenienza delle parti, varietà, semplicità, intrico, ecc.), consiste cioè in una "forma" indipendente da qualsiasi contenuto. Tale forma la si ritrova per eccellenza negli oggetti naturali (fiori, animali, il corpo umano), dai quali i pittori devono apprendere.

*L'analisi della bellezza* è un'opera anomala nel quadro dell'estetica settecentesca, si tratta più che di un saggio di estetica, di un trattato di pittura, un manuale tecnico-percettistico indirizzato ai «professionisti» dell'arte che mira a stabilire la "norma" della bellezza attraverso una serie di regole procedurali per realizzarla. Nelle due tavole che accompagnano il testo oggetti artistici sono affiancati ad oggetti comuni (statue, disegni anatomici, candelabri, corsetti, ecc.) secondo un programma di estetizzazione della realtà quotidiana legata alle nascenti arti industriali (fig. 4). Ciò che si evince dal trattato è dunque un principio per cui «qualunque cosa» è bella se ondulata e sinuosa. È l'affermazione della linea curva quale specchio della natura alla quale gli artisti dovranno fare riferimento.

A metà Settecento in ambito matematico sono già delineate nuove teorie delle curve basate sull'analisi mentre nell'architettura e nel design la linea curva è diventata da più di un secolo una costante figurativa che non si limitava a un mero tema decorativo ma individua un principio strutturale capace di determinare l'organizzazione degli elementi formali e che si confronta ora con l'interpretazione neoclassica.

In ambito matematico l'interesse per le linee curve muove da motivazioni diverse che investono un vastissimo campo di applicazioni nei settori più svariati. La matematica delle curve e le sue applicazioni dal Rinascimento in poi si occupano di diversi problemi: dalla meccanica alla balistica, dalla geodesia

## Le linee curve tra geometria e analisi nel Rinascimento matematico

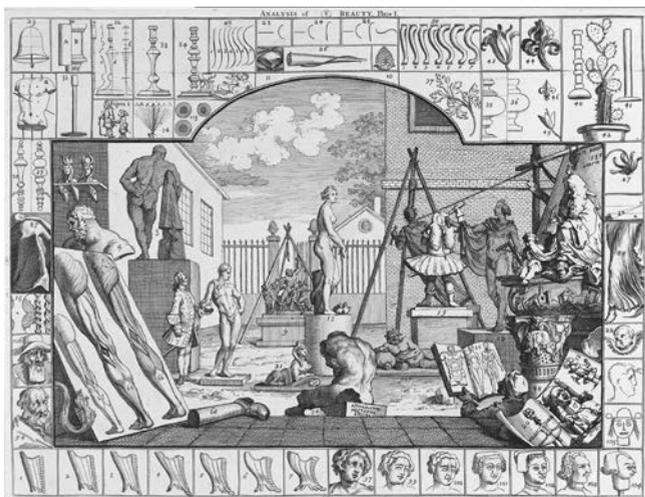


Fig.4/ Una delle due tavole che illustrano il trattato di W. Hogarth *L'analisi della bellezza*.

alla navigazione, dall'astronomia a diversi problemi tecnologici; principalmente nella convinzione che lo studio del mondo fisico sembrava aver bisogno di strumenti quantitativi, essenzialmente della geometria: gli oggetti sono forme geometriche e le traiettorie dei corpi mobili sono curve. Malgrado l'architettura sia ai confini di questi interessi, alla fine del XVIII secolo Jean Etienne Montucla nell'*Histoire des mathématiques* include l'architettura civile e militare tra i molti campi che possono essere trattati con la matematica.

Si può parlare di una vera e propria teoria delle linee e delle superfici curve solo quando il Seicento francese ed europeo rivisita la gloriosa eredità greca per entrare nel mondo della geometria analitica e dell'analisi moderna con una concentrazione di studi in un periodo temporale limitato che a ragione è stato chiamato il «Rinascimento matematico».

In poco più di un secolo si sviluppano nuove teorie matematiche, in un fenomeno che abbraccia un territorio geografico e culturale molto ampio e che vedrà sovrapporsi studi e applicazioni «in innumerevoli circostanze in cui si vede una stessa curva scoperta più volte, una stessa proposizione trovata di diffe-

renti autori, uno stesso problema trattato più volte come nuovo»<sup>1</sup>. La stessa pubblicistica di questi studi matematici si presenta in modo variato: da poderosi trattati ad articoli su riviste scientifiche, da memorie pubblicate da importanti accademie a corrispondenze epistolari. Una materia complessa e molto estesa che vede proprio nello studio delle linee curve l'avvio per la nascita delle nuove branche della matematica che si sviluppano tra il XVII e XVIII secolo.

La stessa terminologia utilizzata presenta delle incertezze. Il termine geometria analitica e in particolare "analisi" con il quale si individua la geometria cartesiana è introdotto da François Viète (1540-1603) in alternativa al termine "algebra" considerandolo più appropriato per descrivere le applicazioni dell'algebra alla geometria. Alla fine del Seicento Jacques Oznan (1640-1717) nel suo *Dictionnaire* afferma che i moderni effettuavano l'analisi mediante l'algebra, mentre nell'*Encyclopedie*, d'Alambert usa algebra e analisi come sinonimi. Nel XVIII secolo si consolida la convinzione che l'algebra applicata alla geometria sia il metodo fondamentale per introdurre e studiare le forme dello spazio. Pertanto la geometria analitica non è più considerata come uso del metodo algebrico, ma piuttosto in opposizione alla geometria sintetica.

Se la costruzione geometrica era stata solo una presentazione iconica, ora la matematica si dota di un suo autonomo linguaggio simbolico. L'opposizione "analisi/sintesi" segna la nascita della nuova scienza nel rapporto tra metodi algoritmici simbolici e metodi geometrici. Con il calcolo infinitesimale, considerato come un'estensione dell'algebra, le ambiguità terminologiche si accentuano; poiché algebra e analisi sono ancora considerati sinonimi il calcolo infinitesimale continuerà ad essere chiamato "analisi", e sarà così fino alla fine del XIX secolo denotando con questo termine tutti gli sviluppi basati sui limiti. Sarà

<sup>1</sup> Loria 1930a, prefazione p. V.

la geometria differenziale che, includendo il calcolo infinitesimale agli studi geometrici, riassumerà tutte le questioni fondamentali concernenti le curve così come oggi le conosciamo.

### La geometria delle coordinate

Proprio nella ricerca di metodi generali per studiare le curve, Pierre de Fermat (1608-1655) e René Descartes (1596-1650) applicarono l'algebra allo studio della geometria dando vita alla "geometria delle coordinate" e aprendo così uno dei filoni più ricchi e fecondi del pensiero matematico. Fermat giunge prima di Descartes a questo nuovo ramo della matematica, ma pubblicò le sue ricerche dopo la  *Géométrie*  di Descartes, ed è probabilmente per questa ragione che la scoperta della geometria analitica si considera indissolubilmente legata a Descartes, passando alla storia come geometria cartesiana. Lo scopo del nuovo metodo è quello di liberare la geometria dal ricorso a figure mediante i procedimenti dell'algebra e, nello stesso tempo, dare un significato alle operazioni dell'algebra per mezzo di un'interpretazione geometrica. Il punto di partenza è l'esigenza dei matematici del Seicento di superare la geometria dei greci.

L'ultima opera matematica dell'antichità, prima dell'oscurantismo che caratterizza un lungo periodo storico fino al Rinascimento, è l'opera di Pappo d'Alessandria (fig. 5) che nelle *Collezioni matematiche*<sup>2</sup> aveva dato una classificazione delle curve distinguendole in "luoghi piani", le curve che potevano essere costruite con la riga e il compasso, in "luoghi solidi", le sezioni coniche e in "luoghi lineari" tutte le altre curve, chiamate "meccaniche" dal momento che era necessario un meccanismo per poterle tracciare ed erano pertanto, per dirla con Kline, «fuori dal territorio della matematica legittima»<sup>3</sup>. Nell'opera di Pappo vengono enunciati, inoltre, molti teore-

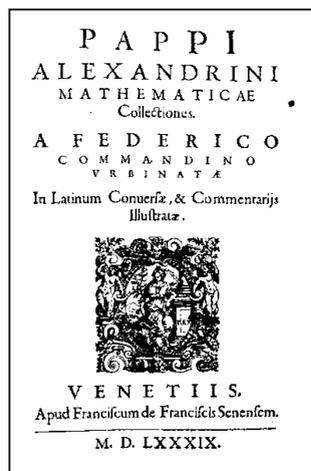


Fig.5/ Frontespizio dell'edizione del 1589 delle *Collezioni matematiche* di Pappo d'Alessandria curata da Federico Commandino.

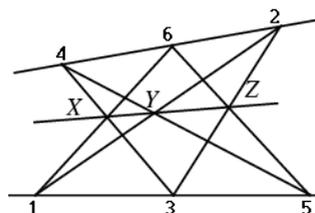


Fig.6/ Teorema di Pappo: dato un esagono di vertici 1, 2, 3, 4, 5, 6, se i vertici di indice dispari appartengono a una retta e quelli d'indice pari a un'altra retta complanare, allora i punti di incontro di coppie di lati opposti X, Y, Z sono allineati.

**2** Pappo di Alessandria compone le *Collezioni matematiche* intorno al 320, l'opera compare per la prima volta alla fine del Cinquecento nella traduzione latina di Federico Commandino e pubblicata a Pesaro nel 1588

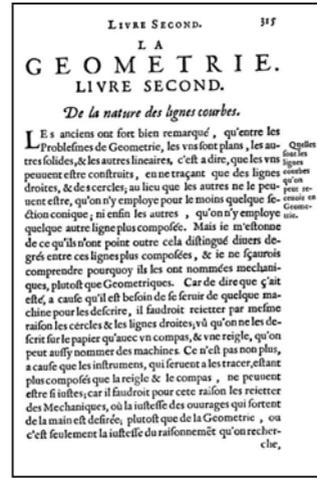
**3** Cfr. Kline 1991. Ed. orig. 1972, p. 186.

Le linee curve per l'architettura e il design



Fig.7/ Prima pagina dell'opera di Fermat *Ad locos planos et solidos isagoge*.

Figg.8, 9/ Frontespizio del *Discours sur le metodo* di Descartes e prima pagina de la *Géométrie*.



mi fondamentali tra i quali quello sugli esagoni che porrà le basi per quella che sarà la geometria proiettiva e che sarà un banco di prova sia per Descartes che per Fermat (fig. 6).

L'opera di Fermat sulla geometria delle coordinate compare per la prima volta nel *Ad locos planos et solidos isagoge* (fig. 7) pubblicato in *Varia opera mathematica* solo nel 1679; qui è chiaramente indicato il concetto di equazione di una linea, compresa la linea retta, applicato il metodo delle coordinate riferito ad assi tra loro ortogonali a differenza di Descartes che utilizza anche assi inclinati e trattato il problema delle equazioni delle coniche.

Descartes pubblica la sua *Géométrie*, insieme a *La Dioptrique* e *Les Météore*, come appendice al *Discours de la methode*<sup>4</sup>, nel 1637, senza chiarire se i tre saggi sono esempi di applicazione del metodo oppure se il metodo è una introduzione ad essi (figg. 8, 9).

La *Géométrie*, unico testo di matematica di Descartes, è divisa in tre libri: nel primo sono esposti i problemi che si possono costruire solo con cerchi e linee rette; nel secondo tratta la natura delle linee curve; nel terzo affronta la costruzione dei problemi solidi e, come lui li definisce, più che solidi.

<sup>4</sup> Il *Discours sur le metodo* è la prima opera pubblicata a Leida da René Descartes in forma anonima e in francese nel 1637. Il titolo esteso recita: *Discours De La Méthode Pour Bien Conduire Sa Raison Et Chercher La Vérité Dans Le Sciences*.

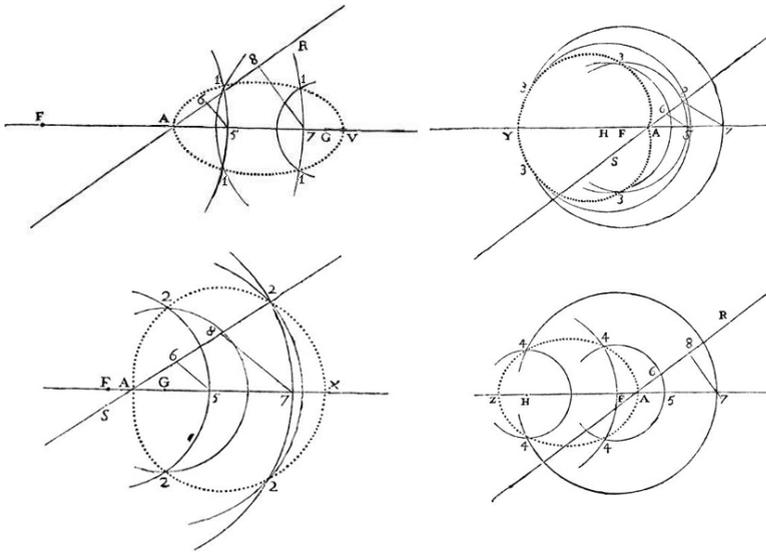


Fig.10/ Diverse configurazioni dell'ovale di Cartesio. La curva è il luogo dei punti P dove la distanza da due punti fissi detti fuochi è del tipo  $uPF + vPF' = c$  dove  $u$  è diverso da  $v$ . Da la *Géométrie*

Il metodo gli permette di superare la classificazione delle curve piane della geometria greca e di proporre una nuova classificazione in base al loro ordine, raggruppando quelle di primo e secondo, di terzo e quarto e così via.

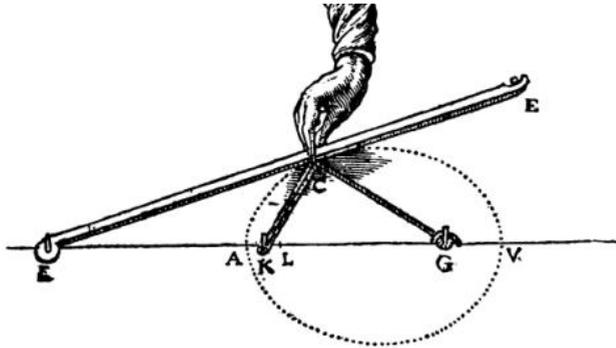
Obiettando che anche la retta e la circonferenza hanno bisogno di un qualche strumento per essere costruite, Descartes chiama "geometriche" tutte le curve che ammettono una costruzione meccanica e che sono espresse da un'unica equazione algebrica di grado finito, mentre chiamerà "meccaniche" tutte le altre. Sarà Gottfried Wilhelm von Leibniz (1646-1716), qualche decennio più tardi a sostituire i termini, "geometrica" e "meccanica" rispettivamente con "algebraica" e "trascendente".

Come sostiene Kline, «l'insistenza di Descartes sul fatto che sono curve accettabili quelle che hanno un'equazione algebrica segna l'inizio dell'eliminazione della costruibilità grafica come criterio di esistenza»<sup>5</sup>. Ampliando il concetto di curve possibili a tutte quelle espresse da un'equazione, il repertorio delle curve si allarga, si da una legittimazione alle

<sup>5</sup> Cfr. Kline 1991, p. 363.

## Le linee curve per l'architettura e il design

Fig.11/ Strumento disegnato da Descartes per tracciare l'ovale. Da la *Géométrie*.



curve di ordine superiore note nell'antichità e si apre il campo alla conoscenza di molte nuove curve. Diverse sono le applicazioni che lo stesso Descartes rivolge a problemi particolari. Ad esempio studia la curva che, per rivoluzione, genera la superficie di separazione tra due mezzi tale che i raggi uscenti dal primo si rifrangano nel secondo convergendo in uno stesso punto. Scopre così una curva di quarto grado, chiamata ovale di Cartesio, discussa nella *Dioptrique* e sviluppata nel II Libro della *Géométrie*<sup>6</sup> (figg. 10, 11).

### La nascita del calcolo infinitesimale

Dallo studio del moto la matematica deriva il concetto di funzione; vecchie e nuove curve vennero studiate mediante il moto. L'approccio è quindi cinematico, una curva è la traiettoria descritta da un corpo/punto in movimento e la tangente è la direzione del moto che il corpo percorre per inerzia una volta interrotta la legge del movimento.

La maggior parte delle funzioni introdotte nel XVII secolo furono studiate come curve, prima ancora che il concetto di funzione fosse definito. Sarà Leonhard Euler (Eulero 1707-1783), nel suo *Introductio in analysin infinitorum*, pubblicato a Lipsia nel 1748, a specificare il concetto di funzione, distinguendolo tra funzioni algebriche e di funzioni trascendenti.

<sup>6</sup> La curva è il luogo dei punti  $P$  dove la distanza da due punti fissi detti fuochi è del tipo  $uPF + vPF' = c$  dove  $u$  è diverso da  $v$ . Se  $u = 1$  e  $v = 2$  la curva assume la forma di un uovo.

Il concetto di curva come traiettoria di un punto mobile viene ripreso da molti matematici come Gilles Personne de Roberval (1602-1675), Isaac Barrow (1630-1677) e Isaac Newton (1643-1727). Quest'ultimo, nel suo *Tractatus de quadratura curvarum*, (la sua terza opera sul calcolo infinitesimale, scritta nel 1676 e pubblicata nel 1704) afferma: «lo considero qui le quantità matematiche non come costruite da parti molto piccole, ma descritte da un moto continuo. Le linee sono descritte, e quindi generate, non per opposizione di parti, ma per moto continuo dei punti; le superfici per moto delle linee; i solidi per moto delle superfici; gli angoli per rotazione dei lati; le porzioni di tempo dal flusso continuo [...] Questa genesi ha effettivamente luogo nella natura delle cose e può essere vista quotidianamente nel moto dei corpi»<sup>7</sup>. Newton userà il termine “fluente”, per indicare le linee prodotte dal moto continuo di un ente geometrico e “metodo delle flussioni” l'applicazione del calcolo infinitesimale alla geometria delle curve.

Molti matematici si avvicinarono, prima di Newton e Leibniz, al calcolo infinitesimale, tuttavia è da ascrivere a loro averne posto i fondamenti in chiave moderna e aver raggiunto consapevolezza della sua portata per lo sviluppo di metodi e modelli per lo studio quantitativo degli oggetti dell'indagine scientifica.

L'idea del calcolo infinitesimale è sviluppata da Newton molto prima della pubblicazione della sua opera principale *Philosophiae naturalis Principia Mathematica* (fig. 12), la cui prima edizione è datata 1687, opera che portò una accesa controversia con Leibniz circa la priorità della scoperta<sup>8</sup>. Nella prima edizione dei *Principia* Newton ammetteva che Leibniz possedeva un metodo simile, ma nella terza edizione del 1726, a seguito dell'aspra polemica tra i sostenitori dei due scienziati in merito all'indipendenza e alla priorità della scoperta del calcolo infi-

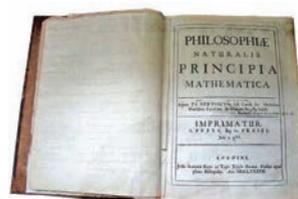


Fig.12/ Newton, *Philosophiæ naturalis Principia Mathematica*

**7** I manoscritti del *Tractatus De Quadratura Curvarum* (conservati alla Cambridge University Library) risalgono al 1691, 1692. Ma, come Newton stesso dichiara nell'introduzione, le idee fondamentali del Metodo delle Flussioni risalgono agli anni 1665, 1666, quando Newton aveva circa 23 anni. La prima edizione a stampa è nel suo trattato *Opticks*, pubblicato a Londra nel 1704. Il trattato *De Quadratura Curvarum* verrà ristampato in *Opuscula Mathematica, Philosophica et Philologica*, Losanna e Ginevra, 1744, vol. I. La citazione è tratta dell'edizione del 1704, p.424.

**8** Newton formula i principi del calcolo infinitesimale prima nel *De Analysis per aequationes numero terminorum infinitas* (Analisi per mezzo di equazioni con un numero infinito di termini, manoscritto del 1669, pubblicato solo nel 1711), pubblica poi *Methodus Fluxionum et serierum infinitarum* (Metodo delle flussioni e delle serie infinite; manoscritto del 1671, pubblicato nel 1736) in cui si introducono le fluenti, le flussioni; infine il *De Quadratura Curvarum* (Sulla Quadratura delle curve, manoscritto del 1691-92, pubblicato nel 1704), in cui si trova il metodo geometrico che sarà utilizzato nella redazione dei *Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica* (Principi matematici della filosofia naturale), la sua prima opera pubblicata.

## Le linee curve per l'architettura e il design

**9** *Acta Eruditorum*, periodico mensile pubblicato in Germania dal 1682 al 1782 interamente scritto in latino. La rivista divenne uno dei principali veicoli della comunicazione del sapere durante l'illuminismo.

**10** Il titolo esteso dell'articolo è: *Nova methodus pro maximis et minimis, itemque tangentibus, quae nec fractas nec irrationales quantitates moratur et singulare pro illis calculi genus* (Nuovo metodo per i massimi e i minimi, come anche per le tangenti, che non si arresta davanti a quantità frazionarie e irrazionali e modo unico di calcolo per i suddetti).

**11** Il testo inglese, pubblicato a Londra nel 1636 reca il titolo: *The Method of fluxions And I infinite series; With its Application to the geometry of curve-lines* (Metodo delle flussioni e serie infinite; con le sue applicazioni alla geometria delle curve); il volume, tutto incentrato sulle curve, è strutturato in una introduzione e in 12 proposizioni: Prob. 1. Dai Fluenti dati per trovare i Flussioni; Prob. 2. Dalle Flussioni indicate per trovare i Fluenti, Prob. 3. Per determinare il massimo e il minimo delle quantità, Prob. 4. Per disegnare tangenti alle curve, Prob. 5. Per trovare la quantità di curvatura in qualsiasi curva, Prob. 6. Per trovare la qualità della curvatura in qualsiasi curva, Prob. 7. Per trovare un numero qualsiasi di curve quadre, Prob. 8. Trovare Curve le cui Aree possono essere confrontate con quelle del Sezioni coniche, Prob. 9. Per trovare la quadratura di qualsiasi curva, Prob. 10. Per trovare un numero qualsiasi di curve assegnate. Prob. 11. Per trovare Curve le cui Linee possono essere confrontate con le linee di Curve assegnate, Prob. 12. Correggere qualsiasi linea curva assegnata.

nitese, Newton eliminò il riferimento al calcolo di Leibniz.

È oggi generalmente riconosciuto che la scoperta di Newton precedette quella di Leibniz, e che, nello stesso tempo, i risultati a cui pervenne Leibniz furono indipendenti da quelli di Newton. Va riconosciuta comunque a Leibniz la priorità di pubblicazione. L'esposizione del suo calcolo si pubblica nel 1684 negli *Acta Eruditorum*, un periodico mensile tedesco, tra le prime riviste scientifiche, che accoglierà molti contributi matematici significativi<sup>9</sup>. Nell'articolo, dal titolo *Nova Methodus pro Maximis et Minimis...*<sup>10</sup> (figg. 13,14), dove riprende la teoria dei massimi e dei minimi già anticipata da Fermat, introduce il termine "funzione" e il concetto di "integrale" per i quali usa delle notazioni molte delle quali utilizzate ancora oggi. Oltre alla pubblicazione negli *Acta*, Leibniz sviluppa il calcolo infinitesimale pubblicando gli esiti delle sue ricerche in altri lavori tra i quali pubblica, nel 1673, *l'Historia et origo calculi differentialis* in cui descrive lo sviluppo completo del suo pensiero. Oltre *Principia*, una seconda e più estesa esposizione del metodo di Newton si trova nel *Methodus fluxionum et serierum infinitarum*, scritto nel 1671 e pubblicato in edizione inglese solo nel 1736 (fig. 10); un testo, tutto incentrato sulle linee curve dove illustra il "metodo delle flussioni" applicato alle linee e che comprende la ricerca delle tangenti e della curvatura<sup>11</sup>.

Dopo Newton e Leibniz, il calcolo infinitesimale diventa un ambito di ricerca indipendente capace di affrontare una gamma molto vasta di problemi, non tutti necessariamente relativi alla geometria delle curve e delle superfici, dalla quale scaturisce lo sviluppo di ulteriori nuove branche della matematica. Per quanto riguarda lo studio delle linee, il metodo delle coordinate e il calcolo infinitesimale si rivelarono strumenti fondamentali che permisero di de-

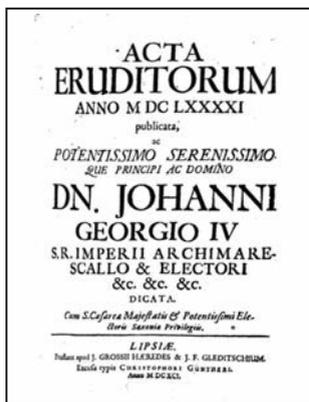
finire proprietà delle curve fino ad allora sconosciute; inoltre l'applicazione del calcolo infinitesimale ai problemi geometrici portò alla definizione di una teoria delle linee curve che è sostanzialmente quella che utilizziamo ancora oggi.

Tutti gli studi di cui si è parlato si fondavano in sostanza su principi geometrici, tuttavia il problema del rapporto tra la geometria sintetica e il calcolo portò sempre di più nell'arco del Seicento ad una predominanza dell'analisi e ad un progressivo abbandono dello sviluppo geometrico del calcolo infinitesimale. Molti matematici, e lo stesso Leibniz, decretarono la supremazia dell'analisi rispetto ai metodi classici.

Nel corso del XVIII secolo, la necessità di applicare il calcolo infinitesimale allo studio di alcune nuove questioni concernenti le curve come la curvatura, le normali, gli involucri di famiglie di curve, le geodetiche delle superfici, i punti singolari delle curve, condussero i matematici a servirsi di argomenti geometrici mescolati ad argomenti analitici.

L'applicazione del calcolo infinitesimale ai problemi geometrici portò così a quella che sarà chiamata solo alla fine dell'Ottocento (1894) da Luigi Bianchi (1856-1928) *Geometria differenziale*, intesa come «studio delle proprietà delle curve e delle superfici che variano da punto a punto».

Avvalendosi del calcolo infinitesimale, attraverso le più semplici funzioni algebriche e trascendenti, Leibniz, i fratelli Jakob e Johann Bernoulli, L'Hospital, Huygens e Pierre Varignon (1654-1722) affrontarono problemi legati alla curve tra i quali: il moto del pendolo, la forma di una corda sospesa all'estremità, il moto lungo traiettorie curvilinee, il moto su un'inclinazione fissa su una sfera (la lossodromia), le evolute e le evolventi delle curve, le curve caustiche che nascono dalla riflessione e dalla rifrazione della luce, la traiettoria di un punto di una curva che rotola su un'altra (*roulettes*).



Figg. 13, 14/ Pagine degli *Acta Eruditorum* dove compare il lavoro di Leibniz.

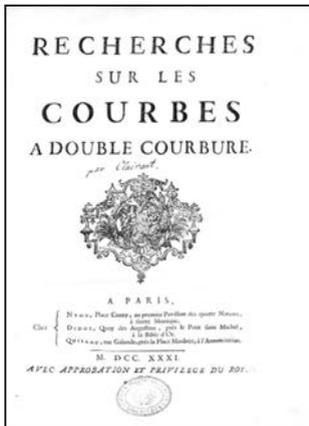
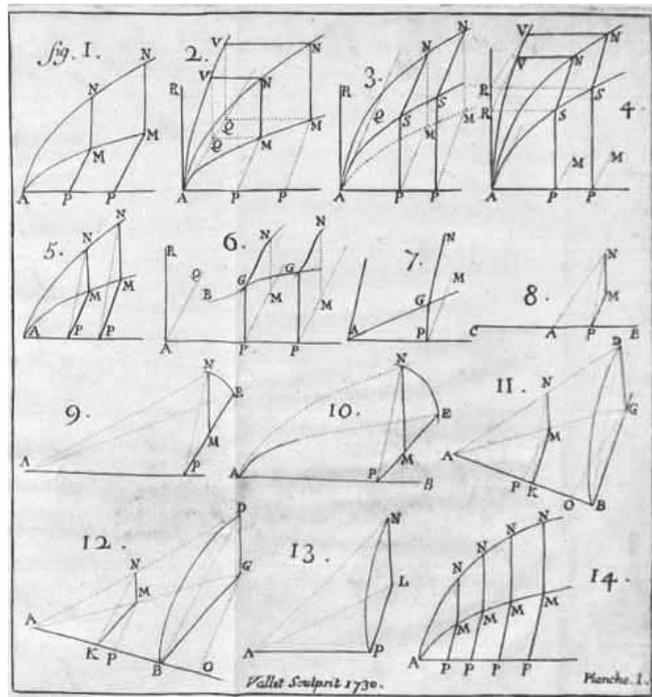


Fig.15/ Frontespizio del trattato di Clairaut *Recherche sur le curbes à double courbure*.

Fig.16/ Tavola 1 della prima sezione del trattato di Clairaut *Recherche sur le curbes à double courbure*.

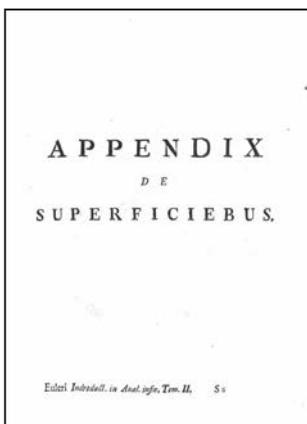
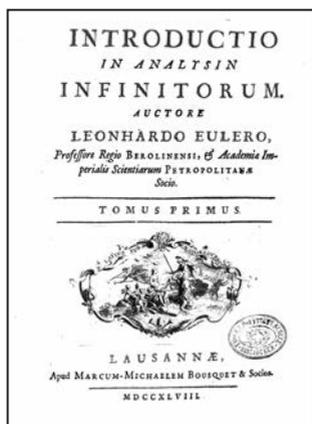


### La geometria delle coordinate nello spazio

La geometria analitica del XVII secolo, a partire da quella di Descartes e Fermat è rivolta essenzialmente alle curve piane, la sua estensione allo spazio avverrà solo nel secolo successivo a partire dagli studi di Alexis-Claude Clairaut (1713-1765) quando la geometria delle coordinate e il calcolo infinitesimale erano già consolidati.

Diversi approcci al problema della trasposizione allo spazio della geometria delle coordinate si trovano sia nell'opera di Fermat che nel secondo libro della *Géométrie* dove si sostiene che, per rappresentare analiticamente curve spaziali si possono condurre da ciascun punto della curva rette ortogonali a due piani anch'essi tra loro ortogonali; per poi considerare le due curve che si generano per proiezione.

Nel 1731 un giovanissimo Clairaut scrive un trattato dal titolo *Recherche sur le curbes à double courbu-*



Figg.17, 18/ Frontespizio e prima pagina dell'appendici del trattato di Eulero *Introductio in analysin infinitorum*.

re che viene pubblicato senza il suo nome<sup>12</sup> (figg. 15, 16). Il lavoro tratta analiticamente i problemi fondamentali delle curve nello spazio. L'approccio del giovane matematico segue i principi di Descartes; pensando una curva spaziale come intersezione di due superfici, considera le due proiezioni della curva su due piani perpendicolari, le cui due curvature venivano attribuite alla curva di partenza. Studia inoltre le tangenti a queste curve e considera che in un punto ammettono una sola tangente ma infinite rette ortogonali, aprendo la strada per la determinazione della curvatura delle linee gobbe.

Pochi anni dopo, nel 1748, Eulero nel capitolo V dell'appendice al secondo volume dell'*Introductio*<sup>13</sup> (figg. 17, 18), dove tratta le superfici di secondo ordine, affronta sistematicamente la geometria analitica tridimensionale di curve e superfici ponendo le basi per lo studio della curvatura delle superfici. Studia le curve spaziali avvalendosi delle equazioni parametriche, da lui introdotte, e sviluppa il loro rapporto con le superfici sviluppabili dimostrando che la famiglia delle tangenti ad una curva gobba costruisce una superficie sviluppabile.

Bisognerà attendere la fine del secolo, per ritrovarla nella poderosa opera di Gaspar Monge (1746-1818), trattazioni significative sulle curve spaziali.



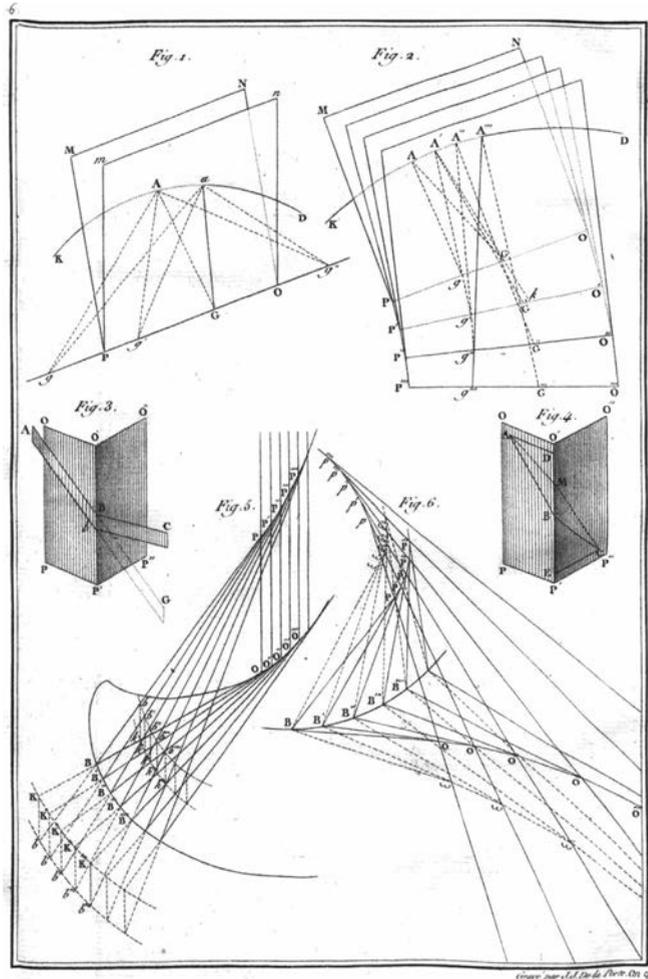
Fig.19/ Memoria di Monge sulle linee a doppia curvatura.

**12** Il trattato di Clairaut è pubblicato a Parigi ed è diviso in quattro sezioni, la prima: *de la manière de considerer les courbes à double courbure*; la seconda: *usage du calcul différentiel dans les courbes à double courbure, par rapport à leurs tangentes & à leurs perpendiculaire*; la terza: *usage du calcul integral dans les courbes à double courbure, par rapport à leurs rectifications à la quadrature des espaces qu'elles déterminent*; la quarta: *quelques principes généraux pour former des courbes à double courbure, & pour en trouver la nature*.

**13** Eulero, *Introductio in analysin infinitorum*. Il poderoso lavoro di Eulero è pubblicato a Losanna in due volumi più un'appendice sulle superfici ed è corredato da quaranta tavole.

## Le linee curve per l'architettura e il design

Fig.20/ Monge, Tavola sulla costruzione della sviluppabile polare. Da *Mémoire sur les Développées, les Rayons de Courbure, et les Différens Genres d'inflexions des Courbes a double Courbure*.



Un suo importante lavoro sulle curve a doppia curvatura, *Mémoire sur les Développées, les Rayons de Courbure, et les Différens Genres d'inflexions des Courbes a double Courbure* del 1771 (fig. 19) verrà pubblicato nel 1801 nel *Feuille d'analyse appliquée à la géométrie*. In questo testo Monge studia le curve e le superfici ad esse associate. Anche Monge tratta le curve spaziali mediante le loro proiezioni su due piani tra loro ortogonali e approfondisce in particolare lo studio delle superfici associate alle curve gobbe. Affronta il problema delle sviluppabili e indivi-

dua una superficie che chiama "svilupabile polare" e che contiene tutte le infinite evolventi. Considera che in ogni punto della curva esistono un'infinità di normali che giacciono sul piano normale alla curva in un determinato punto; tra queste ne individua una che è normale alla retta intersezione con il piano normale prossimo, che chiama "asse polare". Muovendosi lungo la curva i piani normali individuano una superficie che chiama "svilupabile polare". La perpendicolare da ogni punto all'asse del piano normale in  $P$  è la normale principale e il piede della normale è il "centro di curvatura" (fig. 20).

Monge sarà un innovatore nel piano della geometria sintetica. Se l'analisi aveva dominato con Clairaut e Eulero il XVIII secolo, con Monge geometria e analisi sono sullo stesso piano e si torna allo studio della forma degli enti studiati. La vocazione ingegneristica e militare della matematica che caratterizza l'*École polytechnique* della riforma napoleonica, nella quale insegnano alcuni dei migliori matematici dell'epoca, da Monge a Legendre, da Lagrange a Fourier, porterà a ritrovare un ruolo centrale alla matematica applicata.

Se l'analisi aveva dominato il XVIII secolo sebbene gli studi di questo periodo sono ancora improntati sullo sviluppo geometrico del calcolo infinitesimale, la diffusione dell'analisi afferma sempre di più il predominio dell'algebra considerata di gran lunga superiore ai metodi geometrici. Lo stesso Leibniz cosciente di questo sentì l'esigenza di specificare in un saggio inedito che «Spesso i geometri potrebbero dimostrare in poche parole ciò che è assai lungo nel calcolo [...] il punto di vista dell'algebra è sicuro, ma non è il migliore»<sup>14</sup>. La geometria subì un'eclisse che durò circa cent'anni. Come sostiene Gino Loria: «siccome per applicare l'analisi matematica alla ricerca delle proprietà delle figure geometriche non è necessario sapersele raffigurare, così si ritenne le-

**14** Cfr. Luis Couturat (a cura di), *Opusculus et fragments inedit de Leibniz*, Parigi 1903. Riportato da Kline 1991, p. 457.

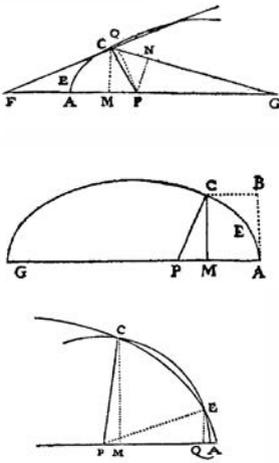


Fig.21/ Descartes, illustrazioni del metodo per la determinazione delle ortogonali e delle tangenti. Da la *Géométrie*.

**15** Loria 1931, pp. 166-167.

**16** Nella seconda definizione del libro III degli *Elementi*, Euclide definisce la tangente a una circonferenza in un suo punto come la retta che, toccando il cerchio e prolungata, non seca il cerchio. Nelle proposizioni 16 e 17 dello stesso libro dimostra che la tangente è ortogonale al raggio e da la costruzione della tangente alla circonferenza da un punto esterno.

**17** Nel *Doctrina tangentium*

Fermat, cercando una generalizzazione del suo metodo, determinava la tangente di quattro curve: la cissoide, la conoide, la quadratrice e la cicloide. Le prime tre sono curve antiche e seppur espresse da un'equazione abbastanza complessa, sono curve algebriche mentre la cicloide è una delle nuove curve ed è una curva trascendente.

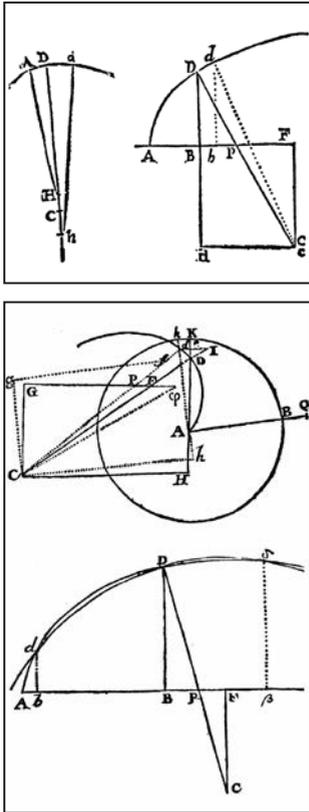
gittimo il rimettere a miglior tempo la determinazione circa la loro forma» si riferisce alle «innumerevoli ricerche compiute intorno agli enti geometrici il cui aspetto in molti casi era completamente ignoto. Ma non tardò a giungere l'istante in cui si credette doveroso e possibile determinare anche l'apparenza delle figure studiate»<sup>15</sup>. Questo cambiamento di interessi si deve in larga misura alla scuola di Monge. All'inizio dell'Ottocento la geometria sintetica, supportata dagli strumenti dell'analisi, torna ad essere al centro delle ricerche sulle proprietà delle figure geometriche.

Con l'estensione allo spazio della geometria differenziale la teoria delle curve può considerarsi delineata nei suoi aspetti essenziali. I nuovi metodi, pur distogliendo la generalità dei matematici dalla geometria pura, avevano permesso non solo di aumentare straordinariamente il numero delle curve allora conosciute ma di introdurre importanti proprietà geometriche e meccaniche delle curve di cui prima non si conosceva l'esistenza e di aprire quindi nuovi campi di ricerca.

### Il problema della tangente e della curvatura

L'interesse per la determinazione della tangente ad una curva, a cui si applicano i matematici fin dall'antichità, scaturiva sia da un problema geometrico, di tracciamento, sia per diverse applicazioni scientifiche come ad esempio lo studio dell'ottica o quello del moto. Secondo il mondo greco il concetto di tangente era espresso come retta che tocca la curva in un unico punto, che lascia la curva da una parte di questa e che prolungata non interseca la curva. Euclide negli *Elementi* così definisce la tangente alla circonferenza<sup>16</sup>. Se questa definizione poteva essere adeguata per tutte le curve coniche, non lo era per tutte le nuove curve che compaiono nel XVII secolo. Quasi tutte le trattazioni analitiche del Seicento riser-





Figg.24, 25/ Newton, disegni sulla determinazione del centro di curvatura in generale e costruzione del centro di curvatura di una spirale e della cicloide. Da *Methodus Fluxionum*.

**19** Christian Huygens, *Horologium Oscillatorium: sive de motu pendulorum ad horologia aptato demonstrationes geometricae*, pubblicato a Parigi nel 1673.

**20** In termini moderni possiamo definire l'evolvente di una curva il luogo geometrico descritto da un punto di una retta tangente che rotola senza strisciare sulla curva.

**21** Newton, *The Method of fluxions*. Op. cit. vedi nota 11.

Tra le proprietà differenziali, si delinea un'altra proprietà fondamentale delle curve e delle superfici sconosciuta al mondo greco, il concetto di curvatura. Nelle sue ricerche per la progettazione degli orologi a pendolo Christian Huygens (1629-1695) introduce il concetto di evolvente di una curva. Nel terzo capitolo dell'*Horologium oscillatorium*<sup>19</sup> descrive l'evolvente di una curva (*developpant*) immaginando una corda arrotolata lungo la curva il cui estremo, srotolato, descrive una seconda curva (fig. 23). Dimostra inoltre che tutti i punti della corda tesa descrivono altrettante evolventi<sup>20</sup>. Da questo deriva poi il concetto di centro di curvatura di una curva piana in cui due normali successive tendono ad un punto limite che è il centro di curvatura. La distanza tra questo punto e il punto della curva considerato è il raggio di curvatura e il luogo di tutti i centri di curvatura viene detto evolvente (*développée*) della curva originale. Anche Newton, nel *The Method of fluxions*<sup>21</sup>, pubblicato nel 1737 ma scritto prima del 1671, introduce il centro di curvatura come punto limite dell'intersezione della normale in un punto della curva con una normale adiacente. Afferma poi che il cerchio che ha centro nel centro di curvatura e raggio pari al raggio di curvatura è il cerchio che ha il contatto più stretto con la curva in quel punto; cioè nessun altro cerchio può interpersi tra questo e la curva nel punto interessato (fig. 24). Newton diede la formula della curvatura e calcolò la curvatura di diverse curve; notò inoltre che in punto di flesso la curvatura è nulla (fig. 25). Sarà Leibniz nel 1686 a introdurre il cerchio osculatore definendolo *circulum osculans*, vale a dire la circonferenza che "bacia" la curva in un punto.

Con l'estensione allo spazio della teoria analitica delle curve, il problema della curvatura va ridefinito dal momento che il piano del cerchio osculatore si muove nello spazio assumendo diverse giaciture. Il

problema è posto da Eulero che, per studiare questa proprietà, introduce intorno a qualsiasi punto della curva “l’indicatrice sferica” che può essere definita come il luogo dei punti di una sfera di raggio unitario di centro  $O$  i cui i raggi sono uguali al vettore tangente unitario. Il piano passante per l’arco infinitesimale e il centro della sfera viene chiamato da Eulero “piano osculatore”. Sarà Johann Bernoulli a considerare questo piano come determinato da tre punti “coincidenti”.

Ma questa curvatura non è sufficiente per determinare l’andamento di una curva gobba nello spazio. Clairaut aveva suggerito l’idea che una curva, da lui chiamata a doppia curvatura, potesse avere due curvatures. Una di queste come visto fu introdotta da Eulero, la seconda, oggi chiamata “torsione”, fu formulata da Michel-Ange Lancret (1774-1807), allievo di Monge, in una memoria presentata nel 1801. In ogni punto di una curva gobba Lancret individua tre direzioni principali: la prima è quella della tangente, la seconda è la normale che giace sul piano osculatore (normale principale), la terza è la normale al piano osculatore (binormale). Indica quindi la torsione come tasso di variazione della binormale rispetto alla lunghezza dell’arco. Usando la terminologia «flessione dei successivi piani osculatori» e «flessione delle successive normali»<sup>22</sup>, definisce le formule per la loro determinazione.

Dopo di lui Augustin-Louis Cauchy (1789-1857), nelle sue *Leçons sur les applications du calcul infinitesimal a la géometrie* del 1826<sup>23</sup> perfeziona le formule per determinare il raggio di curvatura e il raggio di torsione. Queste formule, che danno le derivate dei coseni direttori della tangente, della normale principale e della binormale, furono pubblicate da Alfred Sérret (1819-1885) nel 1851<sup>24</sup> e da Frédéric-Jean Frénet (1801-1852) nel 1852<sup>25</sup> e passeranno alla storia come formule di Serret-Frénet.

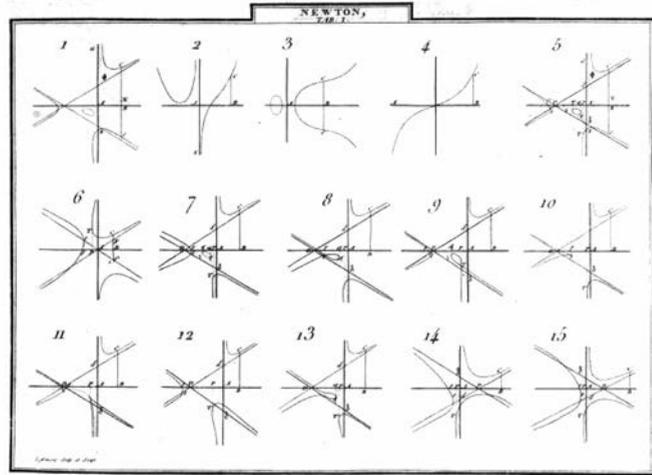
**22** Lancret, presenta la sua *Memoire sur le courbes a double courbure* all’Accademia delle scienze di Parigi nel 1801, ma la memoria sarà pubblicata in: Mem. divers Savant, I, 1806, pp. 416-454.

**23** Cfr. A.L. Cauchy, *Euvres*, V. Gauthier Villards, Parigi 1882.

**24** Il lavoro di Serret è pubblicato in *Mémoire sur quelques formules relatives à la théorie des courbes a double courbure*, Id., 16, 1851, a cui fa seguito il *Mémoire sur une classe d’equations differentielles qui se rattachent à la théorie des; lignes a double courbure*, Id., 18, 1853.

**25** Lo studio di Frénet è sviluppato per la sua tesi di laurea presentata alla Facoltà delle Scienze di Tolosa il 10 luglio 1847, *Sur les courbes à double courbure*, ed inserita nel Jour de Math, 17, 1852.

## Le linee curve per l'architettura e il design



Figg.26, 27/ Newton, frontespizio e prima Tavola dell'*Enumeratio linearum tertii ordinis*.

### Le nuove curve

Le linee conosciute dal mondo greco oltre i "luoghi piani" (la retta e la circonferenza) e i "luoghi solidi" (le sezioni coniche) non erano molte: tra queste la spirale di Archimede e l'analogica curva sferica, la conoide, la cissoide, le spiriche e una squadratrice, inoltre tra le sghembe, una curva ideata da Archita, l'ippopeda di Eudosso e l'elica cilindrica. A queste linee sulla base dell'analisi se ne aggiungono molte altre tra cui quelle che interessano maggiormente i matematici del Seicento sono tutte le iperboli, le parabole e le spirali (in particolare la spirale logaritmica), le quadratrici, poi la foglia e gli ovali di Cartesio, la cicloide, la lossodromia, la curva elastica, la catenaria, la cardioide, le epicicloidi e le ipocicloidi, gli ovali di Cassini (in particolare la lemniscata), la sinusoide, certe curve sferiche ecc.

**26** Nella sua prima edizione, l'*Enumeratio*, compare in appendice all'edizione inglese del trattato di ottica (*Opticks*). Se ne avranno altre edizioni con approfondimenti e correzioni tra le quali quella illustrata da Leonhard Jacobus Stirling.

Le nuove curve introdotte sulla base della geometria delle coordinate e del calcolo infinitesimale, vennero studiate con le relative equazioni come curve di ordine determinato. A parte le coniche ben note nell'antichità e sulle quali anche in questo arco temporale si raccoglie una grande quantità di contributi,

tutte le altre curve sono necessariamente di ordine superiore a partire da quelle di terzo ordine. Il primo studio sistematico su questo argomento si deve a Newton che sviluppa nell'*Enumeratio linearum tertii ordinis*<sup>26</sup>, pubblicato nel 1704, le curve cubiche individuando settantadue specie di curve alle quali ben presto se ne aggiungeranno altre (figg. 26, 27).

Seguendo la classificazione data da Descartes, lo studio delle curve di grado superiore continuò ad interessare i matematici, con esse si iniziano a studiare le peculiarità proprie delle queste curve, che non erano presenti nelle linee di primo e secondo grado: punti speciali come i punti di flesso, i punti multipli e le cuspidi che caratterizzano molte di queste curve. La comparsa di nuove importanti linee curve si concentra in particolare nell'arco del XVII secolo e molte di queste sono scoperte e riscoperte da diversi matematici. Di queste curve alcune ebbero particolare fortuna sia per le loro proprietà che per le loro applicazioni e di queste se ne fa cenno nella parte che segue.

Ad un anno di distanza dalla pubblicazione de *La géométrie*, in una lettera inviata a Marsenne, Descartes descrive una particolare curva meccanica, che Pierre Varignon (1654-1722) chiamerà "spirale logaritmica". Di questa curva osserva la proprietà equiangolare, cioè quella per cui ogni semiretta passante per il polo forma con la retta tangente alla spirale in un punto lo stesso angolo (fig. 28). L'interesse dei matematici del tempo per questa curva fu probabilmente sollecitata dalla corrispondenza epistolare tra Galileo e padre Marsenne a proposito della traiettoria di un grave che cade liberamente sulla terra in moto. La curva fu studiata da Torricelli, che diede la prima rettificazione moderna di una curva e da Jacques Bernoulli che ne trovò molte altre proprietà e la definì *Spira mirabilis*. Bernoulli diede disposizioni affinché la spirale, insieme al motto *Ea-*

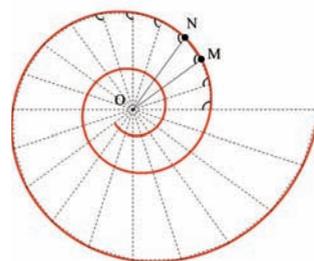


Fig.28/ La spirale logaritmica è la curva in cui in ogni punto l'angolo della tangente con il raggio polare è costante.

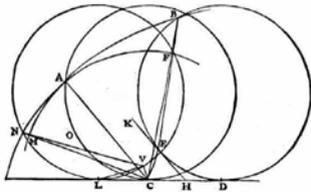


Fig. 29/ La "cicloide" è il luogo geometrico di un punto di una circonferenza che rotola, senza strisciare, lungo una retta.

Fig. 30/ Huygens, determinazione della normale alla cicloide. Da *Horologium Oscillatorium*.

*dem mutata resurgo* (Seppure trasformata, rinasco), fosse incisa sulla sua tomba a Basilea; sfortunatamente l'incisore incaricato non era un buon matematico e così la spirale logaritmica fu sostituita da quella di Archimede.

Alla fine del Seicento Johann Bernoulli, affrontando lo studio delle curve involuppo, ricava le equazioni di alcune caustiche, pubblicate negli *Acta Eruditorum* del 1692, nonché la curva involuppo delle parabole traiettorie di palle sparate con la stessa velocità iniziale e con angoli diversi, dimostrando per via analitica che l'involuppo è ancora una parabola con fuoco nel cannone.

Il problema delle geodetiche, che contribuirà alla nascita della teoria delle superfici, è posto da Johan Bernoulli, nel *Jornal de Sçavans* del 1697. Il problema è quello di trovare l'arco più breve compreso tra due punti di una superficie convessa. In una lettera a Leibniz rileva che il piano osculatore in ogni punto di una geodetica è perpendicolare alla superficie in quel punto. Più tardi Clairaut, nel 1728, tratta le geodetiche nelle superfici di rivoluzione dimostrando che il seno dell'angolo formato con un meridiano è inversamente proporzionale alla lunghezza della perpendicolare dal punto d'intersezione all'asse di rivoluzione. Alcune curve nascono da problemi meccanici come il problema delle "curve isocrone", che consiste nel trovare una curva lungo la quale un pendolo impiega lo stesso tempo di oscillazione qualunque sia l'ampiezza dell'angolo lungo il quale si muove. A questo Huygens dedica un trattato, *Horologium Oscillatorium*<sup>27</sup>, pubblicato nel 1673 nel cui titolo specifica:

<sup>27</sup> Huygens, *Horologium Oscillatorium*. Op. cit. pp. 38-58.

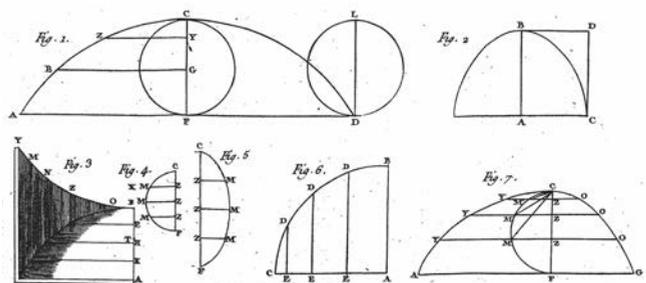


Fig. 31/ Pascal, dalla tav. 1 del trattato *Histoire de la roulette*

*dimostrazioni geometriche riguardanti il moto dei pendoli applicata agli orologi.* In questo testo dimostra, per via geometrica, che la curva cercata è la "cicloide" (fig. 29), la curva generata da un punto di una circonferenza che rotola senza strisciare lungo una retta (fig. 30). Soluzioni analitiche del problema furono trovate da Leibniz e da Jacob Bernoulli e pubblicate negli *Acta Eruditorum*<sup>28</sup> del 1693. Nel 1696 Johann Bernoulli propone, sempre dalle pagine *Acta Eruditorum* il problema della "brachistocrona", cioè il problema di trovare la curva che deve seguire un corpo per scendere da un punto ad un altro nel minor tempo possibile. Newton, Leibniz, L'Hopital e i fratelli Bernoulli trovarono la soluzione corretta scoprendo che la curva cercata era la cicloide, ne rimasero colpiti al punto che Johann Bernoulli scrive negli *Acta*: «Ma rimarrete attoniti quando vi dirò che questa stessa cicloide, la tautocrona di Huygens, è la brachistocrona che stiamo cercando».

Per queste sue innumerevoli proprietà, la cicloide sarà una delle curve più studiate dai matematici, per cercare evolventi ed evolute, raggi di curvatura ed altre proprietà. In realtà il primo a descrivere la curva era stato padre Marsenne nel 1615 considerando il movimento delle ruote dei carri, da qui il nome di *ruolette* usato da Blaise Pascal che scrive, nel 1658, una *Histoire de la roulette appellée autrement trochoide ou cycloide*, aprendo il testo con un esplicito riferimento alla scoperta di padre Marsenne (fig. 31).

<sup>28</sup> *Acta Eruditorum* del maggio 1690, pp. 217-219 Opera 421-424.

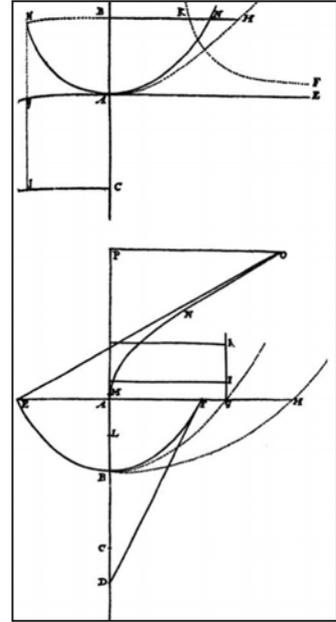
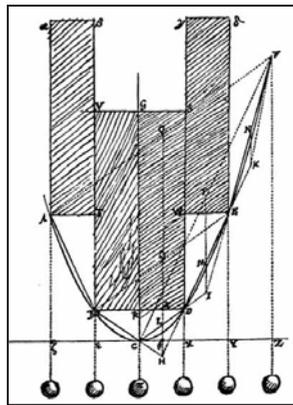
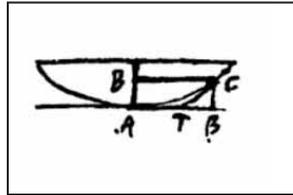
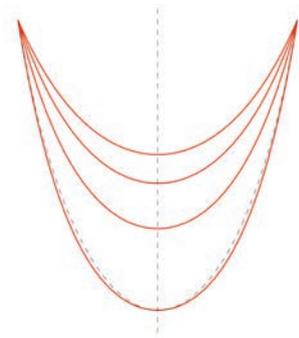


Fig. 32/ La "sinusoide" è la traiettoria di un movimento composto: sinusoidale traslatorio e uniforme.

Fig. 33/ La "catenaria" è il luogo geometrico del fuoco di una parabola che scorre, senza scivolare lungo una retta. In tratteggiato la parabola.

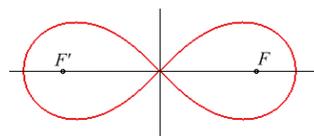
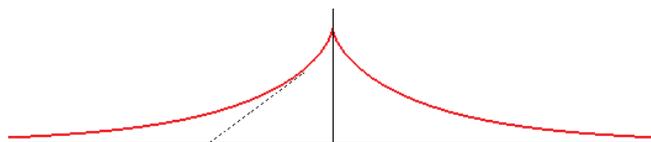
Fig. 34/ Leibniz, disegno che illustra la sua soluzione della catenaria.

Fig. 35/ Huygens, disegno per il problema dei ponti sospesi.

Fig. 36/ Bernoulli, disegni per la costruzione della catenaria.

La "sinusoide" è una curva considerata sorella della cicloide, dal momento che è la traiettoria di un movimento composto da un movimento sinusoidale (cioè proiettato su una linea retta di moto circolare uniforme) e da un movimento traslatorio uniforme (fig. 32). Questa curva comparve per la prima volta nell'opera di Gilles Personne de Roberval (1602-1675) sulla cicloide, mentre, intesa come grafico delle funzioni trigonometriche, si trova nella *Mechanica* di John Wallis (1616-1670) del 1670.

L'acceso dibattito sulle curve che si ritrova negli *Acta Eruditorum* accoglie, tra gli altri, il problema di definire la curva che rappresenta la forma assunta da un cavo inestendibile appeso a due punti (fig. 33). La natura di questa curva era stata studiata da Leonardo da Vinci e da Galileo che riteneva fosse una parabola. Leibniz, Huygens e John Bernoulli pubblica-



rono indipendentemente le loro soluzioni sugli *Acta Eruditorum* del giugno 1691 servendosi sia dei metodi geometrici che del calcolo infinitesimale e dimostrando anche la profonda differenza analitica tra le due curve dal momento che la parabola è una curva algebrica, mentre la catenaria è una curva trascendente. Huygens aveva dimostrato, già nel 1646, che se si distribuiscono uniformemente dei carichi lungo la curva, allora questa diventa una parabola, sempre a lui si deve il termine “catenaria”, da catena, in riferimento alla caratterizzazione della curva (figg. 34,35,36). Jakob Bernoulli, nel suo testo sul calcolo infinitesimale pubblicato negli *Acta* del 1691 pone anche il problema della forma di una vela sottoposta alla pressione del vento che chiama “velaria” e stabilisce che il problema coincide con quello della catenaria.

Nello stesso numero degli *Acta* del giugno 1691 Jakob Bernoulli trova l’equazione della “trattrice”<sup>29</sup>: la curva in cui i “segmenti” di tangente tra i punti della curva e una data “retta” risultano di misura costante (fig. 37). Newton aveva trattato le coordinate polari e alcune loro variazioni tra le quali le coordinate bipolari per le quali un punto è determinato mediante le sue distanze da due punti fissi<sup>30</sup>. Così, nel 1694 Jacques Bernoulli (1654-1705) introduce la “lemniscata” (fig.38), caso particolare di una classe di curve dette “ovali di Cassini” (o “cassinoidi”)<sup>31</sup>, studiate da Jean Dominique Cassini (1625-1712) nel 1680, quelle curve cioè luoghi geometrici dei punti del piano in cui è costante il rapporto tra le distanze da due punti fissi detti fuochi.

Questo piccolo campione di curve, presentate in

Fig. 37/ La “trattrice” è il luogo geometrico dei punti in cui il segmento di tangente in ogni punto, compreso fra il punto di contatto e una retta fissa, ha lunghezza costante.

Fig. 38/ La “lemniscata” è il luogo geometrico dei punti il cui prodotto delle distanze da due punti fissi è costante e uguale al quadrato della semi distanza tra i fuochi. Se la costante è maggiore o minore, si ottengono gli ovali di Cassini.

**29** La “trattrice” è la curva in cui i segmenti di tangente tra i punti della curva e una data retta risultano di misura costante.

**30** Poiché l’opera di Newton su questo argomento è pubblicata solo nel 1736, la scoperta delle coordinate polari è generalmente attribuita a Jakob Bernoulli che la pubblica sugli *Acta* del 1691.

**31** Queste curve vennero studiate per la prima volta da Giovanni Cassini nel 1680, da cui prendono il nome, molto prima che Jacob Bernoulli descrivesse la sua lemniscata per trovare i moti relativi della terra e del sole credendo che il sole viaggiasse intorno alla terra secondo uno di questi ovali con la terra in uno dei fuochi.



# **Le linee curve nella progettazione della forma**



# Geometria delle linee curve per la genesi della forma

di Marta Salvatore

## Utilità della geometria delle curve

La conoscenza della geometria delle curve ha assunto nella storia e ancora oggi assume un ruolo di primo piano nella progettazione della forma. La fisica, la chimica, la meccanica, l'idraulica, l'astronomia, l'architettura, l'architettura navale, l'ottica e molte altre fra le arti e le scienze applicate ricorrono a tale teoria nella costruzione di manufatti o parti di essi, laddove questi debbano rispondere a determinati requisiti di accuratezza geometrica.

Nella storia della scienza e della tecnica gli studi sulle teorie geometriche delle linee e delle superfici accompagnarono in maniera costante e continua le fasi della progettazione del prodotto, dapprima artigianale, poi industriale. Il metodo di rappresentazione privilegiato per il controllo morfologico e metrico della forma progettata è la rappresentazione in pianta e alzato, il cui utilizzo è ampiamente documentato nei trattati di prospettiva e stereotomia dalla seconda metà del Quattrocento in poi<sup>1</sup>, capace di

**1** La rappresentazione in pianta e alzato ricorre nei trattati rinascimentali di prospettiva, come nel caso del *De prospectiva pingendi* di Piero della Francesca, in cui il metodo, pur non essendo esplicitamente illustrato, viene sapientemente praticato.

restituire l'immagine dei corpi così come sono nello spazio in cui sono immersi<sup>2</sup>. Il binomio caratteristico della progettazione della forma che lega la sua concezione alla sua descrizione grafica trova, alla fine del Settecento esplicita e razionale sistematizzazione. Con la codifica mongiana della geometria descrittiva si delinearono in modo chiaro i due obiettivi principali di questa scienza: la rappresentazione della forma e la conoscenza della forma, e cioè della teoria delle linee, delle superfici e delle loro proprietà<sup>3</sup>. Questi obiettivi, che avevano caratterizzato gli studi di geometria ben prima della codifica di Gaspard Monge trovarono, nell'opera dell'ingegnere francese una organica sistematizzazione, e divennero fondamento di modelli teorici di formazione orientati alla progettazione del prodotto e pertanto insegnati nelle scuole di ingegneria di tutta Europa. Negli anni della rivoluzione industriale la geometria descrittiva si impose dunque come un linguaggio efficiente e condiviso di comunicazione della forma. In quegli anni fiorirono numerose trattazioni che alternavano speculazioni geometriche astratte ad applicazioni pratiche, in ambito meccanico, architettonico, idraulico ecc. in cui le linee curve trovarono ampio spazio. Alla conoscenza della teoria delle curve era infatti demandata la rappresentazione delle superfici nel piano attraverso il loro contorno apparente e le loro intersezioni reciproche, e ancora da questa teoria dipendeva la ricerca delle proprietà delle superfici, ridotte nel piano alla loro rappresentazione bidimensionale. Le trattazioni ottocentesche dedicate all'insegnamento della geometria descrittiva erano caratterizzate da una sorta di appendici, le "applicazioni", pubblicate a conclusione delle trattazioni teoriche in cui venivano affrontati in termini anche multidisciplinari i problemi di controllo morfologico della forma progettata. È questo il caso della progettazione degli ingranaggi<sup>4</sup>, così come della

**2** Si vedano le analisi di Rudolph Arnheim sullo spazio *come sembra e come è*. Arnheim 1977, pp. 128-163.

**3** Monge enuncia per la prima volta gli obiettivi della geometria descrittiva nelle prime righe del primo capitolo della sua *Géométrie descriptive*. Cfr. Monge 1798, p. 5.

**4** Cfr. Paris 2012.

stereotomia del legno e della pietra<sup>5</sup>, ampiamente approfondite dagli allievi dell'*École Polytechnique*<sup>6</sup>. Se la rappresentazione della forma era destinata ad essere insegnata nelle scuole di architettura e ingegneria per tutto il Novecento, lo stesso non si può dire della teoria delle linee e delle superfici che, in quegli stessi anni, vedeva un'eclissi destinata a durare circa mezzo secolo. Fra Ottocento e Novecento, con l'avvento della geometria algebrica, la geometria descrittiva esaurì il suo apporto alla ricerca delle proprietà della forma<sup>7</sup>. La complessità crescente delle superfici studiate rendeva infatti difficoltosa la loro descrizione sintetica eseguita con i metodi grafici della rappresentazione, lasciando il passo ad una più efficace definizione matematica. Questo allontanamento progressivo era destinato a durare fino all'introduzione della rappresentazione digitale che, operando nello spazio tridimensionale virtuale di un computer offriva nuovi orizzonti alla geometria dell'estensione grazie alla possibilità di avvalersi, nelle costruzioni, dell'uso di enti geometrici complessi rappresentati in modo continuo con livelli di accuratezza mai raggiunti sino ad allora. Intorno agli anni Ottanta del Novecento quindi, il digitale inaugurava una nuova stagione di studi intorno alla forma, ancora oggi in divenire, che ne ampliava gli orizzonti estendendone le prospettive di ricerca.

In questo quadro evolutivo dei metodi analogici e digitali di comunicazione della forma il disegno rivela tutto il suo valore euristico. Ciò che rimane immutabile è la necessità di conoscere la teoria delle linee per il controllo progettuale della forma, poiché dalla loro qualità dipende quella delle superfici che gli appartengono. Questa relazione, che aveva trovato fondamento nella costruzione delle superfici luogo geometrico che avevano caratterizzato l'architettura e il design sino alla seconda metà del secolo scorso, trova una ulteriore validazione nella genesi della for-

**5** La stereotomia della pietra, destinata a sparire dalle costruzioni per via dell'impiego sempre più diffuso del cemento armato, rimarrà come un retaggio Ottocentesco di importanza metodologica nei trattati di geometria descrittiva sino alla metà del Novecento.

**6** A questo riguardo si vedano i contributi degli allievi della scuola di Monge, fra gli altri: Jean Nicolas Pierre Hachette, Charles Dupin, Charles-François-Antoine Leroy, Theodore Olivier, autori di trattati dedicati alla geometria descrittiva e alle sue applicazioni, come la stereotomia della pietra e del legno e la teoria degli ingranaggi.

**7** Cfr. Gay 2016.

ma libera, oggi ampiamente diffusa grazie alla rappresentazione informatica. Il controllo della forma trova così nella rappresentazione digitale continua, un luogo privilegiato di sperimentazione, dove linee e superfici curve e a doppia curvatura, rappresentate a fatica sino ad oggi, si materializzano trovando fondamento teorico nella loro stessa costruzione. Gino Loria sosteneva che la costruzione è dimostrazione esistenziale della forma, e mai come oggi, nello spazio digitale di un computer, questa affermazione appare di attualità<sup>8</sup>.

Nel vastissimo repertorio di curve piane e sghembe che arricchirono le pagine dei trattati di geometria ve ne sono alcune che hanno trovato impiego nelle arti applicate più di altre. La fortuna di queste curve risiede in generale nelle proprietà notevoli di cui queste godono, nella loro riproducibilità attraverso costruzioni grafiche approssimate e, infine, nel loro appartenere a superfici particolarmente ricorrenti.

### **Proprietà delle curve per il progetto della forma**

«Quando un punto si muove in un piano con una determinata legge, assumendo un numero semplicemente infinito di posizioni, il luogo geometrico di tali posizioni è una linea, in generale non una retta, cioè una curva»<sup>9</sup>.

Con questa definizione Gino Loria introduceva, nei primi anni del secolo scorso, i capitoli dedicati alle curve piane e sghembe nel suo celebre manuale: *Polidri, curve e superficie*.

Le linee sono dunque enti geometrici monodimensionali, generati dal movimento continuo di un punto nel piano o nello spazio. Se il punto è vincolato al piano, questo descriverà una curva piana se, al contrario, è libero di muoversi nello spazio, la curva descritta avrà doppia curvatura e si dirà gobba oppure sghemba. Se la legge del moto è data, e perciò

<sup>8</sup> Loria racconta come Euclide negli *Elementi* non ragioni mai su una figura di cui non sia data la costruzione, e come la costruzione sia dunque dimostrazione dell'esistenza stessa della figura. Cfr. Loria 1935, p. 77.

<sup>9</sup> Cfr. Loria 1912, p. 71 e p. 85.

esprimibile per via analitica oppure geometrica, la curva si definisce luogo geometrico, se al contrario la legge del moto non è nota, la curva si definisce linea grafica e assume in generale forma libera.

La natura bidimensionale delle curve può rendere a prima vista difficoltoso il riconoscimento della loro utilità nell'ambito della progettazione della forma, che opera invece con elementi tridimensionali, e cioè con le superfici di cui sono composti i corpi. Eppure, la conoscenza delle proprietà delle curve è indispensabile per una corretta progettazione perché, in generale, la qualità di una superficie dipende proprio da quella delle curve necessarie alla sua costruzione.

Questa relazione, indissolubile nell'universo astratto della geometria teorica, ha ricadute dirette nella rappresentazione analogica della forma e si palesa in maniera vistosa nella rappresentazione digitale. Nello spazio virtuale tridimensionale di un computer infatti, le superfici acquisiscono forma fisica, ed il mancato controllo della qualità delle curve produce geometrie che non possono visibilmente considerarsi valide. L'esigenza di rappresentare attraverso il disegno grafico bidimensionale le forme geometriche dello spazio, ha favorito, nella storia del disegno di progetto, l'uso di linee e di superfici luogo geometrico, che potevano essere riprodotte e controllate per via sintetica attraverso costruzioni grafiche approssimate. Curve luogo geometrico ricorrono infatti nelle intersezioni tra superfici anch'esse luogo geometrico e ne sono contorno apparente rispetto ad alcune posizioni notevoli dei piani di proiezione. Per queste ragioni le curve luogo geometrico hanno occupato un posto di primo piano nella storia della progettazione della forma, come dimostrano le numerose illustrazioni che arricchiscono i trattati di geometria descrittiva pubblicati sino alla prima metà del secolo scorso<sup>10</sup> (fig. 1).

**10** Fra gli altri, un repertorio particolarmente consistente di problemi relativi al controllo geometrico della forma è costituito dagli studi di Edmond Brhune, noto come Frère Gabriel Marie che, a cavallo fra Ottocento e Novecento, pubblica alcuni manuali di geometria descrittiva dedicati alla soluzione di problemi di intersezione fra superfici notevoli. Cfr. Frère 1893 e 1920.

## Le linee curve per l'architettura e il design

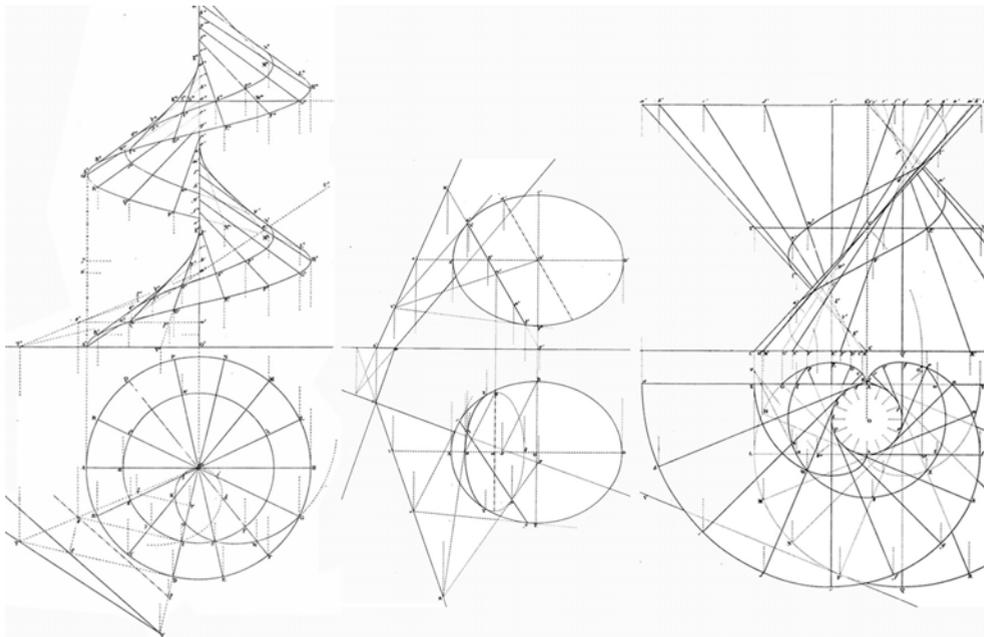


Fig. 1/ Disegni tratti dal *Traité de Géométrie descriptive* di C. F. A. Leroy, ed. 1834.

**11** La citazione è tratta nuovamente dal già citato testo di Loria, e introduce il Metodo delle curve d'errore. Per mettere a fuoco il problema da un punto di vista operativo, possiamo pensare alle difficoltà relative al controllo geometrico dei profili alari degli aerei, a quelli degli scafi delle imbarcazioni o delle carene delle auto, risolto per via analogica attraverso l'uso di aste flessibili. Cfr. Loria 1912, p. 76.

**12** Significative a questo riguardo le superfici del terminal della TWA dell'aeroporto JFK di New York di Eero Saarinen e quelle in cemento armato che caratterizzano il ponte sull'Appia Antica a Roma di Sergio Musmeci.

«Ma nelle applicazioni della geometria descrittiva alle Arti ed alla Tecnica accade talora di dover operare sopra curve [...] di cui si ignora (se pure esiste), la legge di generazione o la rappresentazione analitica; si chiamano di consueto linee grafiche; benché sfuggano ai metodi propri dell'ordinaria geometria, pure pei bisogni della pratica è necessario risolvere riguardo ad esse alcune questioni geometriche, il che può farsi, non con esattezza matematica, ma con precisione sufficiente, ricorrendo a procedimenti approssimati [...]»<sup>11</sup>.

Linee e superfici di forma libera sono state ampiamente utilizzate nella tradizione del design nautico, aeronautico e delle auto. Sperimentate intorno alla metà del Novecento in alcune architetture pionieristiche dei maestri del movimento moderno, come Eero Saarinen o Sergio Musmeci che ne favorirono l'impiego nei processi di progettazione architettonica<sup>12</sup>, queste trovano rigore geometrico soltanto in tempi recenti, nella rappresentazione matematica

della forma, che descrive curve e superfici di interpolazione attraverso equazioni matematiche appunto, di tipo parametrico.

Il controllo della qualità morfologica delle curve, che interessa in generale i processi progettuali, esige la conoscenza delle proprietà geometriche di cui queste godono. È possibile riconoscere famiglie di curve quando queste condividono alcune di tali proprietà. In generale, quando rappresentiamo o progettiamo una curva avvertiamo l'esigenza di conoscerne la genesi geometrica, di chiarire le relazioni che sussistono fra questa e le superfici che le appartengono, di controllarne l'andamento nello spazio. Queste finalità trovano razionalizzazione scientifica in approcci diversi alla teoria delle curve, propri della geometria sintetica, della geometria analitica e della geometria differenziale<sup>13</sup>.

La geometria sintetica analizza le linee e le superfici rispetto alla loro genesi, considerando cioè il procedimento adoperato per la loro costruzione. Possiamo immaginare di costruire una curva luogo geometrico assoggettando un punto ad una determinata legge, oppure ottenerla per proiezione di un'altra curva secondo una certa direzione, o ancora derivarla per involuppo delle sue tangenti. L'approccio sintetico è forse il più affine al *modus operandi* degli architetti, dei designer o dei progettisti in generale perché dialoga con il solo linguaggio che gli è proprio, e cioè il disegno.

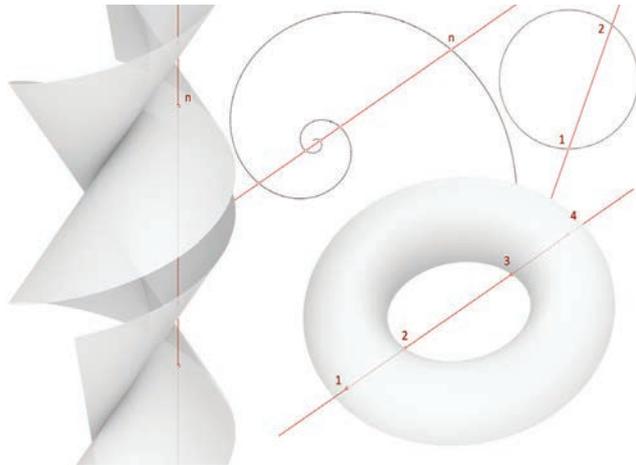
A differenza della geometria sintetica, la geometria analitica si avvale invece di procedure di calcolo per lo studio delle linee e delle superfici, che considera rispetto al grado dell'equazione che le descrive<sup>14</sup>. Il concetto matematico di grado è esprimibile anche per via sintetica, considerando, nel piano, una curva e una retta che la attraversa. Chiamato anche "ordine", questo è dato dal numero massimo di punti che una curva data ha in comune con una retta che

**13** Per una ricognizione intorno alle proprietà geometriche delle curve si vedano gli studi di Laura De Carlo pubblicati in De Carlo, Baglioni 2009.

**14** Da un punto di vista matematico il grado di una linea o di una superficie è l'esponente dell'equazione che la descrive.

## Le linee curve per l'architettura e il design

Fig. 2/ Descrizione sintetica del concetto di ordine di una linea e di una superficie.



la attraversa<sup>15</sup>. Se immaginiamo una circonferenza e una retta che la interseca possiamo facilmente dedurre che il grado della curva è 2, perché due sono i punti massimi in comune fra queste linee. Nel caso delle curve sghembe alla retta si sostituisce un piano, e il grado è dato dal numero di punti che questo ha in comune con la curva. Se il numero di intersezioni fra il piano (o la retta nel caso delle curve piane) e la curva è finito, questa si definisce algebrica. È possibile tuttavia che il piano o la retta in questione incontrino una curva in un numero infinito di punti; curve di questo tipo si dicono trascendenti e sono generalmente caratterizzate da un andamento ricorsivo. Le proprietà analitiche delle curve possono estendersi anche alle superfici. Così come il grado delle curve, anche quello delle superfici è esprimibile per via sintetica dal numero di punti che queste hanno in comune con una retta che le attraversa (fig. 2)<sup>16</sup>. La conoscenza del grado delle linee e delle superfici è particolarmente significativa nell'ambito della progettazione della forma, poiché sussiste una certa relazione fra l'ordine di una superficie e quello delle curve che le appartengono. Se consideriamo infatti due superfici algebriche che si intersecano, il grado della loro curva intersezione è dato dal prodotto de-

<sup>15</sup> Cfr. Loria 1912, pp. 71-97.

<sup>16</sup> Una sfera ad esempio è intersecata da una retta nello spazio in due punti, pertanto è una superficie algebrica di grado 2, e cioè una quadrica. Cfr. Migliari 2009b, pp. 145-147.

gli esponenti delle equazioni che le descrivono. Nel caso limite in cui una delle due superfici degenera in un piano, la curva intersezione avrà lo stesso grado della superficie sezionata (fig. 3); le ricadute di tale proprietà sono notevoli, come vedremo nel paragrafo che segue. Il punto di vista della geometria differenziale è ancora diverso. Questa considera infatti le linee e le superfici rispetto all'intorno infinitesimale di uno dei loro punti, mettendolo in relazione con l'ente geometrico più semplice che meglio ne approssima l'andamento (una retta, un piano, un cerchio o una sfera)<sup>17</sup>. Da una proprietà geometrico differenziale verificata nell'intorno dei punti di una linea o di una superficie è possibile derivare, di regola, proprietà relative alla struttura complessiva della figura<sup>18</sup>. Di interesse diretto della geometria differenziale è lo studio della curvatura di una curva, esprimibile nel punto, attraverso la misura della deviazione della curva dalla sua tangente. La curvatura di cui è suscettibile una curva piana si definisce flessione e giace nel piano della curva stessa. Dato un punto su una curva e la relativa tangente è possibile misurare il valore della curvatura calcolando l'inverso del raggio del cerchio che è tangente alla curva in quel punto. Tale cerchio si dice "cerchio osculatore", o "cerchio di curvatura" (dal latino *osculari* «baciare», da intendersi come il cerchio che bacia la curva nel punto), il suo centro prende il nome di "centro di curvatura", il suo raggio di "raggio di curvatura". A valori modesti del raggio di curvatura corrispondono valori elevati di curvatura, come accade ad esempio nel caso di curve stradali molto strette, in cui i cerchi osculatori sono piccoli; a valori elevati del raggio di curvatura corrispondono invece valori di curvatura modesti, come accade per curve particolarmente dolci, in cui i cerchi osculatori sono ampi (fig. 4). Nel caso delle curve sghembe il calcolo della curvatura combina due contributi distinti, la flessione e la

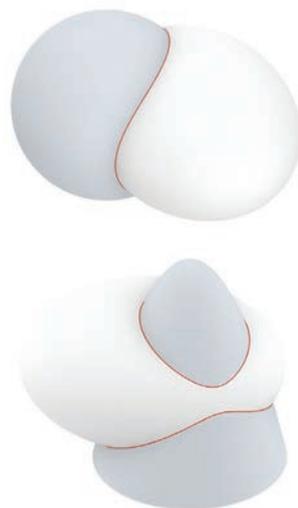


Fig. 3/ Curve del quarto ordine derivate dall'intersezione di due superfici quadriche.

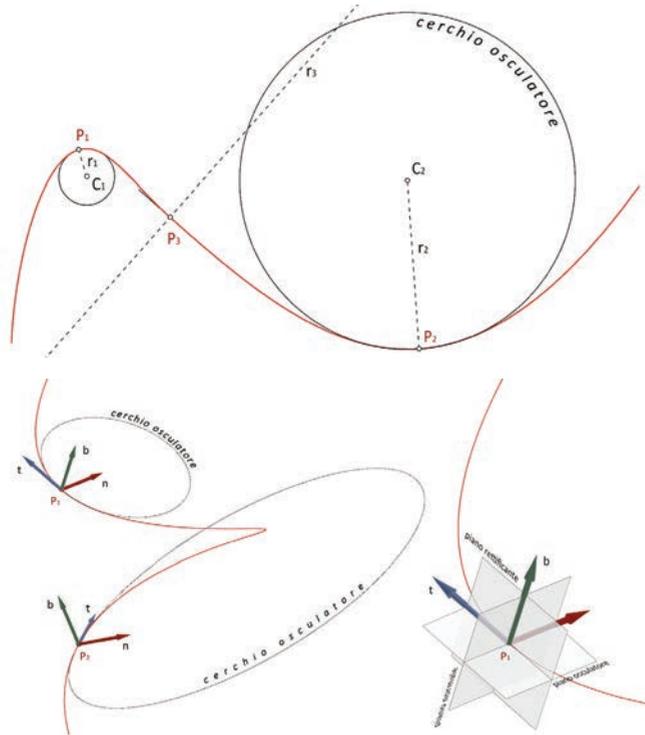
**17** Così si ottiene il concetto di tangente.

**18** Cfr. Hilbert, Cohn-Vossen 1932, pp. 223-351.

## Le linee curve per l'architettura e il design

Fig. 4/ Curvatura di una curva piana e relativo cerchio osculatore.

Fig. 5/ Curvatura di una curva sghemba e terna di Frenet; piano osculatore; piano normale; piano rettificante.



torsione. Per mettere a fuoco questo concetto possiamo immaginare i movimenti di cui è suscettibile un pezzo di filo di ferro, che si piega e si torce secondo due giaciture distinte<sup>19</sup>. Per attribuire univoca definizione a questi movimenti dobbiamo relazionarli ad una terna, la terna di Frenet<sup>20</sup>, diversamente orientata per ogni punto della curva perché composta dalla tangente, dalla normale, e dalla binormale alla curva. Il piano su cui avviene flessione, e cioè il piano osculatore, è determinato dalla tangente e dalla normale della terna di Frenet e su questo giace appunto il cerchio osculatore della curva nel punto considerato<sup>21</sup>. Il piano della torsione è invece determinato dalla normale e dalla binormale della terna di Frenet ed è pertanto ortogonale al piano osculatore (fig. 5).

Il controllo della curvatura di una curva è estremamente significativo da un punto di vista progettuale, poiché determina la qualità del suo andamento nel-

<sup>19</sup> Cfr. Ciarloni 2009, pp. 5-59.

<sup>20</sup> Sul contributo di Frenet allo studio delle curve gobbe si veda il paragrafo precedente.

<sup>21</sup> Possiamo immaginare il piano osculatore appartenente a tre punti consecutivi della curva infinitamente vicini.

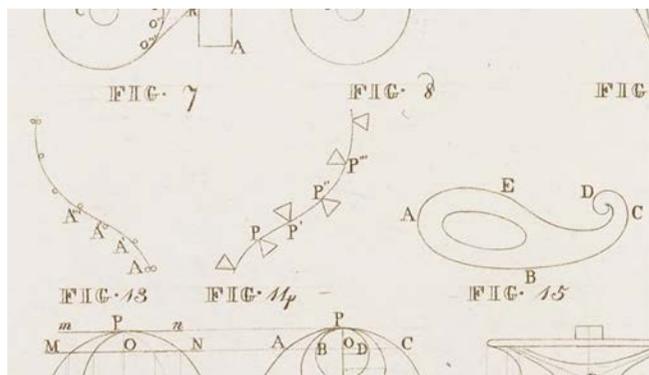


Fig. 6/ Chiodi e pesi per il controllo delle linee grafiche, figg.13 e 14 tratte da Dupin 1829.

lo spazio, in altre parole la sua tensione. Oggi la rappresentazione digitale implementa diversi strumenti diagnostici utili al controllo interattivo della qualità delle curve<sup>22</sup>, ma il problema del controllo della tensione di una curva ricorre nelle arti e nei mestieri, come testimoniato dai diversi manuali ottocenteschi di geometria applicata (fig. 6). Così racconta Charles Dupin nella sua *Geometria e meccanica delle arti, dei mestieri, delle belle arti*: «I costruttori di vascelli [...] vogliono dare una gran continuità di direzione e di curvatura alle linee [...]. Segnano essi i punti isolati, pei quali deve passare la curva: quindi fissano al di qua e al di là di questi punti alcuni chiodi, due per due, e a tal distanza che una linea sottile possa essere piegata e posta fra queste coppie di chiodi. Infine segnano con un lapis la curva tracciata [...]»<sup>23</sup>, e trasponendo il problema nell'ambito del disegno seguita: «Si sostituiscono allora alle grandi righe di legno, righe sottilissime di balena; alcune per tutto di egual dimensione servono a tracciare delle curve la cui curvatura non cangia che di piccole quantità; altre assottigliate degradatamente verso una sola estremità, o verso le due, servono a tracciare quelle linee, la cui curvatura diminuisce anche gradatamente da un'estremità all'altra. Alcuni pesi [...] di forma triangolare, si adoperano più comunemente per tenere su la carta il luogo dei chiodi [...]»<sup>24</sup>.

**22** La rappresentazione digitale ha implementato diverse funzioni di analisi diagnostica della qualità delle linee e delle superfici, come sarà approfondito nel capitolo che segue.

**23** Dupin 1829, p. 243.

**24** Dupin 1829, p. 243.

## Le linee curve per l'architettura e il design

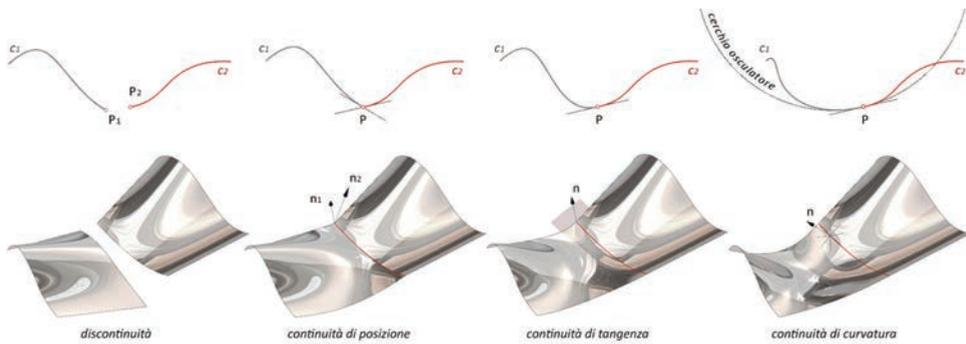


Fig. 7/ Continuità geometrica fra linee e superfici.

Interesse diretto della geometria differenziale è il controllo della continuità che sussiste fra curve contigue. Fra due curve che condividono un estremo può infatti sussistere una continuità di posizione, se le due curve hanno tangenti distinte nel loro estremo comune; di tangenza, se le due curve condividono nel punto comune la stessa tangente; di curvatura, se le due curve condividono nel punto di contatto lo stesso cerchio osculatore. Il concetto di continuità si estende anche alle superfici attraverso l'analisi del piano tangente che scorre lungo la loro curva di contatto (fig. 7).

Nella storia del progetto di architettura e di design, queste ed altre proprietà hanno fortemente condizionato la fortuna di alcune classi di linee e di superfici. La breve ricognizione che segue intende illustrare a scopo esemplificativo una selezione di curve notevoli appartenenti tutte a superfici che sono a loro volta notevoli. Le superfici in questione si imposero nella pratica progettuale per via di alcune proprietà che le hanno rese particolarmente adatte ad essere controllate attraverso il disegno in fase di progetto e ad essere riprodotte in opera in fase di realizzazione. Si tratta in generale delle superfici quadriche, algebriche, degli elicoidi, ricorsivi, e di alcune superfici di rivoluzione, come il toro. Generalmente riprodotte in pietra da taglio, in acciaio o in cemento armato, queste superfici hanno di fatto

dominato la progettazione della forma dall'antichità sino ai giorni nostri, dove le vediamo cedere il passo alle superfici di forma libera. Come queste superfici sono state privilegiate nell'ambito della progettazione della forma, così lo sono state le curve, piane o sghembe, algebriche o trascendenti che gli appartengono. A queste curve in particolare è dedicata la ricognizione che segue.

### **Curve notevoli nell'architettura e nel design**

Il piccolo repertorio a cui è dedicata questa breve ricognizione riguarda curve piane e sghembe che appartengono a superfici notevoli, che derivano in particolare dall'intersezione di superfici o che sussistono in ragione delle superfici a cui appartengono.

#### *Curve derivate dall'intersezione di superfici*

Le curve derivate dall'intersezione fra superfici rivestono un ruolo determinante nella progettazione della forma. Linee e superfici, infinite nell'universo astratto della geometria, acquisiscono forma finita nello spazio fisico, e cioè nel mondo reale, dove se ne considera una porzione più o meno estesa, sezionata secondo un piano o secondo un'altra superficie. Il profilo di una porzione di superficie è dunque una curva, piana oppure sghemba.

Come anticipato nel paragrafo precedente, una superficie algebrica sezionata da un piano restituisce una curva il cui grado coincide con quello della superficie stessa. Le ricadute di questa proprietà sono notevoli. Se sezioniamo ad esempio una quadrica con un piano otteniamo una curva piana di secondo grado e cioè una conica. Innumerevoli in geometria e matematica sono le trattazioni teoriche e pratiche dedicate alle coniche, a cui non è possibile far cenno senza risultare superficiali e approssimativi poiché «[...] una semplice raccolta degli enunciati delle proposizioni che vi si riferiscono riempirebbe parec-

## Le linee curve per l'architettura e il design



Fig. 8/ Curve del quart'ordine derivate dall'intersezione di due superfici quadriche, una quartica generica, una quartica digrammica e la finestra di Viviani.

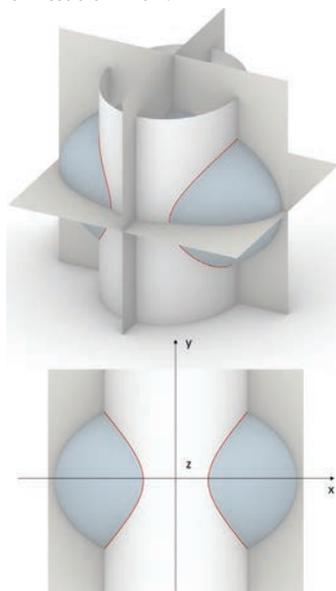


Fig. 9/ Proiezioni piane delle curve del quarto ordine derivate dall'intersezione di due superfici quadriche sui piani principali comuni alle due quadriche.

**25** Cfr. Loria 1930a, p. 13.

**26** Il numero delle quadriche dipende dalla maniera di considerarle. In questo caso si considera una sola superficie nel caso in cui la quadrica sia rotonda oppure ellittica.

chi poderosi volumi»<sup>25</sup>. Quello che ci si limita a mettere in evidenza è che queste curve dalle proprietà straordinarie erano note sin dall'antichità e, poiché piane, potevano essere rappresentate con accuratezza per via grafica. La profonda conoscenza delle coniche e delle loro proprietà ne favorì l'uso nella progettazione della forma e, con loro, quello delle superfici quadriche che gli appartengono poiché, in generale, dalla capacità di rappresentazione di una curva dipende il suo controllo progettuale.

Ma la fortuna delle superfici quadriche si deve anche da altre proprietà. Sette in tutto<sup>26</sup>, l'ellissoide (o la sfera come caso particolare) il cono e il cilindro, il paraboloido ellittico e il paraboloido iperbolico, l'iperboloido a una falda e l'iperboloido a due falde, sono superfici simmetriche a centro, proprio o improprio. Per questo centro passano tre assi principali o assi di simmetria ortogonale che definiscono a coppie i piani principali, anch'essi piani di simmetria ortogonale. In generale, la curva intersezione fra due superfici algebriche ha grado pari al prodotto degli esponenti delle equazioni delle superfici date. Così l'intersezione di due superfici quadriche è una quartica, e cioè una curva sghemba di quarto grado, che può essere composta da un solo ramo, nel caso in cui le superfici si intersecano parzialmente, o che può essere digrammica, composta cioè da due rami, nel caso in cui una superficie attraversi intera-



Fig. 10/ Volta a crociera e volta a botte con lunette cilindriche dei portici del cortile di Palazzo Farnese in Roma (per gentile concessione dell'Ambasciata di Francia).

mente l'altra. Se le superfici che si intersecano sono tangenti in un punto la curva si autointerseca, come la finestra di Viviani, studiata nella seconda metà del Seicento, generata dall'intersezione di un cilindro tangente ad una sfera il cui centro giace sulla superficie del cilindro (fig. 8). Quando due quadriche che si intersecano condividono gli stessi piani di simmetria ortogonale, la curva del quart'ordine derivata dalla loro intersezione è simmetrica rispetto a tali piani<sup>27</sup> e si proietta, su questi, in una conica, secondo le direzioni degli assi principali della superficie (fig. 9)<sup>28</sup>. Curve di questa specie sono ad esempio le coniche sferiche, quartiche digrammiche derivate dall'intersezione di una quadrica con una sfera, studiate da Fuss, Steiner e Chasles tra la fine del Settecento e i primi anni dell'Ottocento<sup>29</sup>.

Le applicazioni delle quadriche in architettura sono molteplici. Coni, cilindri e sfere sono infatti alla base dei sistemi voltati semplici o composti e ricorrono nelle architetture in pietra e in muratura, dall'antichità sino ai tempi moderni. Le cupole emisferiche, i relativi pennacchi e le volte a vela si costruiscono infatti a partire da una sfera, così come le volte a botte, le crociere, le volte a padiglione, le lunette cilindriche si ricavano da cilindri e coni quadrici. Gli spigoli che derivano dalla reciproca intersezione di

**27** L'enunciato di questo teorema è pubblicato in Frère 1920, pp. 645-646; nota al punto 1053 di M. E. Lemoine.

**28** Una interessante trattazione sulle quartiche si deve a Frézier, che le considera come intersezioni di superfici quadriche e le controlla attraverso le coniche che ne sono proiezione piana. Cfr. Salvatore 2012.

**29** Cfr. Loria 1931, pp. 111-125.

## Le linee curve per l'architettura e il design

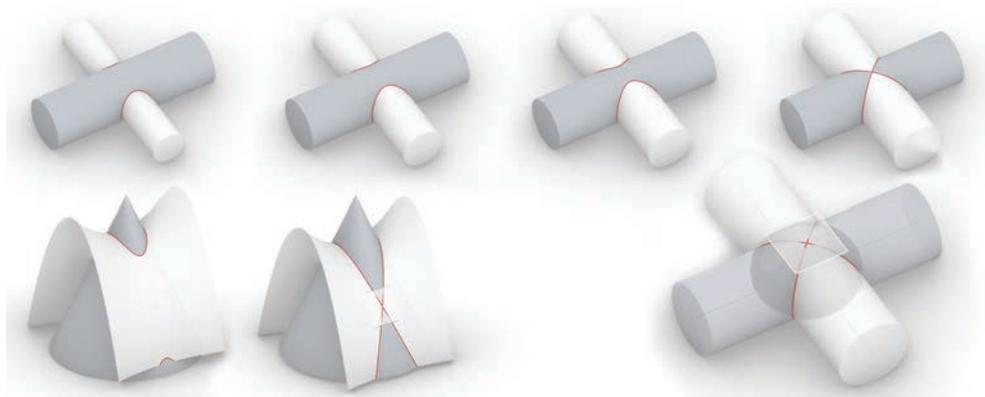


Fig. 11/ Intersezioni piane fra superfici quadriche.

queste superfici sono nel caso generale curve a doppia curvatura di quarto grado, come ad esempio gli spigoli delle lunette cilindriche, derivate appunto dall'intersezione di due volte a botte a sesto diverso, che ricorrono con una certa frequenza nell'architettura rinascimentale e barocca (fig. 10).

Se dall'intersezione di due quadriche si ricava in generale una quartica, esistono alcune condizioni notevoli in cui l'intersezione si riduce ad una coppia di curve piane<sup>30</sup>. Una curva algebrica intersezione fra due superfici può scomporsi infatti in più curve di grado inferiore purché la loro somma restituisca il grado complessivo della curva. Un particolare teorema di Monge insegna che se due quadriche che si intersecano sono circonscritte ad una terza quadrica, queste si sezionano secondo un sistema di curve piane, e cioè secondo una coppia di coniche<sup>31</sup> (due curve di secondo grado piuttosto che una curva di grado quattro). Le superfici che si intersecano condividono, nei punti di contatto, gli stessi piani tangenti (fig. 11). Estremamente ricorrente, questa condizione è alla base delle intersezioni fra i cilindri che compongono le volte a crociera, dove i costoloni risultano infatti ellittici. Applicazioni particolarmente suggestive in cui ricorrono intersezioni piane fra superfici quadriche si ritrovano nelle volte stellate leccesi (fig. 12).

**30** Sulle coniche intersezioni piane di superfici algebriche cfr. Salvatore 2009a.

**31** L'enunciato di questo teorema di Monge è riportato da Jean Nicolas Pierre Hachette, cfr. Hachette 1813, p. 321.

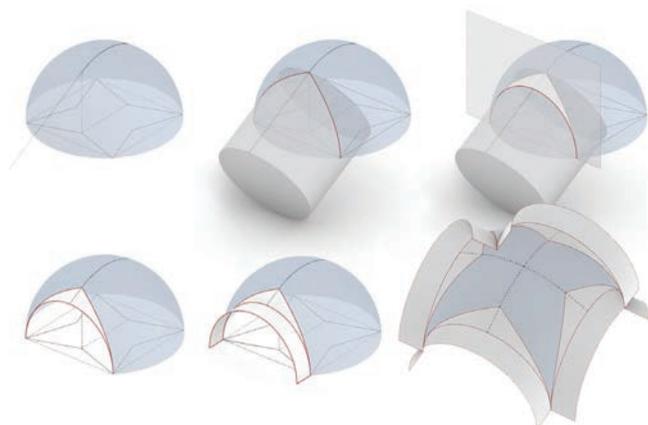


Fig. 12/ Genesi geometrica di una volta leccese a spigolo.

Di particolare interesse rispetto alle quadriche e alle coniche che ne sono la sezione piana, è un problema particolarmente spinoso in architettura, che riguarda la progettazione delle volte sbieche, composte da cilindri quadrici sezionati da piani genericamente orientati rispetto al loro asse. Le superfici quadriche che prevedono ellissi come sezioni piane, ammettono come caso particolare anche le sezioni circolari. Se si immagina una volta a botte formata da un cilindro quadrico rotondo oppure ellittico, è facile comprendere come ogni variazione di giacitura dei piani che delimitano la volta, come un muro a scarpa o un muro ruotato di un certo angolo rispetto all'altro, introduca variazioni dell'arco di faccia che, genericamente ellittico, ammette una sola configurazione circolare (fig. 13). Nel caso dell'architettura di pietra, in cui le volte sono ripartite in conci, i cambiamenti di giacitura dell'arco di faccia producono diversi inestetismi dovuti alla difficoltà di ripartizione dei fronti in elementi regolari. Questa problematica favorì in stereotomia il fiorire di numerose soluzioni orientate alla ottimizzazione degli apparecchi murari e cioè del progetto dei conci di una volta sbieca che alimentarono un ricco repertorio di casi particolari<sup>32</sup> (fig. 13).

Come coni cilindri e sfere hanno trovato largo im-

**32** A questo riguardo cfr. Salvatore 2009b.

## Le linee curve per l'architettura e il design

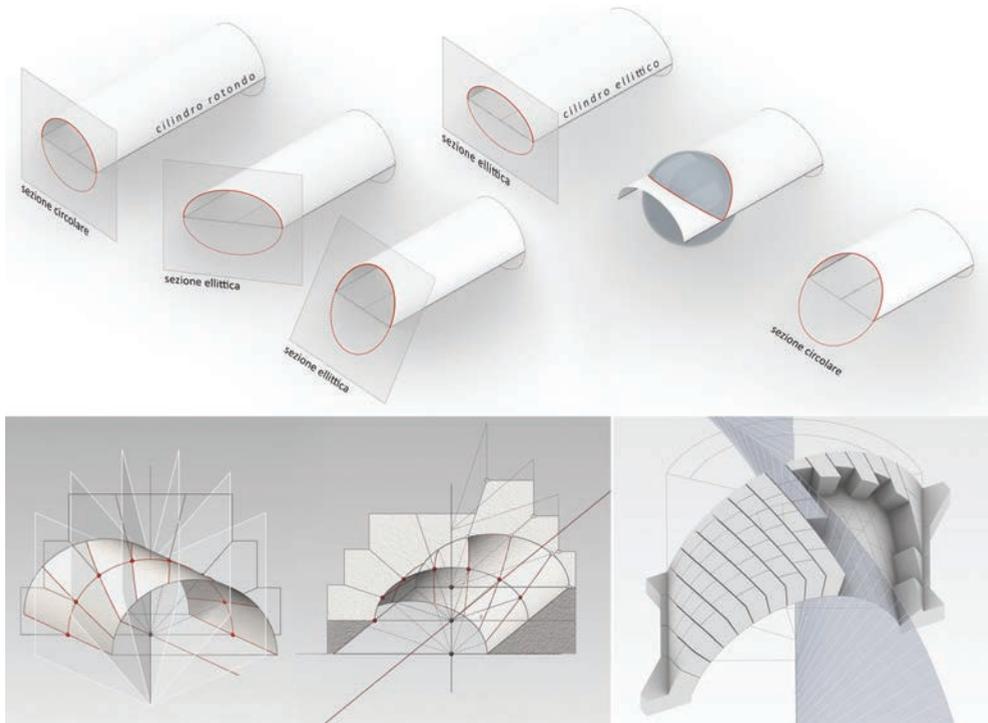


Fig. 13/ Sezioni piane di un cilindro quadrico (in alto); apparecchi in pietra da taglio per la soluzione delle volte sbieche (in basso).

piego nell'architettura storica, così paraboloidi e iperboloidi ricorrono nelle architetture di maestri del movimento moderno come Pier Luigi Nervi o Felix Candela. In particolare, nelle architetture di Candela i paraboloidi iperboliche raggiungono massimi livelli di espressività formale; aggregati in maniera di volta in volta diversa, rivelano l'intero repertorio delle linee che si possono ottenere sezionando o intersecando questa superficie, come mostra il caso della *Capilla de Palmira* realizzata a Morelos, in Messico, intorno alla metà degli anni Cinquanta (fig. 14).

Anche l'architettura contemporanea ricorre alle superfici quadriche e alle curve di secondo e quarto grado derivate dalle loro rispettive intersezioni o sezione piane. La sezione circolare di un cilindro ellittico si riscontra nella chiesa di San Giovanni Battista realizzata a Mogno da Mario Botta nel 1996 (fig. 15) e profili circolari delimitano i quadrilateri sferici



delle vele della chiesa di *Dives in Misericordia* realizzata da Richard Meyer a Roma nel 2003 (fig. 16). Archi iperbolici sezionano i paraboloidi iperbolici della sede della Bacardi realizzata nel 1960 a Cuautitlán, in Messico, da Felix Candela, e ancora archi di faccia iperbolici caratterizzano gli spicchi della copertura del ristorante Los Manantiales progettato negli stessi anni dallo stesso architetto, che si intersecano fra loro secondo parabole uguali. Le stesse geometrie ricorrono nell'Oceanografico di Valencia progettato anch'esso da Candela alla fine degli anni novanta (fig. 17). Archi iperbolici si ritrovano infine nella Tromsø Public Library in Norvegia, progettata da Kjell Beite nel 2005, di impianto affine a Los Manantiales e nella Franklin Halle a Berlino realizzata da Stubbins nel 1957. Curve del quart'ordine intersezione di un ellissoide con un cilindro si ritrovano nel *National Theatre* di Pechino realizzato da Paul Andreu nel 2007, e ancora una curva del quarto ordine intersezione di un paraboloido iperbolico con un cilindro, delimita la copertura del mini circuito della Volkswagen progettato dallo studio Gratz nel 2017, la stessa che caratterizza il profilo di celebri patatine, interse-

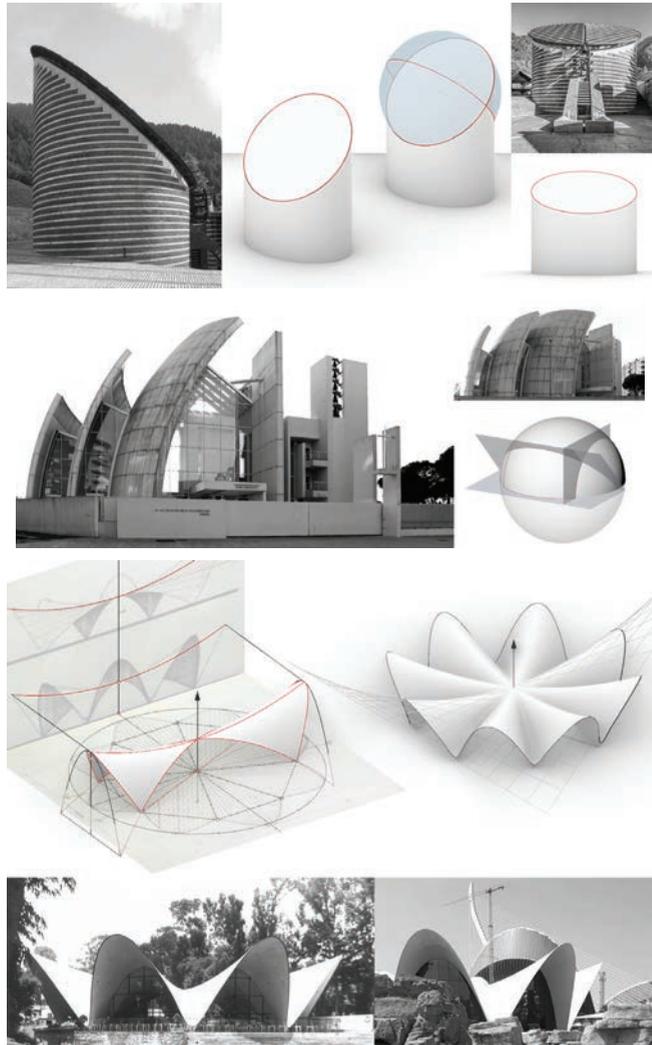
Fig. 14/ Genesi geometrica della *Capilla de Palmira* di Felix Candela.

## Le linee curve per l'architettura e il design

Fig. 15/ Cilindro rotondo sezionato secondo un'ellisse nella chiesa di San Giovanni battista a Mogno di Mario Botta, 1996.

Fig. 16/ Quadrilateri sferici delle vele della chiesa *Dives In Misericordia* a Roma realizzata da Richard Meyer nel 2003.

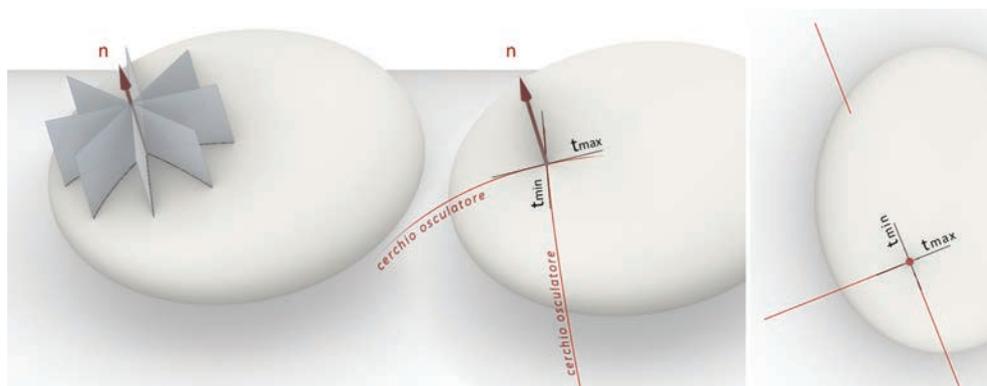
Fig. 17/ Paraboloidi iperbolici e relative sezioni piane nel ristorante Los Manantiales del 1958 e nel Museo Oceanografico della Città delle Arti e delle Scienze di Valencia del 1996, di Felix Candela.



zione di paraboloidi iperbolici con il cilindro rotondo della confezione.

### *Curve delle superfici*

Di altrettanto interesse nell'ambito della progettazione della forma sono le curve che possiamo definire "proprie" delle superfici, e cioè quelle che trovano ragione geometrica nelle proprietà locali della superficie a cui appartengono, senza la quale non potreb-



bero essere costruite. Trovano ampia applicazione nell'ambito dell'architettura e del design le linee di curvatura, le eliche e le spirali sghembe, le lossodromie, le ortodromie, le geodetiche e infine le curve che possiamo definire "iso", composte da punti che mantengono costante una certa proprietà.

Fig. 18/ Genesi geometrica delle linee di curvatura sulla superficie di un ellissoide.

Le *linee di curvatura* di una superficie hanno avuto applicazioni notevoli nella storia dell'architettura sin dall'antichità, perché impiegate in maniera intuitiva molti secoli prima della loro teorizzazione<sup>33</sup>.

Si tratta di due schiere di curve continue che coprono senza lacune una superficie a punti regolari e che hanno la caratteristica di essere in ogni punto perpendicolari fra di loro. Questa condizione di ortogonalità costante che le caratterizza e che le ha rese e ancora le rende eccezionalmente attraenti nelle arti applicate, si deve alla proprietà notevole di tali curve di avere in ogni punto la direzione delle curvature principali della superficie a cui appartengono.

Immaginiamo dunque una superficie curva e un punto scelto a piacere su questa. Immaginiamo poi di costruire la normale alla superficie nel punto e il fascio di piani che ammette detta normale come retta di sostegno. I piani del fascio sezioneranno la superficie assegnata secondo un sistema di infinite curve, ognuna con un valore proprio di curvatura. Due

**33** In particolare, nella stereotomia della pietra le linee di curvatura venivano impiegate in modo intuitivo nella progettazione degli apparecchi murari perché coincidenti con le direttrici e le generatrici di molte delle superfici quadriche che venivano correntemente impiegate.

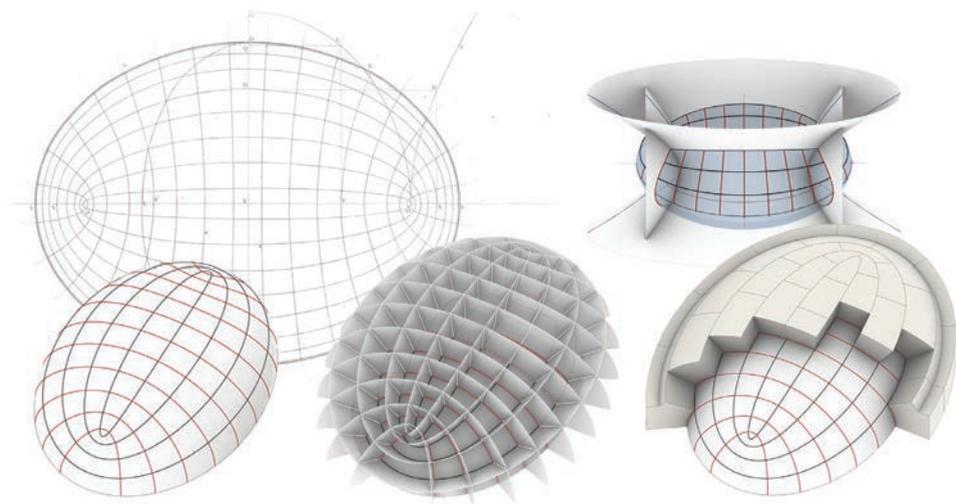


Fig. 19/ Linee di curvatura di un ellissoide e loro applicazione nella *Géométrie descriptive* di Monge.

di queste sezioni avranno rispettivamente curvatura massima e minima nel punto considerato (fig. 18), si definiscono curvatures principali e sono fra loro perpendicolari, come dimostrato da Eulero nella seconda metà del Settecento<sup>34</sup>. Operando nell'ambito della geometria differenziale immaginiamo di spostarci progressivamente di una quantità infinitesimale, lungo una delle due direzioni principali di curvatura e di reiterare il procedimento fino ad ottenere la costruzione di una linea che corra lungo la superficie in tutta la sua estensione. Avremmo ottenuto così una linea di curvatura, tangente, per costruzione, alle direzioni principali di curvatura della superficie data. Reiterando il procedimento per entrambe le direzioni principali di curvatura in tutti i punti della superficie otteniamo le due schiere.

Le linee di curvatura furono teorizzate per la prima volta da Gaspard Monge che dimostrò come le normali ad una superficie curva, possano essere considerate intersezioni di due schiere di superfici sviluppabili, che si sezionano ad angolo retto. Così l'insieme delle normali ad una linea di curvatura genera una superficie sviluppabile, ortogonale, per costruzione, alla sviluppabile che appartiene all'altra schiera<sup>35</sup> (fig. 19).

**34** Cfr. Eulero 1767, pp. 119-143.

**35** Cfr. Monge 1798, pp. 120-127.

La possibilità di costruire un sistema di curve ortogonali fra loro su di una superficie, a sua volta ortogonale ad un sistema di superfici sviluppabili, rendeva queste curve particolarmente adatte alla soluzione di alcuni problemi di perpendicolarità fra superfici in architettura, come nel caso della stereotomia della pietra, ampiamente trattata dallo stesso Monge, dove la condizione di perpendicolarità fra i conci veniva pienamente soddisfatta dalle proprietà di queste curve<sup>36</sup>.

Significativi contributi furono dati dagli allievi della scuola di Monge, rivolti alla ricerca di metodi di costruzione delle linee di curvatura basati sulle loro proprietà geometriche. In particolare, una memoria di Binet dimostrò come le linee di curvatura di una superficie di secondo grado fossero date dall'intersezione di questa con una coppia di quadriche di tipo diverso, a questa confocali, e come queste tre superfici fossero perpendicolari fra di loro. Dupin generalizzò in seguito la questione, meglio nota come teorema di Dupin, dimostrando che data una schiera triplamente ortogonale di superfici, le linee di curvatura di ognuna, sono le sue intersezioni con le altre superfici della schiera<sup>37</sup> (fig. 19).

Le linee di curvatura sono oggi impiegate nella soluzione dei problemi di tassellazione delle superfici con mesh quadrangolari.

Fra le curve sghembe di maggiore interesse per via delle loro innumerevoli applicazioni nei diversi ambiti delle arti applicate troviamo le *eliche* e le *spirali* sghembe. Da un punto di vista strettamente architettonico l'interesse per queste curve deriva dal loro ricorrente utilizzo come generatrici di elicoidi, superfici di intradosso e di copertura di scale e rampe. Entrambe queste curve sono determinate dal moto di un punto che ruota intorno ad un asse e che, durante la rotazione, trasla secondo una direzione assegnata

**36** La costruzione dell'apparecchio ellissoidale fu affrontata da Monge e dal suo allievo Leroy. Cfr. Monge 1796, pp. 145-165 e Leroy 1862, pp. 254-256.

**37** Per approfondimenti cfr. Fallavollita, Salvatore 2012a.



Fig. 20/ Eliche cilindriche nelle scale elicoidali e nelle viti; planches tratte dal *Traité de stereotomie* di C. F. A. Leroy, ed. 1877.



Fig. 21/ Genesi geometrica di un'elica cilindrica e suo sviluppo piano.

**38** Si ricorda che il passo di eliche e spirali sghembe misura l'ampiezza di una spira, e cioè la differenza di quota del punto mobile misurata dall'inizio alla fine di un giro completo.

**39** Per approfondimenti cfr. Salvatore 2011.

(fig. 20). Trascendenti e generate dal medesimo movimento rototraslatorio, queste curve apparentemente simili hanno invece proprietà molto diverse.

Un'elica è una curva a pendenza costante o isoclina, e cioè una linea la cui tangente in ogni punto forma un angolo costante con un piano perpendicolare all'asse; al contrario dell'elica una spirale sghemba è invece una curva a passo costante<sup>38</sup>. È possibile costruire queste curve su diverse superfici, ma operando in ambito architettonico e di design l'attenzione si rivolge nuovamente alle quadriche, a cominciare da quelle sviluppabili e cioè coni e cilindri. La costruzione di un'elica su di una superficie sviluppabile rivela infatti, nel suo sviluppo piano, una interessante proprietà: la curva si trasforma in una linea retta (fig. 21). La pendenza costante della curva insieme alla possibilità di poterla controllare con accuratezza fuori opera, attraverso il suo sviluppo piano, ha reso l'elica, in particolare quella cilindrica, una curva privilegiata nei processi di progettazione delle solette e delle coperture di rampe e scale. Le applicazioni sono molto numerose, di particolare interesse quelle relative al taglio dei conci delle scale in pietra da taglio, in cui lo sviluppo piano dell'elica, involupato in opera sul concio da intagliare veniva impiegato come modano per guidare le operazioni di taglio<sup>39</sup> (fig. 22).

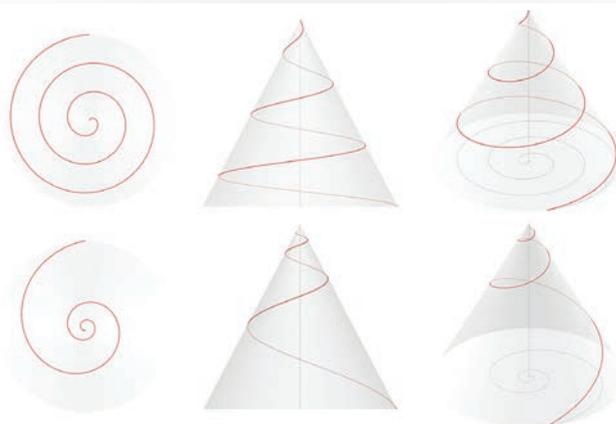
Se nel caso del cilindro elica e spirale sono la stessa curva, lo stesso non si verifica nel caso del cono,

## Geometria delle linee curve per la genesi della forma



Fig. 22/ Apparecchio stereotomico di una scala elicoidale.

Fig. 23/ Eliche e spirali coniche e relative proiezioni piane notevoli.



dove invece le due curve rivelano tutta la loro diversità. L'elica conica infatti, avendo una pendenza costante, ha un passo che varia lungo la sua estensione riducendosi progressivamente man mano che ci si avvicina al vertice della superficie. Al contrario una spirale conica, mantenendo un passo costante, ha una pendenza che varia lungo la sua estensione e che aumenta progressivamente avvicinandosi al vertice della superficie. È possibile ottenere un'elica co-



Fig. 24/ Rampa elicoidale d'ingresso dei Musei Vaticani, realizzata da Giuseppe Momo nel 1932.



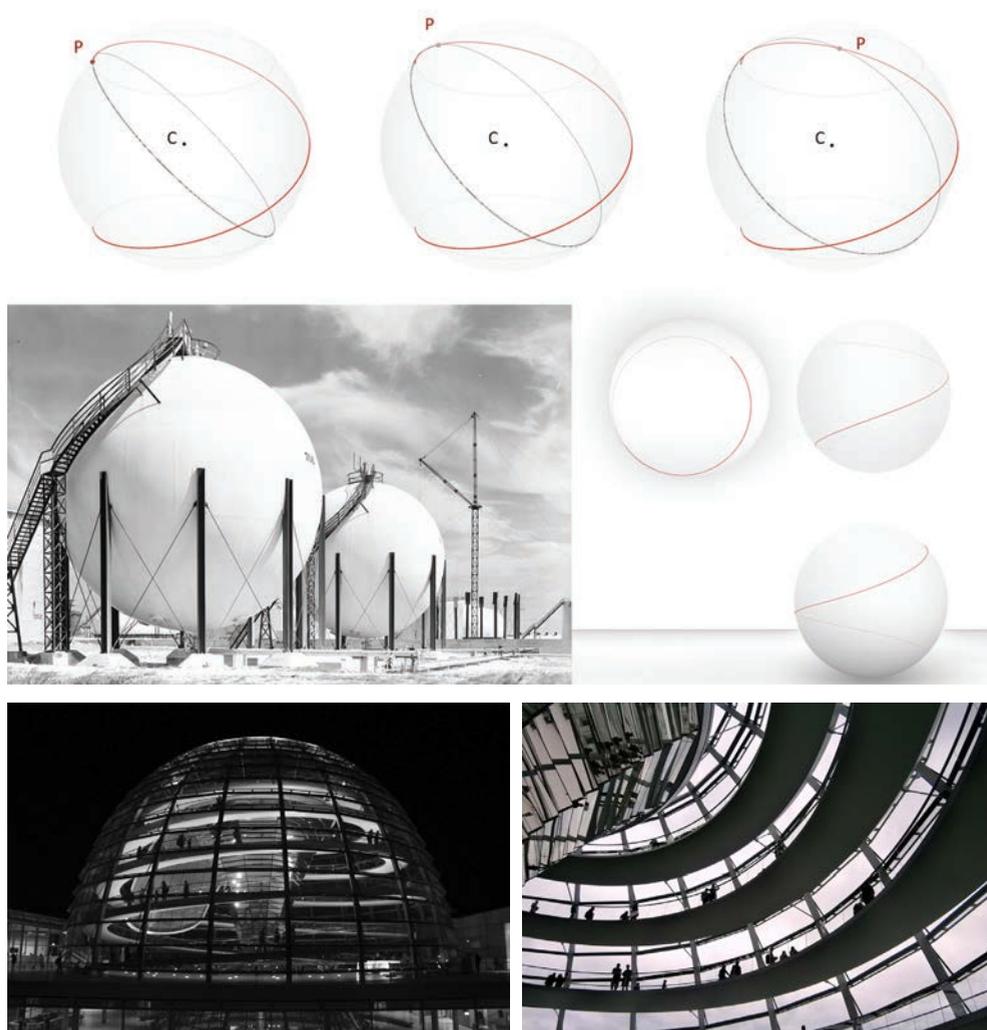
Fig. 25/ Esterno della rampa elicoidale del Guggenheim Museum di New York. Frank Lloyd Wright 1943-1959.

nica per proiezione secondo la direzione dell'asse del cono di una spirale logaritmica che gli è perpendicolare, così come è possibile ottenere una spirale conica (in particolare la spirale di Pappo) per proiezione secondo la direzione dell'asse del cono di una spirale di Archimede che gli è perpendicolare (fig. 23).

Le ricadute in ambito progettuale sono significative. Nel progetto di una scala o una rampa conica infatti, l'uso dell'elica produce una variazione di altezza della rampa, quello della spirale invece, la variazione di ampiezza delle pedate, come accade nella *Doppia rampa elicoidale d'ingresso dei Musei Vaticani* progettata nel 1932 da Giuseppe Momo, in cui la riduzione delle pedate verso il vertice del cono denuncia la variazione della pendenza e perciò l'utilizzo di una spirale conica come curva direttrice dell'elicoide (fig. 24), e nel Guggenheim Museum di New York, realizzato da Frank Lloyd Wright intorno alla metà degli anni cinquanta (fig. 25).

Interessante rispetto alle sue applicazioni in architettura anche il caso dell'elica sferica, curva direttrice di elicoidi impiegati per la progettazione delle scale di servizio ai serbatoi sferici di stoccaggio dei depositi industriali (fig. 26). L'elica sferica è descritta dal moto di un punto che appartiene ad un cerchio massimo della sfera che ruota su un cerchio fisso, avente la giacitura rispetto alla quale la curva mantiene pendenza costante. A differenza dell'elica, la spirale sferica è

## Geometria delle linee curve per la genesi della forma



descritta da un punto che si muove con velocità costante lungo un meridiano della sfera che ruota a sua volta con velocità costante attorno all'asse polare.

Alcune forme dell'architettura contemporanea impiegano eliche e spirali su altri tipi di quadriche, quali ad esempio ellissoidi o iperboloidi. È questo il caso della rampa elicoidale interna all'ellissoide della cupola del Reichstag a Berlino, realizzata nel 1999 da Norman Foster (fig. 27), e quello della rampa elicoidale

Fig. 26/ Costruzione di un'elica sferica e sue applicazioni in architettura, Chicago Bridge & Iron Co., Lago plant, Aruba (foto R. Y. Richie, 1939).

Fig. 27/ Rampa elicoidale interna all'ellissoide della cupola del Reichstag a Berlino, realizzata nel 1999 da Norman Foster.

## Le linee curve per l'architettura e il design



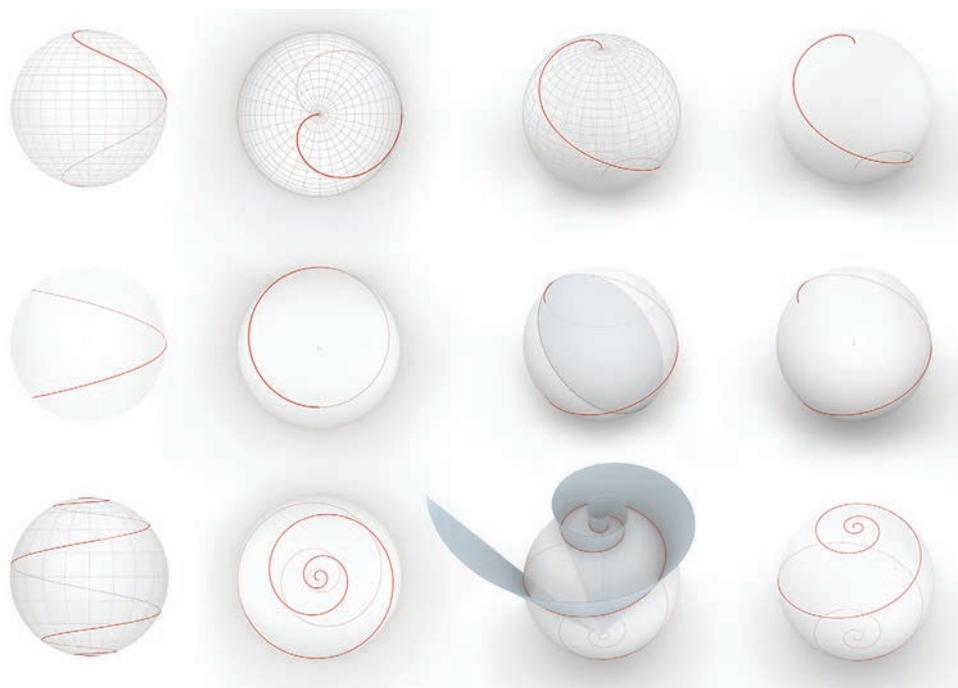
Fig. 28/ Linee geodetiche di superfici notevoli.

dale interna all'iperboloide a una falda della *Observation tower of the Tree-top adventure park*, presso Copenhagen, progettata nel 2017 da Effekt studio.

Un ruolo significativo è ricoperto dalle *linee geodetiche*, che sono linee di minima distanza fra due punti assegnati su di una superficie. Fra le infinite curve che possiamo costruire fra due punti di una superficie data, quella di minima distanza gode della proprietà di condividere, in ogni suo punto, la normale principale con quella della superficie a cui appartiene. Di conseguenza, in ogni punto di una geodetica, il piano osculatore è ortogonale alla superficie su cui giace la curva. Tale piano è infatti determinato dalla tangente alla curva e da un punto sulla curva stessa che, immaginando una condizione infinitesimale propria della geometria differenziale, tende al punto dato, condizione limite rappresentata dal piano che appartiene alla tangente e alla normale della terna di Frenet, costruita per il punto assegnato.

Data quindi una superficie e due punti su questa, la geodetica che li unisce avrà in ogni suo punto la normale coincidente con la normale alla superficie nel punto e, di conseguenza, alla geodetica apparterrà una superficie rigata costantemente perpendicolare alla superficie a cui questa appartiene, formata dall'insieme delle normali condivise.

Le geodetiche di alcune superfici notevoli sono a loro volta curve notevoli. È questo il caso della sfera,



le cui geodetiche sono tratti di cerchi massimi, del cono e del cilindro quadrici, in cui le geodetiche sono eliche della superficie, infine del piano, in cui le curve geodetiche si riducono a linee rette. Di particolare interesse infine, la costruzione delle geodetiche sulle superfici sviluppabili, perché si sviluppano secondo linee rette, come quelle dei coni e dei cilindri (fig. 28). Le geodetiche trovano ampia applicazione nella soluzione di problemi cartografici, in particolare quelle della sfera, che prendono il nome di ortodromie, e che indicano la distanza più breve da seguire per raggiungere due punti distinti sulla superficie terrestre. Se immaginiamo la divisione in meridiani e paralleli della terra osserviamo come i meridiani siano tutti ortodromie della sfera, e come invece l'unico parallelo ad essere una ortodromia sia l'equatore. Le *lossodromie* (dal greco  $\lambda\omicron\zeta\delta\varsigma$  *obliquo* e  $-\delta\rho\mu\iota\varsigma$  *corsa*) sono curve che appartengono alle superfici

Fig. 29/ Spirali, eliche e lossodromie della sfera.

## Le linee curve per l'architettura e il design

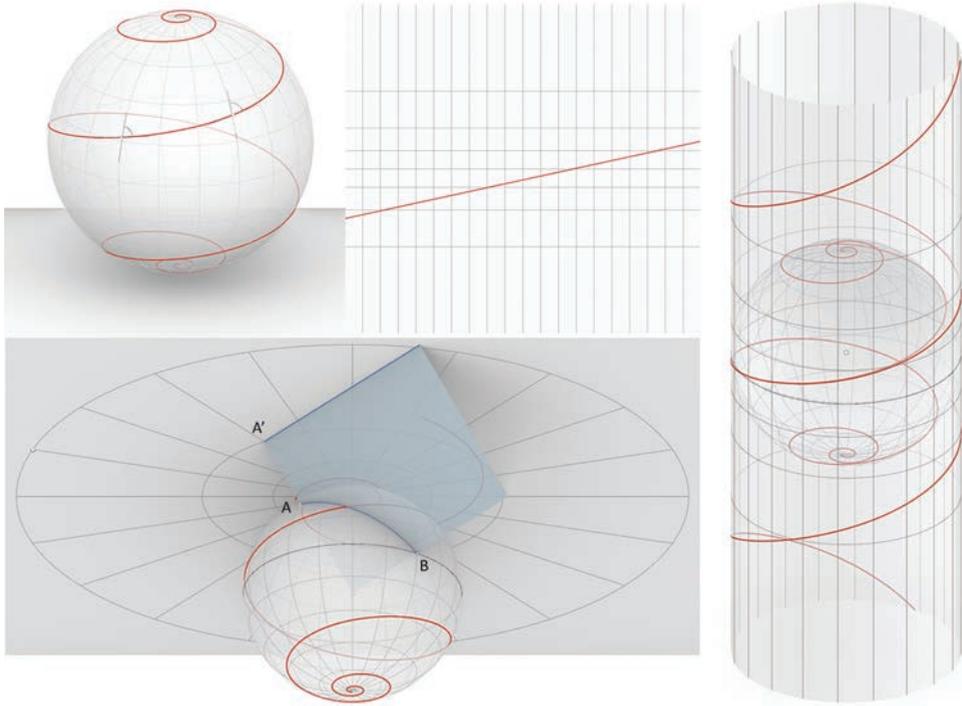
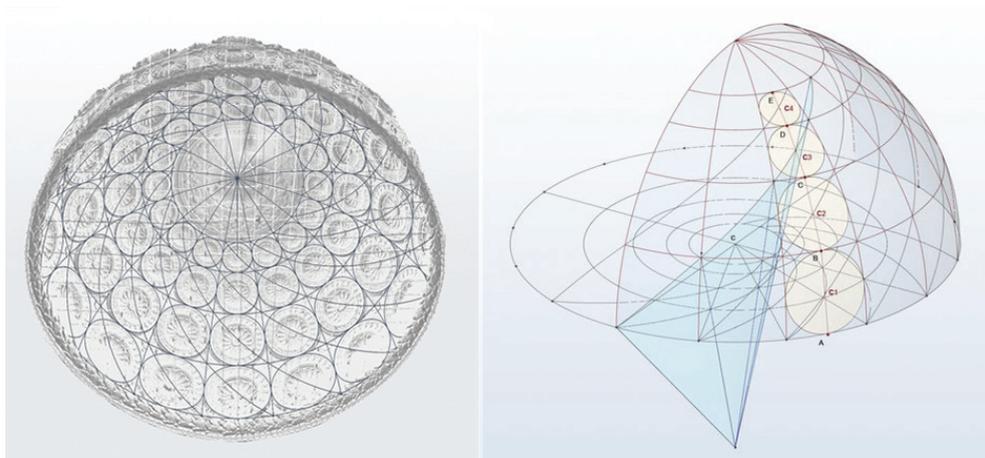


Fig. 30/ Proiezione gnomonica e proiezione di Mercatore.

di rivoluzione e che mantengono costante l'angolo che formano con i meridiani della superficie. Come le geodetiche anche le lossodromie di superfici notevoli sono curve notevoli. È questo il caso delle lossodromie del cilindro e del cono, che coincidono con le relative eliche e che si sviluppano, nel piano, secondo linee rette. Di particolare interesse le lossodromie dei coni quadrici rotondi e quelle della sfera, che hanno relazioni proiettive con le spirali logaritmiche, curve piane anch'esse a pendenza costante. La lossodromia di un cono rotondo si proietta infatti secondo la direzione dell'asse su un piano che gli è perpendicolare secondo questa curva. La stessa si ricava per proiezione stereografica della lossodromia della sfera, proiezione conforme che preserva la costanza angolare (fig. 29).

Come le ortodromie, anche le lossodromie trovano ampia applicazione nell'ambito della cartogra-



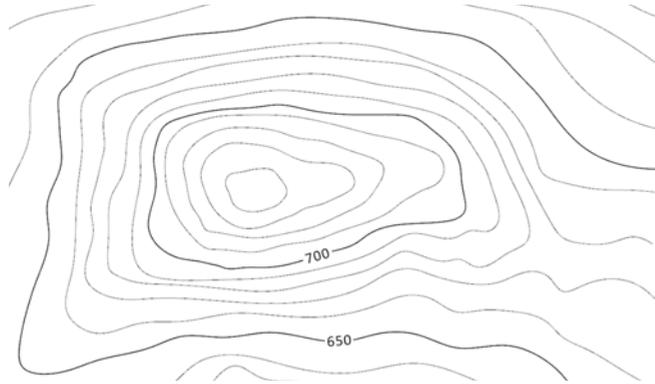
fia, perché i loro tracciati consentono di mantenere una rotta costante<sup>40</sup>. In aeronautica alle ortodromie e alle lossodromie sono affidate le traiettorie della navigazione. In particolare, alle ortodromie la traiettoria ideale perché la più breve, alle lossodromie la rotta da seguire per approssimare con andamento costante la traiettoria definita dalle ortodromie. Fra le diverse carte che possono ottenersi per proiezione di meridiani e paralleli da un centro proprio su di un piano posto secondo determinate giaciture rispetto alla sfera che approssima la superficie terrestre, ve ne sono due che sono notevoli rispetto alle curve in esame, la proiezione gnomonica e la proiezione di Mercatore. La proiezione gnomonica, polare, proietta meridiani e paralleli dal centro della sfera su di un piano parallelo a quello equatoriale. I meridiani convergono verso il centro, i paralleli si proiettano secondo circonferenze, e le ortodromie si proiettano in linee rette. La proiezione di Mercatore che deve il nome al cartografo fiammingo che la definì nel 1569 è invece una proiezione cilindrica eseguita dal centro della sfera su di un cilindro rotondo le cui sezioni principali circolari coincidono con un cerchio massimo della sfera, e cioè con l'equatore. Lo sviluppo piano del cilindro restituisce una carta in cui me-

Fig. 31/ Lossodromia della cupola del portico della Cappella Pazzi a Firenze.

<sup>40</sup> Per approfondimenti su lossodromie, eliche e spirali cfr. Baglioni 2007.

## Le linee curve per l'architettura e il design

Fig. 32/ Isoipse o curve di livello.



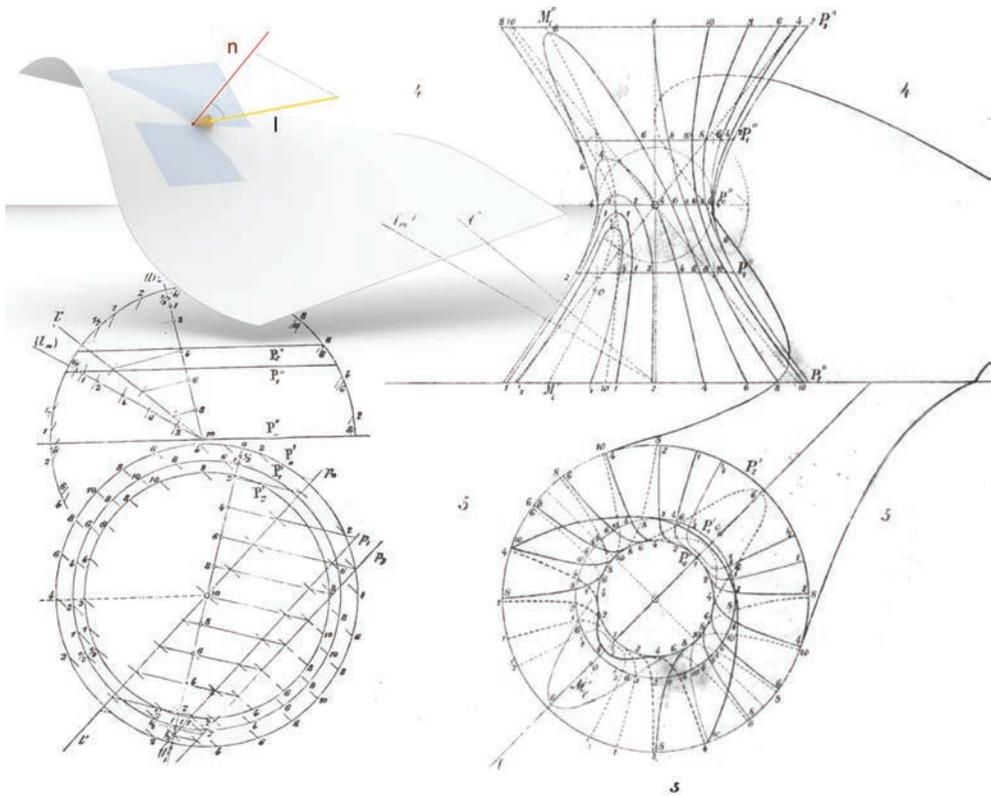
ridiani e paralleli si mantengono fra loro ortogonali, a distanza costante per quanto riguarda i meridiani ad intervalli crescenti per quanto riguarda invece i paralleli. In questo tipo di proiezione le lossodromie sono rappresentate secondo linee rette. La possibilità di costruire traiettorie in linea retta rese privilegiati entrambi questi modelli cartografici (fig. 30).

Le lossodromie trovarono applicazione anche in architettura, per via della loro pendenza costante e con tutta probabilità per la possibilità di essere costruite sulle superfici quadriche, per proiezione di una spirale logaritmica. È verosimile ipotizzare che le lossodromie siano state impiegate nella progettazione del paramento decorativo di alcune cupole emisferiche, come quella del portico della cappella Pazzi nella chiesa di Santa Croce a Firenze, in cui i tondi invetriati sono inscritti in quadrilateri sferici la cui diagonale è appunto una lossodromia<sup>41</sup> (fig. 31). Approssimano le lossodromie particolari sistemi costruttivi composti da mattoni disposti a spinapesce che ricorrono in alcune cupole rinascimentali come quella di Simon Mago realizzata da Antonio da Sangallo il Giovane nella Basilica di San Pietro in Roma che riproducono per forma l'andamento di una lossodromia con angolo di pendenza di 45 gradi<sup>42</sup>.

Alcune famiglie di curve, proprie delle superfici, sono composte da punti che mantengono costan-

**41** La proiezione stereografica consente di proiettare punti che giacciono sulla superficie della sfera da un suo polo sul piano equatoriale, o su un piano che gli è parallelo e che si immagina appartenere all'antipolo. Cfr. Pintore, Salvatore 2007.

**42** Per approfondimenti sulle lossodromie dell'apparecchio murario della cupola detta dell'Ottagono di Simon Mago nella Basilica di San Pietro cfr. Baglioni 2007.



te una certa caratteristica. A tali curve si attribuisce il suffisso *iso-* (dal greco ἴσος «uguale»), che indica appunto la condivisione della proprietà in questione. Fra le curve *iso*, le *isopse*, le *isofote* e le *isoparametriche* hanno avuto un ruolo significativo nella rappresentazione della forma.

Le *isopse* (comp. da *iso-* e dal greco ἕψος *altezza*) sono curve della superficie composte da punti che hanno tutti la medesima quota misurata su livello del mare. Hanno trovato e ancora oggi trovano largo impiego nella rappresentazione planimetrica dei terreni eseguita con il metodo grafico delle proiezioni quotate, in cui ad ogni curva è associata la relativa quota (fig. 32).

Come le *isopse*, anche le *isofote* (comp. da *iso-* e dal greco ψω [...] *luce*) hanno trovato ampia appli-

Fig. 33/ Legge del coseno per il calcolo del grado di intensità luminosa di una superficie in un punto; costruzione delle linee isofote di un iperboloido. Tratto da Fiedler 1873.



Fig. 34/ Isoparametriche di una superficie.

cazione nella rappresentazione, in particolare nella riproduzione grafica del chiaroscuro, poiché composte da punti che presentano lo stesso grado di intensità luminosa. Il grado di intensità luminosa di una superficie ne misura la luminosità in un punto in funzione dell'angolo formato da un raggio luminoso incidente, con la normale alla superficie nel punto di contatto. Il valore del coseno di tale angolo, misurato attraverso la legge del coseno enunciata da Lambert<sup>43</sup> nella seconda metà del Settecento, indica la componente normale che si ottiene dalla scomposizione vettoriale del raggio luminoso, la sola che contribuisce all'illuminamento della superficie. Valori del coseno pari a 1 indicano che il raggio luminoso è perpendicolare alla superficie, mentre valori pari a zero indicano invece raggi luminosi radenti e perciò tangenti alla superficie. Nel caso di superfici curve o a doppia curvatura il grado di intensità luminosa varia lungo la superficie per tutta la sua estensione. Punti che presentano lo stesso grado di intensità luminosa ammettono piani tangenti che hanno la stessa giacitura rispetto ai raggi luminosi incidenti. Questi punti, nel loro insieme, formano delle curve che si dicono isofote, e che presentano cioè in tutti i punti lo stesso grado di intensità luminosa (fig. 33). La resa chiaroscurale delle superfici veniva riprodotta per via grafica, scegliendo delle tinte corrispondenti a diversi valori del grado di intensità luminosa, ottenuti dividendo in intervalli eguali i valori del coseno nella loro variazione fra zero e uno.

Le linee isofote trovano ancora oggi applicazione in ambiente digitale, poiché implementate in alcuni strumenti diagnostici preposti al controllo della qualità delle superfici di cui dispongono in genere i software di rappresentazione matematica. Vengono in particolare utilizzate per il controllo della continuità fra superfici. Le isofote di superfici contigue presentano sempre un grado di continuità inferiore

**43** Cfr. Lambert 1760.

a quello che sussiste fra le superfici a cui appartengono<sup>44</sup>.

Le isoparametriche sono curve proprie della rappresentazione digitale, caratteristiche della matematica Nurbs, che descrive linee e superfici attraverso equazioni matematiche di tipo parametrico. In quest'ambito, una linea è un insieme monodimensionale di punti che può essere pensato come  $P=P(t)$ , dove  $t$  è un parametro. Al variare di  $t$  (generalmente da 0 a 1), è possibile percorrere tutti i punti della linea, da un suo estremo, per valori del parametro pari a 0, all'altro, per valori del parametro pari a 1. Estendendo questa definizione, possiamo considerare le superfici insiemi bidimensionali di punti, pensate come  $P=P(u,v)$ , i cui la posizione di ogni punto è determinata dalla variazione dei parametri  $u$  e  $v$ <sup>45</sup>.

In ambiente Nurbs infatti ogni superficie è descritta attraverso delle *patch*, "pezze" bidimensionali di forma quadrilatera, composte da punti le cui coordinate sono riferibili ad un sistema ortogonale denominato  $u,v$ . Al variare dei parametri  $u$  e  $v$ , e cioè delle coordinate, varia la posizione di un punto sulla superficie. Si dicono isoparametriche di una superficie o iso-curve le linee a parametro costante. Si tratta di due classi di linee che coprono la superficie senza lacune e che hanno valore costante di uno dei due parametri,  $u$  e  $v$  (fig. 34).

### Considerazioni conclusive

Questa ricognizione breve e parziale ha voluto mostrare alcune fra le innumerevoli ricadute che le proprietà delle curve hanno avuto e ancora oggi hanno nella progettazione architettonica e di design. La rappresentazione digitale sembra al momento capace di costruire qualsiasi forma, indipendentemente dalle sue ragioni geometriche, e i recenti sviluppi della progettazione parametrica indirizzano verso soluzioni che sembrano

**44** In alternativa alle isofote, alcuni software di rappresentazione matematica impiegano le linee di riflessione. Tali linee appartengono all'ambiente che ospita le superfici da analizzare, e si riflettono su queste, anch'esse con un grado di continuità inferiore a quello che sussiste fra le superfici date. Cfr. Ciarloni 2008.

**45** Per approfondimenti cfr. Ciarloni 2009.

autodeterminate. Queste apparenti opportunità allontanano gli architetti dallo studio della teoria della forma con il rischio crescente di renderli fruitori passivi di algoritmi predefiniti. Eppure oggi, come nel passato, il controllo della forma non può sussistere senza le conoscenze teoriche che ne sono alla base. In quest'ottica l'ambiente virtuale tridimensionale, anche parametrico, deve essere inteso come una opportunità cognitiva per la geometria, che può avvalersi della costruzione rigorosa di forme sempre più complesse, inimmaginabili da rappresentare con i metodi grafici della rappresentazione. La costruzione digitale della forma e la sua parametrizzazione costituiscono così un volano per sperimentare per via sintetica, in continuità con la tradizione della geometria descrittiva, contenuti teorici innovativi.

# La rappresentazione digitale delle linee curve

di Matteo Flavio Mancini

## Introduzione

La rappresentazione digitale nei campi del design e dell'architettura trova la sua origine in sperimentazioni compiute a partire dagli anni '60. Oggigiorno, benché il panorama delle tecniche di modellazione sia sempre più variegato, è ancora possibile individuare due principali famiglie di modelli digitali che si differenziano per proprietà, scopo e approccio alla modellazione: i modelli matematici, costruiti attraverso curve e superfici NURBS, e i modelli numerici, che fanno uso di poligoni e poliedri per descrivere le forme<sup>1</sup> (fig. 1).

In questo testo faremo riferimento alla prima famiglia, quella dei modelli matematici, per la loro capacità di descrivere in modo ugualmente accurato ogni tipo di forma, dalla linea retta ad una curva gobba non luogo geometrico, dal cubo ad una superficie free-form (fig. 2); peculiare dei modelli matematici è infatti la possibilità di descrivere in modo continuo la geometria delle forme e di consentire il

**1** Per una introduzione alle diverse proprietà dei due metodi e un loro inserimento nel campo dei metodi tradizionali della geometria descrittiva cfr. Migliari 2009b, p. 206.

## Le linee curve per l'architettura e il design

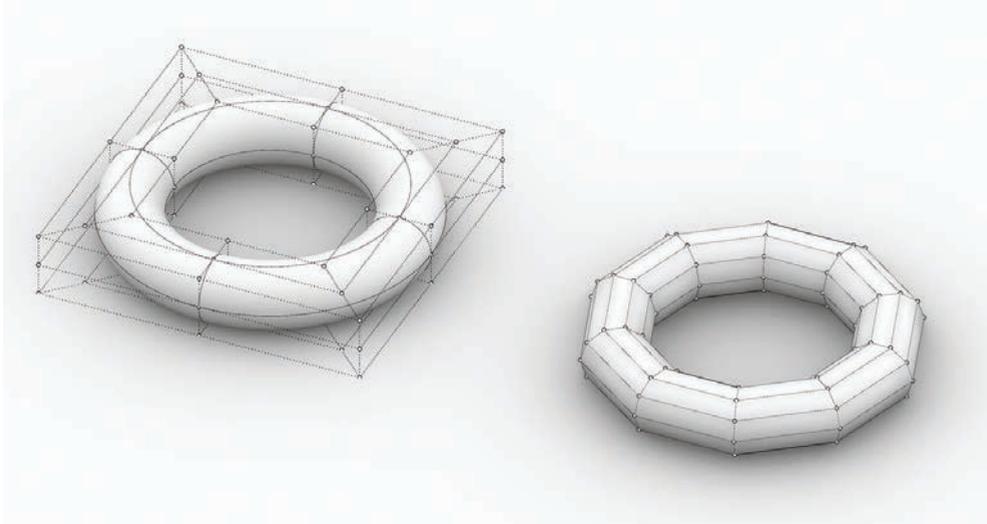
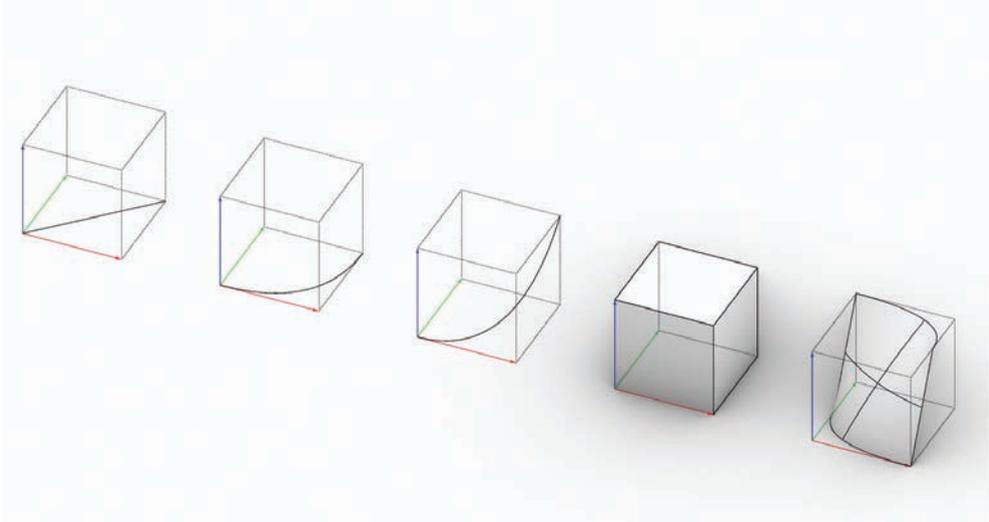


Fig. 1/ Un toro rappresentato attraverso un modello matematico (a sinistra) e attraverso un modello numerico (a destra).

**2** Per chiarire i concetti espressi in questo capitolo si è fatto uso di strumenti di modellazione matematica algoritmica attraverso tecniche di *visual scripting*. I linguaggi di programmazione visuale rappresentano un livello intermedio di comunicazione con il software, non richiedono competenze di programmazione ma rendono evidenti tutti i parametri e le variabili necessarie per la costruzione delle geometrie da modellare. Nel caso di questo testo si è fatto uso del modulo Grasshopper del software McNeel Rhinoceros 6.

controllo accurato delle loro proprietà in ogni singolo punto<sup>2</sup>.

L'approccio a questo tipo di modellazione è dunque fortemente geometrico, basato sull'applicazione di operazioni di traslazione, rotazione e rototraslazione agli enti geometrici utilizzati: punti, curve e superfici. I modelli matematici consentono inoltre l'esecuzione di operazioni caratteristiche della geometria descrittiva come quelle di misura, sezione e proiezione. Si potrebbe dire che le tecniche tipiche di questo tipo di modellazione raccolgano l'eredità della storia della ricerca geometrica e delle sue definizioni e le rendano operative. Ad esempio, ricordando le teorie dell'antica Grecia, è possibile immaginare una curva come successione delle posizioni di un punto mobile e definirla come ente monodimensionale, oppure descrivere una superficie come ente bidimensionale ed estrarre curve dalle superfici attraverso operazioni di sezione e proiezione mentre, seguendo gli sviluppi della geometria differenziale, è possibile analizzare le proprietà di curve e superfici complesse attraverso il loro confronto con enti geometrici più semplici e dalle proprietà note.



### Breve storia delle NURBS

Le ricerche che hanno portato alla nascita della modellazione matematica furono condotte da matematici e ingegneri, tanto nell'ambito di istituti di ricerca quanto in centri di sviluppo di grandi aziende dei settori automobilistico e aerospaziale. La necessità di migliorare la progettazione di forme complesse e di rendere più efficiente la loro industrializzazione furono i motivi che spinsero verso la creazione di strumenti grafici digitali in sostituzione di quelli analogici fino ad allora utilizzati.

Di norma infatti i disegni di progetto venivano eseguiti in scala reale ed erano costituiti da serie di sezioni ad intervalli regolari in base alle quali si realizzavano dei modelli fisici che diventavano a loro volta il riferimento del processo di progettazione (fig. 3). Il passaggio attraverso questi modelli in scala reale non è stato soppiantato dall'avvento degli strumenti digitali ma questi ultimi, attraverso le applicazioni di *reverse modelling*, hanno reso il processo progettuale più fluido e flessibile.

Il tracciamento di linee curve fluide e dinamiche veniva eseguito attraverso strumenti quali i curvilinei, o

Fig. 2/ I modelli matematici possono rappresentare in modo ugualmente accurato ogni tipo di geometria. Da sinistra verso destra: una linea retta, una curva piana, una curva gobba, un solido e una superficie free-form.

## Le linee curve per l'architettura e il design

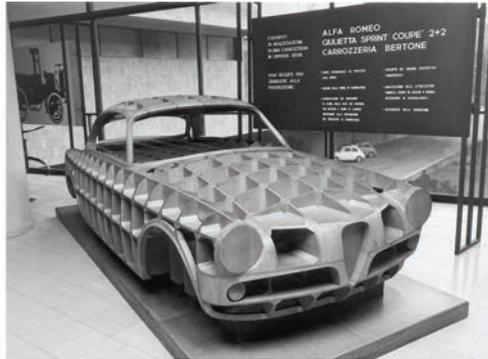


Fig. 3/ Due esempi di modelli fisici utilizzati nella progettazione automobilistica negli anni '50.

Fig. 4/ Strumenti analogici per il disegno di curve: un set di curvilinei (a sinistra), un righello flessibile con i suoi pesi (a destra).

*french curves*, e i righelli flessibili, o *spline* (fig. 4). Lo sviluppo della modellazione matematica ha perseguito l'obiettivo di permettere la creazione e la gestione in ambiente digitale di curve complesse superando le limitazioni geometriche imposte dalle caratteristiche fisiche degli strumenti del disegno tradizionale.

Le prime ricerche riguardanti le curve digitali avvennero in Francia e furono condotte separatamente dal matematico Paul de Faget de Casteljau (1930), che lavorava per la Citroën, e dall'ingegnere Pierre Étienne Bézier (1910-1999), che invece lavorava per la Renault. I due ricercatori definirono sostanzialmente la stessa teoria ma le curve che ne derivano presero il nome di curve di Bézier poiché quest'ultimo pubblicò per primo i suoi risultati. Il principio alla base della loro ricerca era stato quello di poter gestire una curva libera a partire dal minor numero possibile di vincoli geometrici piuttosto che attraverso i punti che costituiscono la curva stessa.

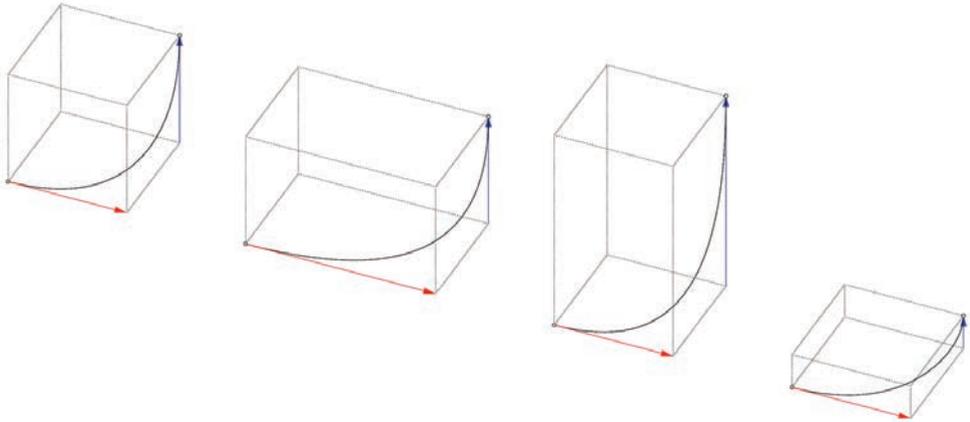


Fig. 5/ Una curva di Bézier e le sue trasformazioni in relazione a quelle del parallelepipedo in cui è inscritta.

Le curve di Bézier sono curve cubiche, continue, quindi prive di punti di flesso e cuspidi, la cui forma è definita da quattro parametri: i due estremi della curva e le tangenti nel punto iniziale e nel punto finale. Modificando anche uno solo di questi parametri si modifica la forma di tutta la curva. In termini concettuali si possono immaginare le curve di Bézier inserite all'interno di un cubo, con gli estremi della curva posti su due vertici opposti del cubo e le tangenti orientate secondo due spigoli del cubo stesso, l'una parallela all'asse  $x$  e l'altra parallela all'asse  $z$ ; deformando il cubo si ottiene una conseguente deformazione della curva contenuta al suo interno<sup>3</sup> (fig. 5). Per comprendere come questi parametri contribuiscano alla definizione della forma delle curve è necessario definire il concetto di poligono di controllo. Nel caso di una curva di Bézier piana e composta da un unico arco, il poligono di controllo è costituito dagli estremi della curva  $P_1$  e  $P_2$ , detti ancora, e da un punto di controllo  $P_3$  definito come intersezione tra le due tangenti negli estremi. La definizione dell'andamento della curva si ottiene per progressiva approssimazione, dividendo i segmenti che costituiscono il poligono di controllo a metà e ottenendo i punti  $P_4$  e  $P_5$ , congiungendo-

<sup>3</sup> Migliari 2009a, p. 248.

## Le linee curve per l'architettura e il design

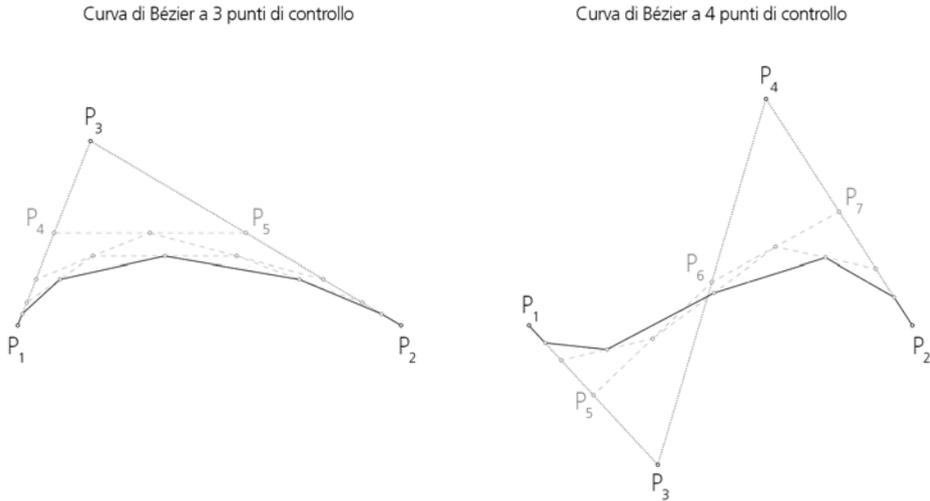


Fig. 6/ Rappresentazione dell'algoritmo di Bézier per il tracciamento di una curva a 3 punti di controllo (a sinistra) e a 4 punti di controllo (a destra).

li con un nuovo segmento e ripetendo l'operazione di suddivisione per il poligono ora costituito dai punti  $P_1, P_4, P_5, P_2$ . Reiterando l'operazione si approssima con sempre maggiore accuratezza l'andamento della curva. Analogo procedimento consente di definire la forma di una curva di Bézier più complessa, definita dai due punti estremi e da due punti di controllo (fig. 6). Osservando le curve così costruite e il relativo poligono di controllo è possibile definire un elenco delle caratteristiche di queste curve:

- la curva è continua;
- la curva è interamente contenuta nel guscio convesso del poligono di controllo;
- la curva passa sempre per il primo e per l'ultimo punto del poligono di controllo, mai per i suoi punti intermedi;
- il primo e l'ultimo lato del poligono di controllo coincidono con le tangenti iniziale e finale della curva;
- modificando il poligono di controllo si modifica l'intera curva pur mantenendo le sue proprietà di continuità, smussatura e tangenza agli estremi;
- non è possibile disegnare le curve coniche.

I limiti principali delle curve di Bézier riguardano l'impossibilità di rappresentare le curve coniche, la

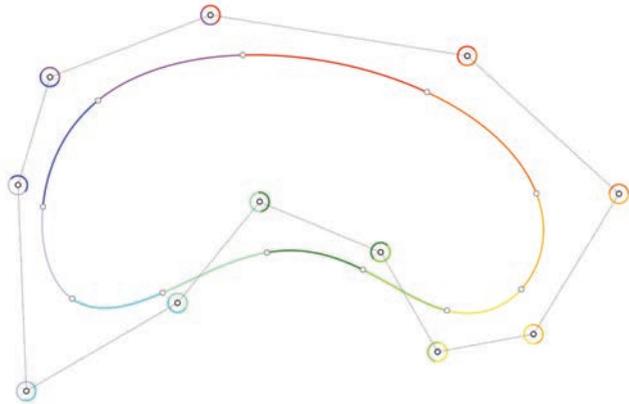
mancanza di controllo locale e la difficoltà di garantire la continuità tra più archi di curva. Questi limiti sono particolarmente significativi nei campi dell'architettura e del design poiché, da un lato le curve coniche sono tra le più diffuse, dall'altro non è quasi mai possibile definire compiutamente una curva attraverso un unico arco.

Proprio la necessità di superare questi limiti spinse avanti la ricerca. Negli anni '70, il risultato più notevole venne raggiunto da Rich Riesenfeld, un giovane matematico seguito da Steve Coons (MIT, Syracuse University) e Robin Forrest (Cambridge University), che adattò alla grafica digitale l'uso delle B-spline, una teoria matematica elaborata quasi trent'anni prima dal matematico Isaac Jacob Schoenberg (1903-1990) cui si deve peraltro l'introduzione nella matematica del termine *spline*, per *smooth polyline*. L'idea alla base del lavoro di Riesenfeld era quello di risolvere i problemi di continuità tra archi di curve adiacenti tipico delle curve di Bézier. Per farlo le curve B-spline, dette anche *basis spline*, possono essere immaginate come una serie di curve di Bézier che condividono un punto di controllo e si agganciano in punti, detti nodi. A garantire la continuità e la saldatura è la stessa *basis function* che definisce la curva. La condivisione dei punti di controllo assicura la continuità tra gli archi, detti *spans*, consente la modifica locale della curva poiché ogni punto di controllo influisce solo sugli archi a lui adiacenti, e permette di realizzare curve chiuse continue. Se i nodi sono distribuiti in modo regolare lungo la curva si parla di *uniform b-spline* mentre, qualora la distribuzione dei nodi non sia regolare, si parla di *non-uniform b-spline* (fig. 7). Da quanto detto è possibile definire un elenco delle caratteristiche delle curve b-spline:

- la curva è interamente contenuta nel guscio convesso del poligono di controllo;
- modificando il poligono di controllo si ottengono

## Le linee curve per l'architettura e il design

Fig. 7/ Rappresentazione di una curva B-spline in cui si evidenzia la connessione tra i diversi archi garantita dalla condivisione dei punti di controllo.



modifiche locali della curva mantenendo le proprietà di continuità, smussatura e tangenza agli estremi;

- non è possibile disegnare le curve coniche.

Il limite ancora da superare per questa teoria matematica era la possibilità di rappresentare correttamente le curve coniche. Tale limite era intrinseco nella matematica finora applicata poiché, essendo basata su polinomi, non era in grado di descrivere le funzioni di seno e coseno che caratterizzano le curve coniche.

La soluzione a questo problema venne trovata nei centri di ricerca della Boeing tra la metà degli anni '70 e i primi anni '80 modificando le *non-uniform b-spline*. In particolare si passò all'uso di polinomi razionali, cioè di polinomi composti da rapporti di polinomi. Questa nuova descrizione matematica delle curve prese il nome di *non-uniform rational b-spline*, NURBS appunto, e rappresenta la teoria più generale di tutte quelle finora viste, in grado di rappresentare qualunque tipo di curva: linee rette, coniche, qualsiasi curva luogo geometrico e qualunque curva libera, sia piane che gobbe (fig. 8). Tale flessibilità è garantita dalla distribuzione non uniforme del parametro e dei nodi lungo la curva, argomento su cui torneremo più avanti, e dalla possibilità di variare individualmente il "peso" dei punti di controllo, ovvero la capacità di ciascun punto di

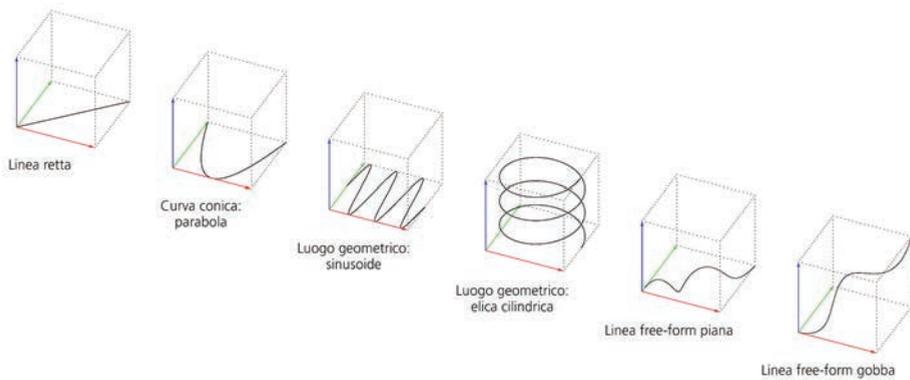


Fig. 8/ Esempi di diverse linee rappresentate attraverso modelli matematici NURBS.

controllo di attrarre la curva. Le principali caratteristiche di una curva NURBS sono:

- la curva è continua;
- una NURBS è sempre contenuta nel suo poligono di controllo;
- aumentando il grado della curva questa diventa più morbida, allontanandosi dai punti di controllo;
- modificando il poligono di controllo si ottengono modifiche locali della curva mantenendo le proprietà di continuità, smussatura e tangenza agli estremi;
- può rappresentare accuratamente le curve coniche.

Le NURBS divennero presto lo standard condiviso in tutti i settori industriali della Boeing e in breve vennero adottate come standard di interscambio grafico anche dal *American Standard Institute (ANSI)*.

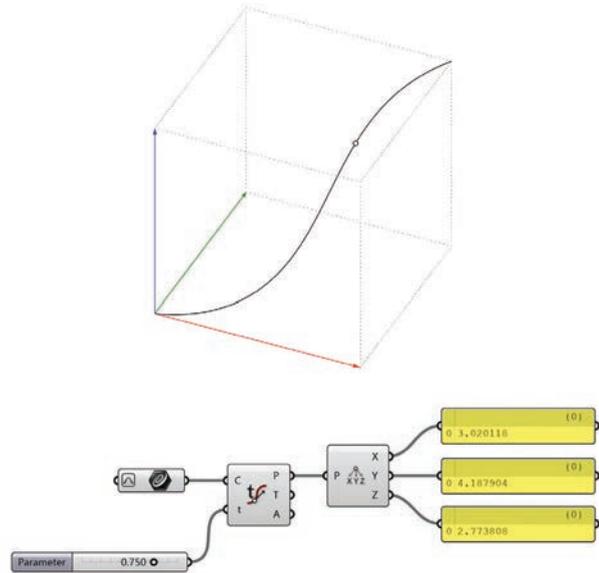
Si può dire che la storia della rappresentazione delle curve in computer grafica sia la storia della progressiva generalizzazione della loro definizione matematica: una curva di Bézier è infatti un caso particolare di *uniform b-spline*, questa è un caso particolare di *non-uniform b-spline* e quest'ultima altro non è che un caso particolare di *non-uniform rational b-spline*.

### La rappresentazione parametrica delle curve

In questo paragrafo definiremo più nel dettaglio alcuni dei concetti già presentati in precedenza riguar-

## Le linee curve per l'architettura e il design

Fig. 9/ Gli strumenti di modellazione algoritmica consentono di rendere evidente la coesistenza dei due sistemi di riferimento. Data una curva da analizzare, è infatti possibile estrarre la posizione del punto corrispondente a qualunque valore della coordinata locale (t) e contemporaneamente conoscerne le coordinate globali (x, y, z).



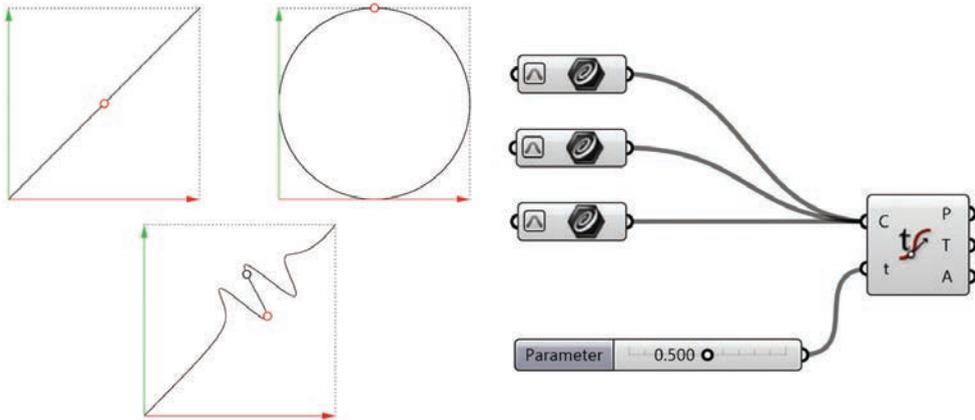
do l'evoluzione storica che ha portato alla definizione delle curve NURBS con l'intento di chiarire alcuni aspetti dell'interazione che il progettista è chiamato ad attuare con questo tipo di curve.

In primo luogo è utile soffermarci sui sistemi di riferimento e sui tipi di coordinate attraverso cui è possibile descrivere posizione e forma di ogni ente geometrico. Ricordiamo infatti che in matematica ogni equazione può essere espressa attraverso diverse forme<sup>4</sup> :

- equazione implicita  $y = f(x)$
- equazione esplicita  $f(x, y)$
- equazione parametrica  $x = x(u) \quad y = y(u)$

Le forme implicite ed esplicite dipendono dal sistema di assi cartesiani di riferimento perciò, traslando o ruotando l'ente geometrico nello spazio, le soluzioni dell'equazione cambiano; inoltre la forma esplicita può restituire valori doppi, rendendo ancor più oneroso il calcolo delle soluzioni. Al contrario, la forma parametrica è invariante rispetto al sistema di assi cartesiani ed è espressa in funzione di un'unica

<sup>4</sup> Valenti 2008, p. 130.



variabile, il parametro appunto. Queste caratteristiche fanno di quest'ultima la forma preferenziale per esprimere le equazioni nei software di modellazione poiché, in coordinate parametriche, ogni punto appartenente ad una curva sarà rappresentato da un solo valore invece che da una terna di valori.

Nella pratica della modellazione dunque, ogniqualvolta si interverrà sulle proprietà intrinseche dell'oggetto ci si dovrà riferire alle coordinate parametriche locali, nel caso delle curve denominate generalmente  $(t)$  o  $(u)$ , mentre per le caratteristiche estrinseche degli enti, come la loro posizione nello spazio, si utilizzeranno le coordinate cartesiane o globali  $(x, y, z)$ . Non ci sarà dunque da stupirsi se per ciascuna operazione di modellazione sarà necessario operare nell'uno o nell'altro sistema di coordinate (fig. 9). Nel caso della curve il modo più intuitivo per interpretare la coordinata parametrica  $(t)$  è quella di immaginare la curva come la sequenza delle successive posizioni assunte ordinatamente da un punto mobile. Come detto, caratteristica delle curve NURBS, è quella di poter rappresentare indifferentemente in modo accurato sia curve luogo geometrico, come le curve coniche ad esempio, sia curve di forma libera. Tale capacità è consentita dalla distribuzione non

Fig. 10/ Attraverso l'analisi simultanea di più curve, sulle quali è stato precedentemente individuato il punto medio geometrico (in rosso), è possibile notare la diversa distribuzione del parametro in funzione della complessità della curva. Parametrizzando il dominio della curva tra 0 e 1, il punto di valore 0,5 (in nero) corrisponde al punto medio geometrico nel caso di linee rette e curve dotate di simmetria come una circonferenza, mentre può non corrispondere nel caso di curve caratterizzate da forti asimmetrie.

omogenea del parametro nel dominio di esistenza della curva. Tornando all'esempio del punto mobile questo equivale a dire che la geometria della curva è descritta da un maggior numero di posizioni del punto mobile dove la geometria è più complessa e da una minor quantità dove la geometria presenta meno variazioni. Una delle conseguenze di questa proprietà è che il punto medio geometrico della curva, quello posto a metà della sua lunghezza in termini metrici e geometrici, non sempre coincide con il valore medio del dominio di esistenza del parametro<sup>5</sup> (fig. 10).

Compreso che la distribuzione del parametro varia in funzione della complessità geometrica della curva NURBS è opportuno riflettere sul rischio di generare geometrie matematicamente più complesse di quanto la loro forma geometrica non richieda. Questo aspetto viene spesso tralasciato ma è bene sapere che curve matematicamente sovraccariche genereranno superfici ugualmente sovraccariche sulle quali sarà più difficile operare o per le quali sarà più facile incorrere in errori di computazione da parte del software<sup>6</sup>.

Per questi motivi è opportuno spendere alcune parole per specificare quali siano le procedure per disegnare una curva NURBS e quali gli strumenti a disposizione per modificarne la forma in modo efficace ed efficiente.

Il tracciamento delle curve NURBS può avvenire in due modi diversi: attraverso la definizione dei loro punti di controllo, oppure individuando alcuni punti attraverso cui la curva dovrà passare. Nel primo caso si parla di curve per punti di controllo, nel secondo di curve di interpolazione.

Dal punto di vista operativo i due modi sembrano all'apparenza molto simili, in entrambi i casi si deve indicare una serie di punti, ma dal punto di vista geometrico le operazioni hanno significati profondamente diversi. Prendiamo ad esempio il ridisegno

<sup>5</sup> Migliari 2009a, p. 209.

<sup>6</sup> Valenti 2008, p. 150.



di una curva qualsiasi a partire da una sua immagine fotografica. L'immissione dei punti di controllo risulta generalmente meno intuitiva poiché, come abbiamo visto parlando del poligono di controllo delle curve NURBS, questi non appartengono mai alla curva tranne negli estremi, ma ha il notevole vantaggio di portare ad un uso minore di punti per descrivere la curva. Nel caso si decida di operare attraverso i punti di interpolazione il procedimento sarà più intuitivo, poiché questi sono punti che appartengono alla curva, ma sarà più simile ad un ridisegno eseguito con una polilinea e ciò condurrà ad una geometria definita da un numero superiore di punti rispetto al metodo precedente, provocando un maggiore aggravio dal punto di vista computazionale (fig. 11). In entrambi i casi dopo il primo inserimento può essere necessario passare al perfezionare manualmente la posizione dei punti di controllo per approssimare al meglio l'andamento desiderato e, ove questo non

Fig. 11/ A parità di dettagli rappresentati una curva NURBS generata attraverso punti di controllo (in rosso) ha una geometria più semplice (21 punti di controllo) di una curva generata attraverso punti di interpolazione (in blu, 37 punti di controllo).

sia sufficiente, all'aggiunta di nuovi punti di controllo. Il perfezionamento della posizione dei punti di controllo è senza dubbio l'operazione principale della modellazione di curve NURBS ma non è l'unico strumento a disposizione. Ad ogni punto di controllo infatti corrisponde un punto di modifica sulla curva la cui posizione può essere modificata e il cui numero può essere aumentato a posteriori. Oltre a queste operazioni ve ne sono altre due che richiedono di intervenire su parametri matematici della curva che possono essere molto utili: la modifica del grado della curva e la regolazione del peso dei punti di controllo. Cercheremo di evidenziare le conseguenze geometriche di queste operazioni che riteniamo importanti perché non sono ottenibili modificando la posizione e il numero né dei punti di controllo né di quelli di modifica.

Iniziamo dal valutare l'influenza del valore del grado<sup>7</sup> sulla geometria della curva NURBS e dall'osservare le differenze che la variazione di questo parametro comporta sia nel caso di una curva per punti di controllo sia nel caso di una curva di interpolazione. Posizioniamo 10 punti da usare come riferimento per costruire una NURBS per punti di controllo standard, di grado 3 così come indicato di default dal software; successivamente, a partire dagli stessi punti, costruiamo una nuova curva ma di grado 9. Dal punto di vista matematico si osserva in primo luogo che le curve condividono, come previsto, il poligono di controllo e il numero di punti di modifica dato che questi sono in funzione dei punti di controllo indicati. Confrontando le forme delle due curve si evidenzia come all'aumentare del grado la curva risulti meno legata all'andamento del poligono di controllo e perda di tensione, risultando più morbida. Ripetiamo un analogo esperimento, utilizzando lo stesso set di 10 punti, questa volta per costruire due curve per interpolazione, l'una di grado

**7** Il grado di una curva è il grado del polinomio che la rappresenta. Il grado di un polinomio è pari al grado maggiore dei monomi che lo compongono. Dal punto di vista geometrico indica quante volte una linea retta intersechi la curva piana rappresentata dal polinomio. Nel caso di curve gobbe indica quante volte la curva rappresentata dal polinomio sia intersecata da un piano.

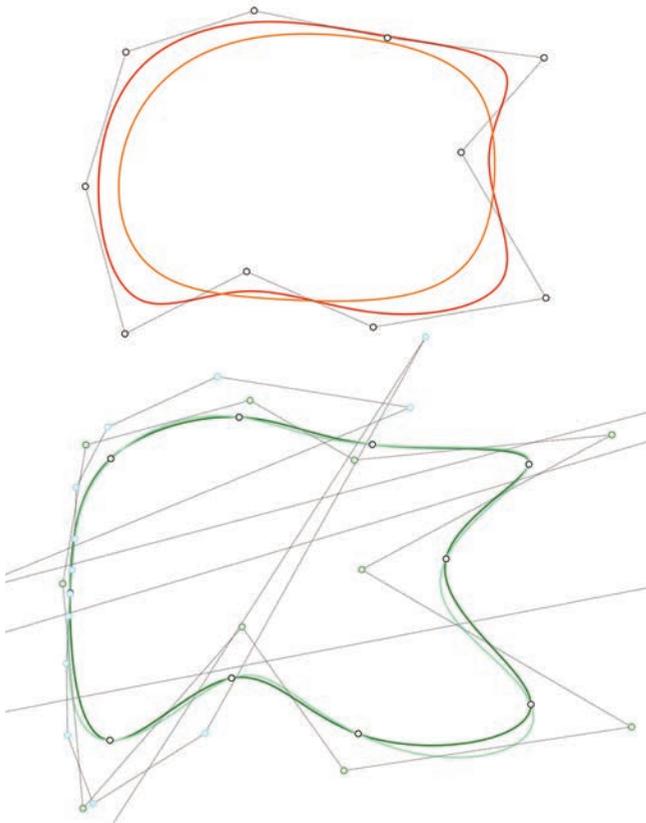


Fig. 12/ L'influenza del grado sulla forma della curve NURBS: in alto due curve per punti di controllo, una di grado 3 (in rosso) e una di grado 9 (in arancione); in basso due curve per punti di interpolazione, una di grado 3 (in verde) e una di grado 9 (in ciano).

3, l'altra ancora di grado 9 e osserviamo le rispettive caratteristiche. Come atteso, entrambe le curve passano per i 10 punti indicati ma presentano due poligoni di controllo molto diversi: la curva NURBS di grado 3 ha un poligono di controllo costituito da un numero inferiore di punti e questi sono più vicini alla curva rispetto alla NURBS di grado 9.

Le differenze già evidenziate per le curve NURBS da punti di controllo si verificano anche per le curve da punti di interpolazione: le curve di grado inferiore approssimano meglio l'andamento del poligono di controllo e risultano più tese. Nel caso delle sole curve di interpolazione il cambio di grado comporta un notevole aggravio computazionale poiché comporta un aumento del numero di punti di controllo della

## Le linee curve per l'architettura e il design

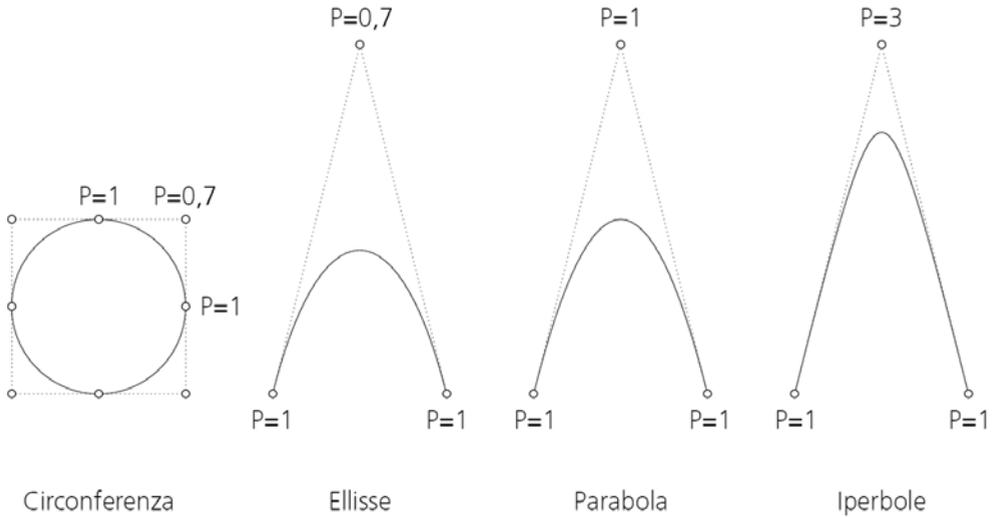


Fig. 13/ La variabilità del peso dei punti di controllo consente alle curve NURBS di rappresentare correttamente le curve coniche.

curva e una loro distribuzione notevolmente irregolare che non favorisce l'esecuzione di ulteriori operazioni di modellazione (fig. 12).

L'ultimo aspetto da analizzare riguardo la gestione della forma delle curve NURBS è nuovamente riferito ad una loro specifica proprietà matematica. Abbiamo infatti già evidenziato che una delle caratteristiche che differenzia le curve NURBS dalle b-spline è la possibilità di modificare il peso dei punti di controllo. Nello specifico, questa proprietà consente, una volta tracciata la curva, di intervenire sui punti di controllo modificandone il peso, cioè la capacità di attrarre la curva verso di loro. Per comprendere meglio questa proprietà è utile immaginare la curva come un'asta flessibile di materiale omogeneo agganciata ai punti di controllo attraverso delle molle che possono attrarre l'asta con maggiore o minore intensità, influenzando in questo modo l'andamento della curva. Come accennato questa proprietà delle NURBS consente loro di rappresentare correttamente anche le curve coniche e in particolare (fig. 13):

- un arco di parabola è caratterizzato da un peso del punto di controllo pari a 1 ( $=1$ );

- un arco di iperbole è caratterizzato da un peso del punto di controllo maggiore di 1 ( $>1$ );
- un arco di ellisse è caratterizzato da un peso del punto di controllo minore di 1 ( $<1$ );
- un arco di circonferenza è caratterizzato da un peso del punto di controllo minore di 1 ( $<1$ ) essendo descritto come il caso particolare di una ellisse con fuochi coincidenti<sup>8</sup>.

La variazione di forma indotta dalla modifica del peso dei punti di controllo comporta un aumento della tensione della curva e una sua maggiore convergenza verso i punti di controllo. Questo effetto non può essere ottenuto attraverso la traslazione dei punti di controllo perciò è uno strumento che può rivelarsi utile in talune circostanze.

Oltre a questi modi di creazione diretta delle curve, i modelli matematici mettono in condizione i progettisti di ottenere curve estraendole da superfici oppure eseguendo in modo rigoroso operazioni tipiche della geometria descrittiva quali quelle di proiezione e sezione. Queste ultime operazioni risultano particolarmente efficaci poiché consentono di legare curve spaziali alle loro proiezioni piane e, viceversa, di ricavare da una coppia di proiezione piane la curva spaziale corrispondente. Attraverso gli strumenti di modellazione algoritmica questo tipo di operazioni viene espressa in modo particolarmente efficace e si avvantaggia della capacità di calcolare in tempo reale le variazioni indotte nelle geometrie. Per sperimentare queste potenzialità è sufficiente costruire un sistema di riferimento di piani triortogonali  $\pi'$ ,  $\pi''$ ,  $\pi'''$ ; tracciare su due piani a scelta le proiezioni piane  $C'$  e  $C''$  della curva desiderata; estrarre quest'ultime ortogonalmente rispetto al piano di costruzione e computare l'intersezione tra i due cilindri generici così ottenuti. La curva spaziale  $C$  risultante sarà aggiornata ogni qualvolta si interverrà sulla forma di una delle due proiezioni e da questa si potrà anche

**8** Questa caratterizzazione del peso dei punti di controllo ripropone in ambiente digitale una delle proprietà geometriche fondamentali delle curve coniche, l'eccentricità, ovvero la condizione per cui le curve coniche sono i luoghi geometrici dei punti in cui è costante il rapporto delle distanze tra un punto fisso, detto fuoco, e una retta fissa detta direttrice.

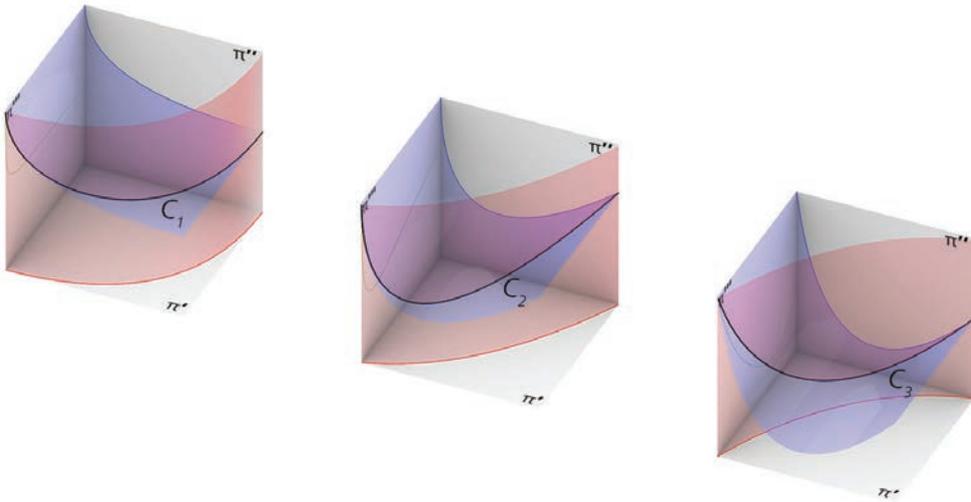


Fig. 14/ Variazioni di forma della curva  $C$  in funzione delle modifiche effettuate sulle sue proiezioni nei piani  $\pi'$ ,  $\pi''$ . Sul piano  $\pi'''$  viene aggiornata in tempo reale anche una terza proiezione ausiliaria.

ottenere una terza proiezione ausiliaria  $C'''$ , anch'essa costantemente aggiornata (fig. 14). Proprio l'aspetto interattivo introdotto dalla modellazione algoritmica, oltre alla possibilità di avere un insieme di geometrie sempre perfettamente corrispondenti, risulta particolarmente significativo quando si opera sulla definizione di geometrie *free-form*, grazie anche alle possibilità di controllo e verifica della qualità delle geometrie e delle loro proprietà che esploreremo nel prossimo paragrafo.

### Strumenti digitali per il controllo delle proprietà delle curve

Si è già accennato al fatto che una delle caratteristiche dei modelli matematici sia quella di permettere il controllo delle proprietà delle geometrie in ogni loro punto. Tale capacità risulta di fondamentale importanza nei campi del design e dell'architettura non solo in fase di verifica a posteriori, come il concetto di analisi potrebbe suggerire, ma anche nella fase di creazione delle forme, dato che gli strumenti di analisi possono essere attivati mentre si opera sulle geometrie permettendo la verifica in tempo reale delle conseguenze

delle modifiche effettuate. Ancora una volta i modelli matematici, nel caso specifico le geometrie NURBS, rendono accessibili e danno visualizzazione ad alcune proprietà inizialmente definite in campo matematico attraverso la geometria differenziale<sup>9</sup>.

Vedremo come questi modelli, grazie in particolare alle applicazioni di modellazione algoritmica, permettano di simulare per via sintetica le definizioni analitiche date in geometria differenziale dei concetti di tangente, flessione e torsione; vedremo inoltre quali strumenti siano a disposizione del progettista per tenere sotto controllo queste proprietà in riferimento al tema delle curve e quali ricadute si possano apprezzare nel rapporto tra curve e superfici.

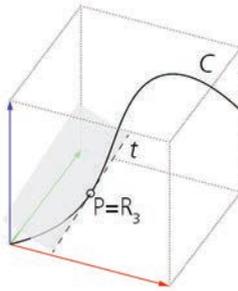
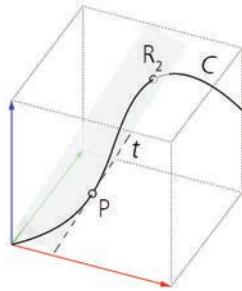
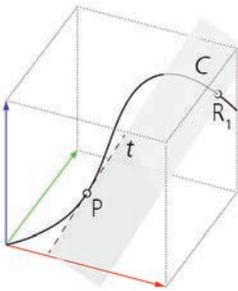
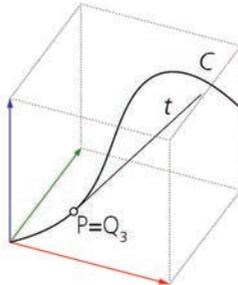
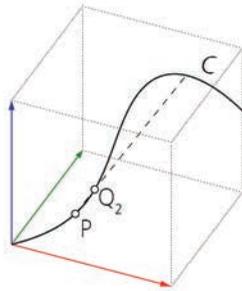
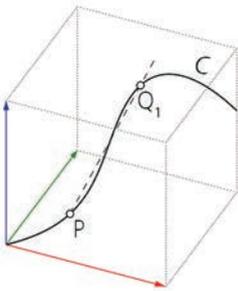
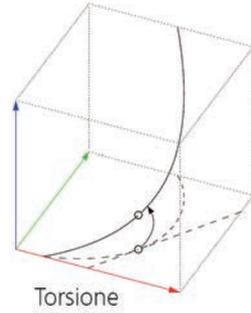
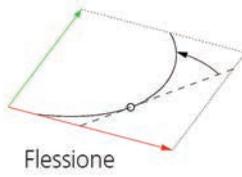
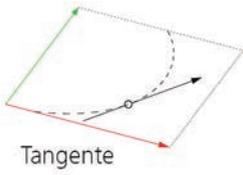
In via preliminare è utile ricordare che la geometria differenziale studia le proprietà degli enti geometrici in base al loro comportamento nell'intorno infinitesimale del punto analizzato e che, per definirne le proprietà in quel punto, vi associa altri enti dalle proprietà note che possano approssimarne il comportamento<sup>10</sup>. I concetti di tangente, flessione (prima curvatura) e torsione (seconda curvatura) descrivono tutte le proprietà della curva e ne definiscono la forma. In estrema sintesi si può dire che la tangente rappresenti la direzione della curva in ogni suo punto, che la flessione descriva quanto la curva si scosti dall'essere una linea retta e che la torsione indichi quanto la curva si allontani dall'essere piana (fig. 15). Ne deriva che una curva è retta se la sua flessione è nulla e che una curva è piana se la sua torsione è nulla.

Un vantaggio delle tecniche di modellazione algoritmica risiede nel fatto che la struttura dell'algoritmo rende possibile in ogni momento la verifica delle operazioni svolte, rappresentando una sorta di storia della modellazione in cui sono sempre evidenti gli enti geometrici coinvolti nelle costruzioni e quelli che risultano dalle operazioni effettuate. Per affron-

<sup>9</sup> Per quanto riguarda la storia della definizione matematica di queste proprietà si rimanda al capitolo di questo libro *Le linee curve tra geometria e analisi nel Rinascimento matematico* di Laura De Carlo.

<sup>10</sup> Loria 1925a, p. 1; Villa 1960, p. 47.

# Le linee curve per l'architettura e il design



tare con un unico esempio i concetti di tangenza, flessione e torsione, svolgeremo le costruzioni attraverso il caso più generico possibile, quello di una curva NURBS con flessione e torsione variabili non nulle e faremo riferimento alla «teoria dei contatti»<sup>11</sup> secondo cui, maggiore è il numero di punti successivi in comune tra la curva analizzata e l'ente con la quale la si sta confrontando, maggiore sarà la capacità del secondo di approssimare il primo.

Tracciata una qualunque curva gobba  $C$ , possiamo analizzarne le proprietà in qualsiasi punto  $P$  variando il valore del parametro  $u$  corrispondente. Per costruire la retta tangente alla curva  $C$  in  $P$  è sufficiente ricordare che per due punti passa una e una sola retta e fare in modo che il secondo punto  $Q$  tenda, in un passaggio al limite, a coincidere con il punto  $P$ . Si vedrà che, con il progressivo approssimarsi di  $Q$  a  $P$ , il segmento  $PQ$  assumerà la direzione della retta tangente nel punto  $P$  (fig. 16). Quello della retta tangente  $t$  con la curva  $C$  si dice contatto di primo ordine poiché, oltre al punto analizzato  $P$ , le due curve condividono un altro punto, il punto mobile  $Q$ .

Nota la direzione della retta tangente  $t$  è possibile costruire il piano che meglio approssima la curva nell'intorno del punto  $P$ ; tale piano è denominato piano osculatore. Per definire la sua corretta giacitura, tra tutte quelle che hanno come cerniera la tangente  $t$ , dobbiamo ricordare che un piano è individuato univocamente attraverso una retta e un punto ad essa non appartenente. Nel caso della curva  $C$  dunque dovremo individuare un nuovo punto mobile, che chiameremo questa volta  $R$ , che avvicinandosi al punto  $P$  indicherà, insieme alla tangente  $t$ , la giacitura del piano osculatore (fig. 17).

Oltre alla retta tangente e al piano osculatore è necessario individuare altri quattro elementi, due direzioni e due giaciture, necessari per descrivere il comportamento della curva. La prima direzione da

(pagina precedente)

Fig. 15/ La tangente indica la direzione della curva nel punto, la flessione indica di quanto la curva si discosti dall'essere retta e la torsione indica quanto la curva si discosti dall'essere piana.

Fig. 16/ Quando il punto mobile  $Q$  tende alla posizione del punto  $P$  la retta  $PQ$  assume la direzione della tangente  $t$  nel punto  $P$ .

Fig. 17/ Quando il punto mobile  $R$  tende alla posizione del punto  $P$ , insieme alla tangente  $t$ , definisce la posizione del piano osculatore alla curva in  $P$ .

**11** Sereni 1826.

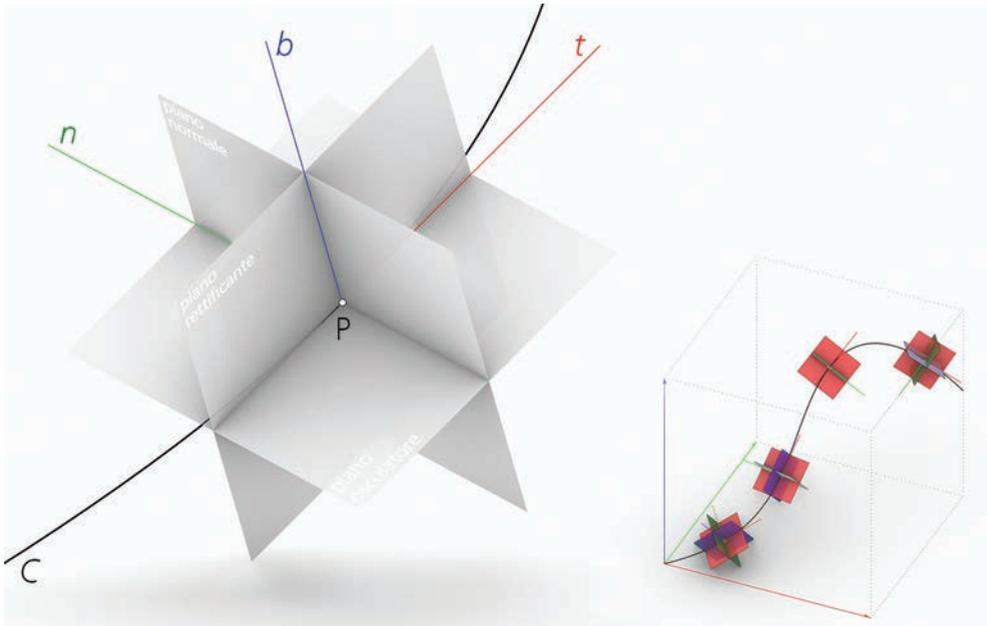


Fig. 18/ Rappresentazione della terna di Frénet nel punto  $P$  della curva  $C$  (a sinistra) e posizioni successive della terna lungo la curva  $C$  (a destra).

individuare è quella della retta normale alla curva  $C$  nel punto  $P$ . Tale direzione coincide con quella normale alla tangente  $t$  ma è evidente che per  $P$  passano infinite rette normali alla tangente; questo fascio di rette costituisce il piano normale alla curva in  $P$  la cui intersezione con il piano osculatore individua la normale principale  $n$  alla curva nel punto analizzato. L'ultima direzione da individuare è quella ortogonale al piano osculatore nel punto  $P$ , denominata binormale  $b$ . Attraverso questa direzione e quella della tangente risulta immediatamente individuata anche l'ultima giacitura necessaria, quella del piano rettificante. I vettori tangente  $t$ , normale  $n$  e binormale  $b$ , insieme ai piani osculatore ( $t, n$ ), normale ( $n, b$ ) e rettificante ( $t, b$ ), costituiscono un sistema di riferimento locale mobile triortogonale detto triedro o terna di Frenet. Attraverso lo studio del suo comportamento è possibile definire le caratteristiche di flessione e torsione della curva in ogni suo punto (fig. 18). Prima di descrivere il procedimento geometrico per

l'analisi della flessione, soffermiamoci su alcune considerazioni: il piano osculatore contiene la curva  $C$  e la retta tangente  $t$  che ha con questa un contatto del primo ordine; di tutte le curve piane che possono appartenere al piano osculatore, passanti per il punto  $P$  e con tangente coincidente con la retta  $t$ , ne esisterà una che possa approssimare meglio l'andamento della curva  $C$  e che abbia con quest'ultima un contatto almeno di secondo ordine; di tutte le curve piane, le linee rette hanno sia flessione sia torsione nulle, dunque non si prestano a descrivere il comportamento della curva  $C$  più di quanto non faccia la retta tangente; delle curve piane di secondo grado, la circonferenza ha flessione costante, torsione nulla ed è definita univocamente attraverso tre punti, dunque può avere con la curva un contatto del secondo ordine. Proprio una circonferenza, per le proprietà che abbiamo appena enunciato, è la curva più adatta a descrivere il comportamento della flessione di una curva  $C$ . Si immagini di prendere due punti  $P_1$  e  $P_2$ , nell'intorno infinitesimale del punto  $P$ , di far passare una circonferenza per i tre punti  $PP_1P_2$  e di far convergere i punti  $P_1$  e  $P_2$  verso la posizione del punto  $P$ , la circonferenza approssimerà sempre meglio l'andamento della curva fino a raggiungere, nella posizione limite, un contatto ideale. Questa circonferenza è detta cerchio osculatore, il suo centro, detto centro di curvatura  $c_k$ , si trova sempre lungo la normale principale della curva e il suo raggio, detto raggio di curvatura, cresce in modo inversamente proporzionale alla curvatura della curva (fig. 19). Per convincersi di questo fatto è sufficiente immaginare il comportamento del cerchio osculatore di una asta retta flessibile. È evidente che nella condizione di partenza è impossibile costruire un cerchio osculatore poiché i tre punti  $PP_1P_2$  sarebbero consecutivamente allineati e dunque l'ipotetica circonferenza avrebbe raggio infinitamen-

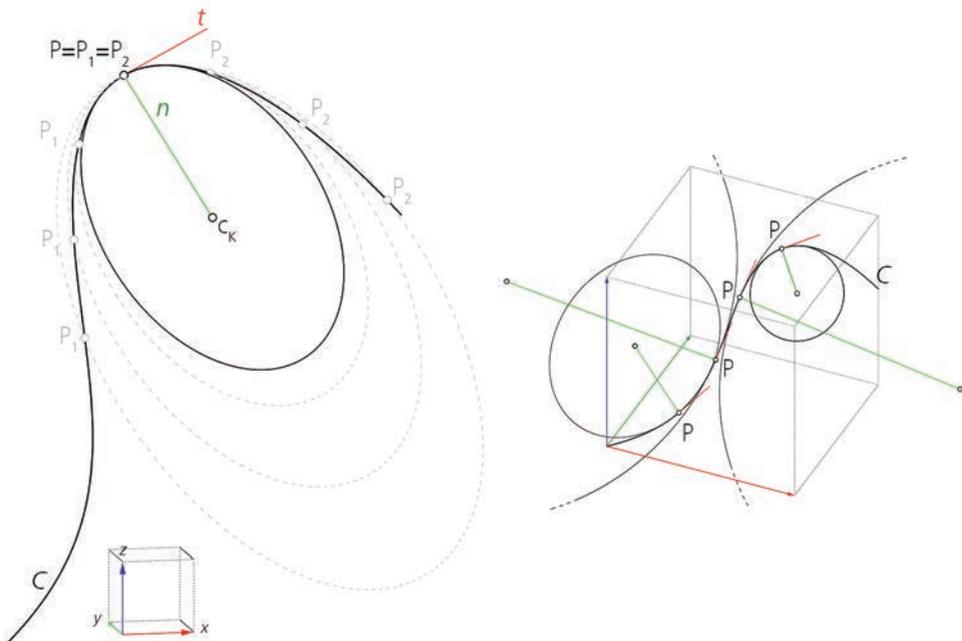


Fig. 19/ Il cerchio osculatore è definito attraverso il punto  $P$  e altri due punti adiacenti  $P_1$  e  $P_2$  quando questi tendono alla posizione di  $P$  (a sinistra); una serie di cerchio osculatori della curva  $C$  (a destra).

te grande; immaginando di iniziare a flettere l'asta i punti  $PP_1P_2$  non sarebbero più allineati e dunque sarebbe possibile costruire un cerchio osculatore di raggio decrescente all'aumentare della flessione applicata all'asta. L'esempio conferma intuitivamente quanto inizialmente enunciato, dunque si può definire la flessione  $K$  di una curva in  $P$  come l'inverso del raggio del cerchio osculatore in  $P$ , ovvero come  $K = 1/r$ . Inoltre, con riferimento al triedro di Frenet, la flessione è strettamente legata all'andamento degli angoli formati dalle tangenti consecutive della curva. Il valore della flessione<sup>12</sup> è un parametro estremamente importante dal punto di vista progettuale tanto è vero che nei software di modellazione matematica è prevista la possibilità di visualizzarne il valore in ogni punto attraverso il grafico di curvatura (fig. 20). Questo strumento può essere attivato mentre si sta lavorando sulle geometrie consentendone il controllo in tempo reale. Più l'andamento del grafico sarà fluido, privo di discontinuità e di flessi

**12** Genericamente nei software di modellazione la flessione viene indicata con il termine "curvatura".

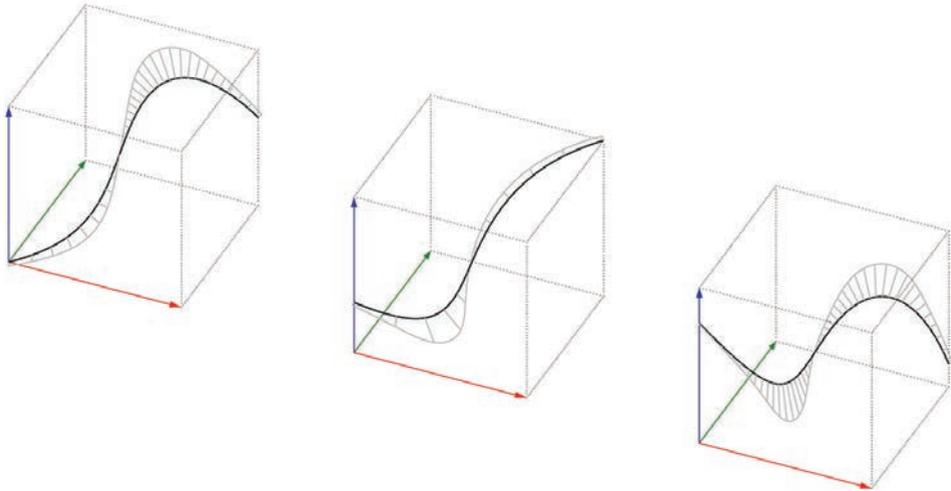


Fig. 20/ Il grafico di curvatura rappresenta i valori della flessione della curva.

inattesi, migliore sarà la geometria della curva cui si riferisce e migliori saranno le superfici generate attraverso quella curva. L'ampiezza del grafico di curvatura rappresenta il valore assoluto della curvatura in ogni punto, perciò l'inverso del raggio del cerchio osculatore corrispondente, mentre la frequenza dei segmenti che congiungono la curva analizzata al grafico indica una accelerazione nella variazione dei valori di curvatura.

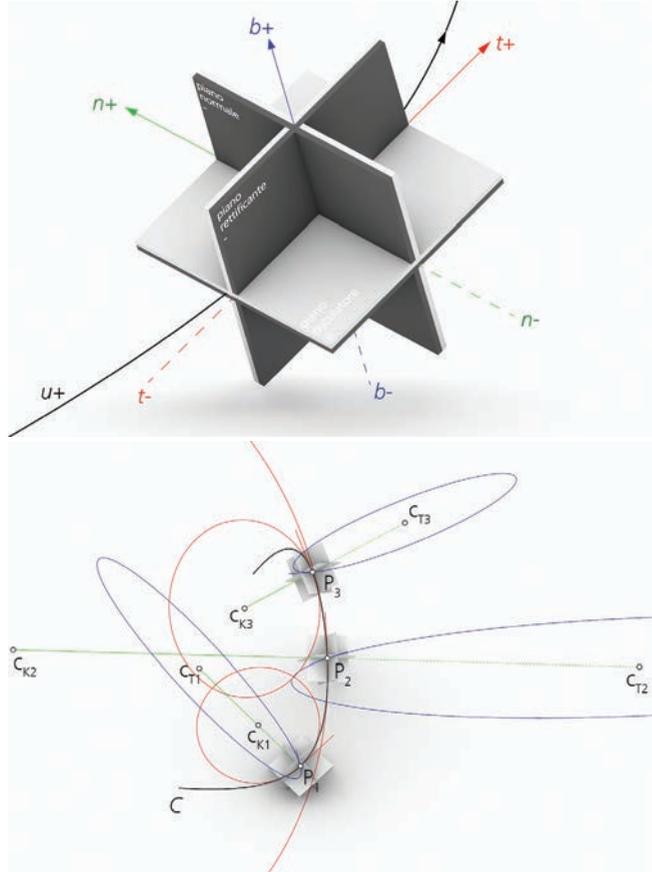
Si è detto che, in rapporto alla terna di Frenet, la flessione è strettamente legata all'andamento degli angoli formati dalle tangenti consecutive. Allo stesso modo la torsione è legata all'andamento degli angoli formati dalle binormali alla curva poiché queste, essendo ortogonali al piano osculatore, ne descrivono le successive posizioni e, dunque, la tendenza della curva a discostarsi dall'essere piana in ogni suo punto.

La rappresentazione della torsione di una curva è meno intuitiva rispetto a quella della flessione poi-

## Le linee curve per l'architettura e il design

Fig. 21/ I segni della terna di Frénet: le facce chiare dei piani rappresentano la loro parte positiva, quelle scure la parte negativa.

Fig. 22/ I cerchi osculatori (in rosso) e i cerchi della torsione (in blu) con i relativi centri di flessione  $c_k$  e di torsione  $c_t$  nei punti  $P_1$ ,  $P_2$  e  $P_3$  della curva  $C$ .



ché non avviene sul piano della curva ma bensì sul suo piano normale, quello passante per la retta normale e per la binormale alla curva nel punto analizzato. Una ulteriore difficoltà è dovuta al fatto che, mentre alla flessione corrisponde sempre un valore assoluto che non necessita di segno, la torsione può essere positiva o negativa in ragione della forma della curva. Per assegnare correttamente il segno alla torsione occorre fare alcune considerazioni preliminari. Si considera positivo il verso della curva che segue il crescere del parametro  $u$ ; per analogia si assegna il verso positivo alla tangente  $t$ ; con riferimento al piano rettificante, cui appartengono la retta tangente e la retta binormale, si considera positiva la faccia del

piano rivolta verso la curva e tale segno si assegna alla normale principale  $n$  che, tra l'altro, punta verso il centro del cerchio osculatore; il verso positivo della binormale  $b$  si deduce dai versi positivi assegnati alla tangente e alla normale principale<sup>13</sup> (fig. 21).

Dato questo sistema di riferimento e immaginando un osservatore nel punto  $P$ , orientato secondo la direzione positiva della binormale e con lo sguardo parallelo al verso positivo della normale principale, la curva  $C$  si definisce destrorsa nel punto  $P$  se l'osservatore la vede salire da sinistra verso destra, mentre si definisce sinistrorsa nel punto  $P$  se la vede salire da destra verso sinistra.

In analogia con la flessione, la torsione  $T$  si definisce come l'inverso del raggio di torsione  $T = 1/r$ , calcolato rispetto all'angolo formato da due binormali successive, con segno positivo qualora la curva sia sinistrorsa in  $P$ , con segno negativo qualora sia destrorsa in  $P$ .

In termini geometrici il valore della torsione  $T$  è l'inverso del raggio di un cerchio che giace sul piano normale alla curva e che ha centro lungo la sua normale principale<sup>14</sup>. Se il valore della torsione è positivo il centro di questo cerchio si troverà lungo la parte positiva della normale principale rispetto a  $P$ , qualora il suo valore sia negativo si troverà lungo la parte negativa<sup>15</sup> (fig. 22).

La conoscenza dei concetti di flessione e torsione, delle loro ricadute sulla forma e degli strumenti a disposizione per la loro analisi è di fondamentale importanza per sfruttare appieno le potenzialità offerte dalla modellazione matematica. In particolare, grazie al grafico di curvatura, che abbiamo visto rappresentare l'andamento della flessione, è possibile gestire non solo la forma di una curva, ma anche il rapporto tra due curve. Questo aspetto si ricollega ad un altro importante concetto che è quello di continuità, la cui corretta gestione è presupposto fon-

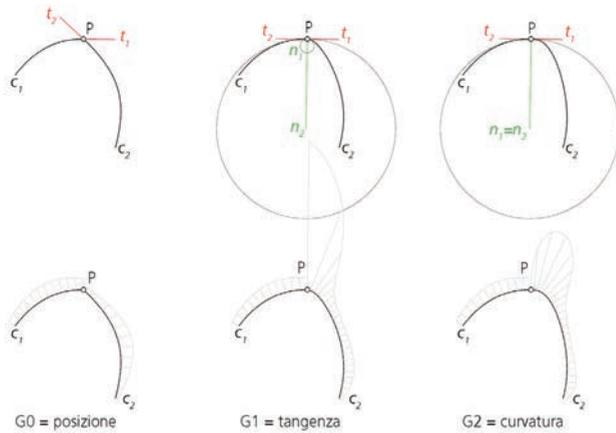
**13** Bianchi 1894, p. 7.

**14** D'Ocagne 1896, p. 310-311; Sereni 1845, p. 145; Villa 1960.

**15** I software di modellazione non prevedono la visualizzazione di un grafico della torsione analogo a quello disponibile per la flessione ma, attraverso la modellazione algoritmica sarebbe possibile costruire e aggiornare in tempo reale la curva che interpola i valori di torsione rispetto ad un numero di punti campionati lungo la curva analizzata.

## Le linee curve per l'architettura e il design

Fig. 23/ Tipi di continuità tra curve, da sinistra verso destra: continuità di posizione, di tangenza e di curvatura. In alto le condizioni geometriche di continuità, in basso il corrispondente grafico di curvatura.



damentale per una corretta modellazione di curve e superfici nel campo del design<sup>16</sup> e dell'architettura. La continuità indica la qualità di giunzione tra due curve o superfici e ne caratterizza la transizione; maggiore è la continuità più le curve adiacenti appariranno "lisce" nel passaggio dall'una all'altra. Si considerano generalmente tre livelli di continuità<sup>17</sup>: la continuità di posizione  $G0$ , la continuità di tangenza  $G1$  e la continuità di curvatura  $G2$ .

**16** Molto diffusa, anche se non codificata, nel campo del design è la definizione di "superfici di classe A" con la quale ci si riferisce genericamente ad un insieme di superfici free-form caratterizzate da elevata accuratezza metrica, assenza di lacune, continuità di curvatura e distribuzione ordinata e razionale dei punti di controllo delle superfici.

**17** Esistono ulteriori livelli di continuità che tengono conto anche della accelerazione di variazione del valore della flessione oltre che del suo valore assoluto nel punto di giunzione e che presentano un raccordo "addolcito" in corrispondenza dei cambi di curvatura. Si tratta del tipo di continuità  $G3$ .

Quando due curve adiacenti sono in continuità di posizione  $G0$  l'unico vincolo che soddisfano è che i loro estremi siano coincidenti; se le curve sono in continuità di tangente  $G1$ , oltre alla coincidenza di posizione, è garantita anche la coincidenza della direzione delle tangenti negli estremi; infine, quando le curve sono in continuità di curvatura  $G2$ , oltre alla coincidenza di posizione e direzione delle tangenti negli estremi, viene garantita anche l'uguaglianza del valore della flessione  $\sigma$ , che è lo stesso, della lunghezza del raggio del cerchio osculatore. Attraverso il grafico di curvatura è facile verificare il tipo di continuità presente tra due curve  $C_1$  e  $C_2$  nel punto di giunzione  $P$ : nel caso di semplice continuità di posizione  $G0$ , il grafico non presenta buchi ma evidenzia un brusco salto di valore e la mancata coincidenza

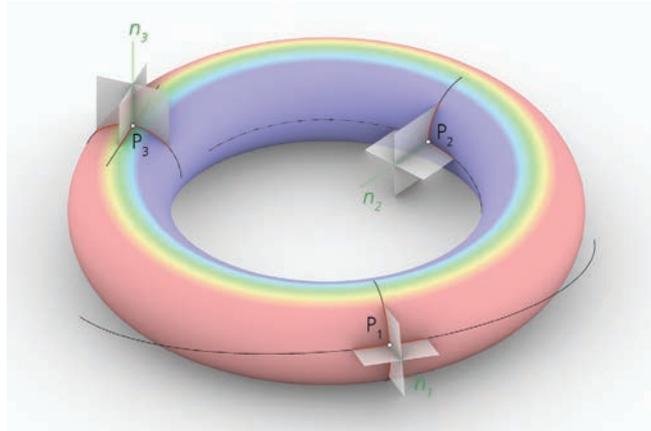
della direzione delle tangenti indicata dal disallineamento dei suoi raggi; nel caso di continuità di tangenza  $G1$ , il grafico mostra ancora il salto di valore e, attraverso l'allineamento dei raggi, evidenzia la coincidenza della direzione delle tangenti; nel caso di continuità di curvatura  $G2$ , il grafico mostra, oltre alle condizioni precedenti, un raccordo in corrispondenza della variazione di curvatura (fig. 23).

Posto dunque che una progettazione accurata della forma non può prescindere dal controllo delle sue proprietà geometriche e che tale controllo deve essere eseguito prima di tutto sulle curve attraverso cui si andranno a generare le superfici, discuteremo ora le ricadute di quanto appena visto riguardo la continuità estendendo momentaneamente lo studio alle superfici e agli strumenti di controllo delle loro proprietà. Allo scopo di sottolineare il collegamento diretto tra curve e superfici, riprenderemo in primo luogo il caso astratto appena utilizzato per descrivere i diversi tipi di continuità, per chiudere poi con un esempio applicativo riguardante un oggetto di design contemporaneo.

Prima di introdurre gli strumenti di verifica della continuità delle superfici e senza scendere nel dettaglio, è necessario ricordare che anche la forma delle superfici è descritta dal concetto di curvatura. Nel caso delle superfici si parla di curvatura gaussiana, in onore di Carl Friedrich Gauss (1777-1855) che per primo la definì, come del prodotto  $K$  delle curvature principali, minima  $k_1$  e massima  $k_2$ , nell'intorno del punto  $P$  analizzato, in cui  $k_1$  e  $k_2$  sono i valori minimo e massimo di flessione delle sezioni principali della superficie nel punto  $P$ . La curvatura gaussiana di un toro, ad esempio, è positiva in  $P_1$ , dove i cerchi osculatori delle sezioni principali sono concordi, negativa in  $P_2$ , dove i cerchi osculatori sono discordi e nulla in  $P_3$ , dove uno dei cerchi osculatori diventa una linea retta. La rappresentazione della curvatura gaussiana avviene attraverso

## Le linee curve per l'architettura e il design

Fig. 24/ La curvatura gaussiana di un toro rappresentata attraverso una mappa continua in falsi colori e attraverso i cerchi osculatori (in nero) delle sezioni principali (in rosso) nei punti  $P_1$ ,  $P_2$  e  $P_3$ .



una mappa in falsi colori che ne descrive l'andamento evidenziandone i cambiamenti<sup>18</sup> (fig. 24).

Anche nel caso delle superfici la proprietà che definisce la transizione dall'una all'altra è definita continuità e questa può nuovamente essere di posizione  $G0$ , di tangenza  $G1$  e di curvatura  $G2$ . Generando delle superfici NURBS a partire dalle curve utilizzate in precedenza per esporre il concetto di continuità delle curve, è possibile apprezzare quanto la diversa costruzione di queste influisca sulla forma e sulla qualità delle superfici che ne derivano. Oltre alla visualizzazione in falsi colori della curvatura gaussiana un altro strumento che aiuta il progettista nel controllo di qualità delle forme e in particolare delle transizioni tra superfici diverse è infatti l'analisi zebra che, immaginando la superficie perfettamente riflettente e inserita in una sfera mappata a strisce bicolori<sup>19</sup>, evidenzia il comportamento della superficie e le eventuali discontinuità di transizione.

Osservando attentamente l'andamento delle strisce, che si comportano come linee di riflessione della superficie, si riconosce un loro andamento caratteristico in corrispondenza dei bordi di giunzione che identifica ciascuna tipologia di continuità. In particolare, quando nel passaggio tra due superfici le

**18** Il valore della curvatura gaussiana è positivo se i cerchi osculatori delle sezioni principali sono concordi, negativo se sono discordi e nullo se una delle due sezioni ha curvatura nulla. Migliari 2009b, p. 148-149.

**19** Valenti 2008, p. 160.

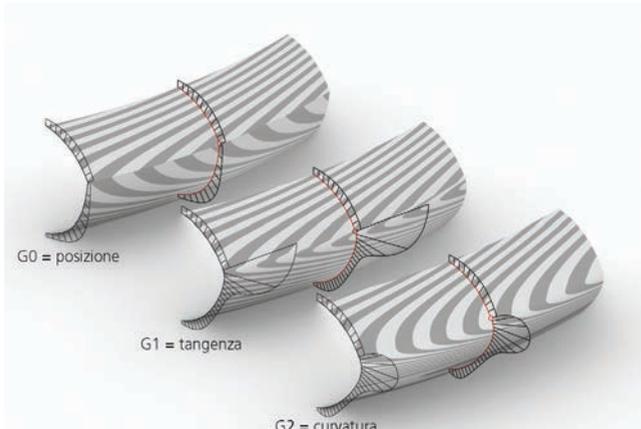


Fig. 25/ L'analisi di continuità tra coppie di superfici generate a partire da coppie di curve (in rosso) con differenti tipi di continuità.

strisce si spezzano e sono sfalsate si parla di una continuità di posizione  $G_0$ ; quando le strisce sono allineate lungo il bordo di giunzione ma hanno direzioni diverse si parla di una continuità di tangenza  $G_1$ ; infine, quando le strisce oltre a corrispondersi sono raccordate in modo continuo si parla di una continuità di curvatura  $G_2$ . Si noti inoltre come le caratteristiche di continuità delle curve sezione generatrici si siano propagate alle superfici (fig. 25).

L'ultimo strumento di analisi delle superfici, generalmente presente in tutti i software di modellazione tridimensionale avanzata rivolti al design e all'architettura, è quello riguardante l'angolo di sforno. Questo parametro è particolarmente significativo per la progettazione delle geometrie che verranno prodotte attraverso tecniche di iniezione e l'uso di stampi; esso infatti favorisce sia la distribuzione del materiale durante l'iniezione negli stampi che l'estrazione del pezzo dallo stampo stesso a fine lavorazione. I parametri da impostare per eseguire questo tipo di analisi sono la direzione di trazione o estrazione, cioè la direzione secondo cui lo stampo verrà aperto e staccato dalla superficie dell'oggetto, e l'angolo di sforno, impostato in funzione di vari fattori tra cui il materiale di lavorazione e il tipo

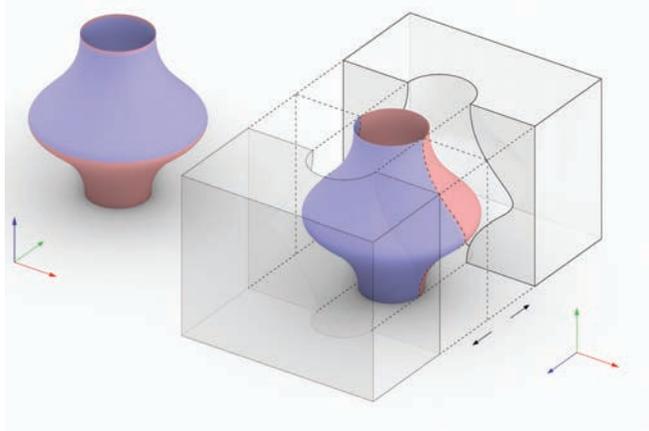
## Le linee curve per l'architettura e il design

Fig. 26/ L'analisi dell'angolo di sforno eseguita rispetto a due diverse direzioni di trazione (asse blu dei sistemi di riferimento) e usata come ausilio per la progettazione di uno stampo scomponibile.

(Pagina seguente)

Fig. 27/ Sequenza di modellazione riferita alla poltrona Voido®, progettata da Ron Arad nel 2006 per Magis®.

- a) Primo ridisegno attraverso curve per punti di controllo;
- b) Miglioramento del ridisegno con il supporto del grafico di curvatura;
- c) Proiezione prospettico su superficie ausiliaria ricostruita dal secondo prospetto;
- d) Costruzione superficie interna (patch surface);
- e) Costruzioni sezioni trasversali superficie esterna;
- f) Costruzione superficie esterna (sweep 2 binari)
- g) Superficie interna ed esterna accoppiate
- h) Eliminazione spigoli.



di stampo utilizzato. La direzione di trazione è definita dalla normale al piano di costruzione mentre l'analisi viene visualizzata attraverso una mappa in falsi colori in cui, generalmente, le parti della superficie evidenziate in rosso sono quelle che presentano problemi di estrazione dallo stampo. Nel caso in esempio, ipotizzando una direzione di trazione verticale degli stampi si notano due elementi problematici: il collo superiore della superficie e la sua intera parte inferiore. Il collo superiore tende ad allargarsi e questo ne impedisce l'estrazione da uno stampo che venga aperto secondo un movimento dal basso verso l'alto, lo stesso vale per la parte inferiore della superficie. Queste problematiche possono essere risolte in due modi, o attraverso la riprogettazione della forma, soluzione praticabile soprattutto per il collo superiore della superficie, oppure attraverso la progettazione di stampi composti da più pezzi che possano essere aperti e movimentati ognuno secondo diverse direzioni di trazione. In questo secondo caso, ipotizzando una direzione di trazione orizzontale, la progettazione dello stampo può essere eseguita tenendo conto delle variazioni della mappa in falsi colori per individuare le superfici di separazione dei suoi diversi pezzi (fig. 26).

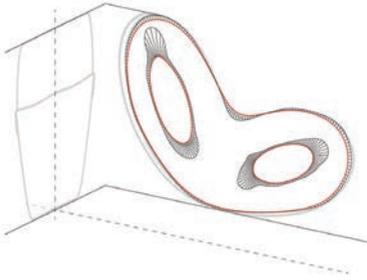


Fig.27-a/ Primo ridisegno attraverso curve per punti di controllo.

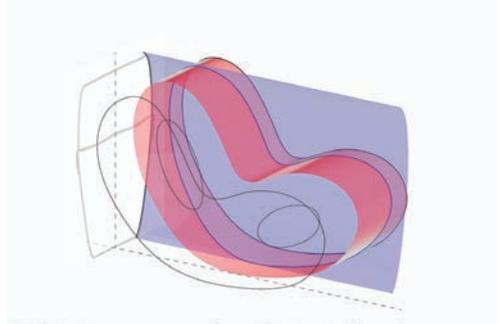


Fig.27-c/ Proiezione prospettica su superficie ausiliaria ricostruita dal secondo prospetto.

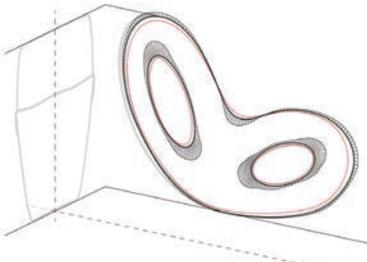


Fig.27-b/ Miglioramento del ridisegno con il supporto del grafico di curvatura.

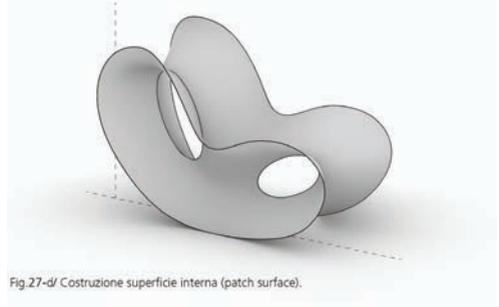


Fig.27-d/ Costruzione superficie interna (patch surface).

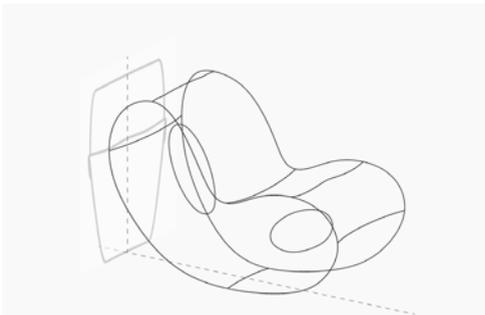


Fig.27-e/ Costruzione sezioni trasversali superficie esterna.



Fig.27-g/ Superfici interna ed esterna accoppiate.

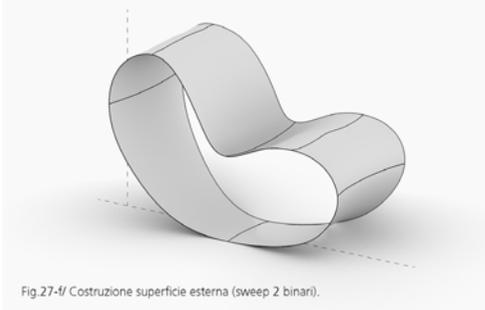


Fig.27-f/ Costruzione superficie esterna (sweep 2 binari).



Fig.27-h/ Eliminazione spigoli.

## Le linee curve per l'architettura e il design

Fig. 28/ Modellazione della poltrona Voido®, progettata da Ron Arad nel 2006 per Magis®.

- a) Prospetto modello
- b) Creazione superfici di raccordo con continuità di curvatura G2.



Fig.28-a/ Prospetto modello.



Fig.28-b/ Creazioni superfici di raccordo con continuità di curvatura G2.

**20** Il processo produttivo, applicato ad un altro prodotto dello stesso designer, è presentato attraverso un video disponibile al seguente link (consultato il 10/03/2018): <https://www.youtube.com/watch?v=B-Alu7PhL7k>.

Infine, per riassumere attraverso una applicazione quanto esposto finora riguardo le tecniche di generazione e analisi della forma, proponiamo una sequenza di modellazione riferita alla poltrona Voido®, progettata da Ron Arad nel 2006 per Magis®, che esemplifica le proprietà geometriche tipiche dei modelli matematici ed è realizzata per iniezione rotativa<sup>20</sup> di polietilene (figg. 27, 28).

# Parte seconda



# La spirale cilindrica nelle scale rinascimentali e barocche

di Leonardo Paris

Una particolare famiglia di linee curve è quella delle spirali, piane o sghembe. Tra quelle sghembe la più nota, spesso usata in architettura, è l'elica cilindrica generata dal movimento di un punto  $P$  che si muove di moto uniforme lungo una generatrice  $g$  mentre questa ruota intorno al suo asse. Questa definizione può essere estesa a tutte le superfici di rotazione, come il cono, la sfera ed anche a superfici con generatrici curve generiche NURBS<sup>1</sup>, ma può riguardare anche, per estensione, le superfici cilindriche con direttrici policentriche tra le quali, per esempio, l'ovale. Un'elica cilindrica è caratterizzata da un passo, cioè la distanza tra i due punti consecutivi sulla stessa generatrice. Il tratto di curva tra questi due punti è una "spira" dell'elica (fig. 1). In ogni punto dell'elica la tangente ha un angolo costante rispetto all'asse del cilindro; è cioè una "lossodromia", ed è anche una "geodetica", poiché sviluppando su un piano la superficie cilindrica la curva si trasforma in una linea retta. A parità di passo due eliche concentriche

**1** Per maggiori approfondimenti cfr. De Carlo, Baglioni 2009, pp. 129-143. Nel paragrafo *Il contributo della rappresentazione matematica nello studio di lossodromie, eliche e spirali* viene illustrata la generalizzazione in termini di modellazione matematica per la costruzione di eliche e lossodromie in superfici di generiche di rotazione.

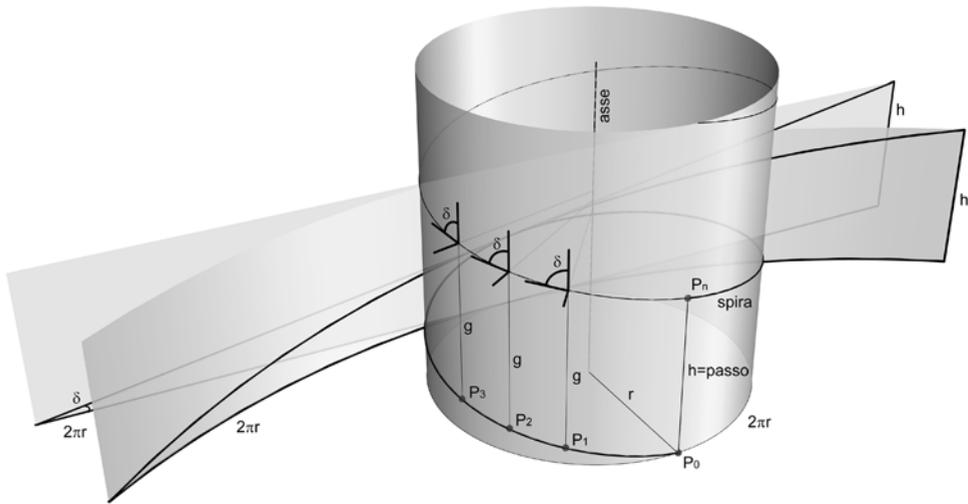


Fig. 1/ Costruzione geometrica di un'elica cilindrica.

**2** Matematico e astronomo, famoso per i suoi studi sulle coniche, attivo tra la fine del III e l'inizio del II secolo a.C. Per approfondimenti cfr. Loria 1914, p. 308.

**3** Nel *De Architectura*, nel libro IX, Vitruvio parla di scale essenzialmente come applicazione di un problema geometrico, in particolare come applicazione del teorema di Pitagora, per calcolare rapidamente l'altezza dei gradini in rapporto alla pendenza della scala.

hanno pendenze diverse in rapporto proporzionale al raggio della direttrice del cilindro.

L'elica cilindrica, i cui primi studi sulle sue proprietà geometriche si devono ad Apollonio di Perga<sup>2</sup>, è da sempre associata in architettura alla costruzione delle scale elicoidali. Il tema delle scale in architettura è stato, e lo è ancora oggi, motivo di grande attenzione progettuale per le sue diverse implicazioni, geometriche, costruttive e formali. La storia dell'architettura è costellata di realizzazioni, alcune ancora perfettamente funzionanti, che ne testimoniano l'evoluzione tipologica.

Una scala va pensata planimetricamente, occorre dargli un ruolo in funzione della distribuzione architettonica degli spazi, renderla funzionale, calcolarla dal punto di vista strutturale e costruttivo, arrivare ad immaginarla come un vero e proprio pezzo di architettura dotata di autonomia formale, a volte anche con un alto valore simbolico.

Vitruvio ha disegnato scale, anche se, come è noto, non ci sono pervenuti i disegni che corredevano il suo trattato<sup>3</sup>. Numerosi sono gli esempi di scale eli-

coidali risalenti al periodo medievale, spesso legate alla costruzione di torri, fortificazioni, campanili e quindi con un valore prevalentemente funzionale. Alcune di queste realizzazioni medievali presentano anche un elevato grado di innovazione e sperimentazione tecnico-costruttiva basata su elementi lapidei opportunamente sagomati, con soluzioni formali che in qualche modo anticipano di molti secoli alcuni dei temi propri della stereotomia.

Ma è a partire dal Rinascimento che la scala elicoidale assume anche un ruolo con una forte connotazione estetico-architettonica. In questo periodo vengono realizzate alcune scale diventate dei capisaldi nella storia dell'architettura, come la rampa di Bramante nel Belvedere in Vaticano (1507), la scala di Vignola a Caprarola (1559), la scala di Mascarino al Palazzo del Quirinale (1585) e la scala, attribuita a Borromini, a Palazzo Barberini (1633).

### **La trattatistica rinascimentale.**

#### ***I Quattro libri di Andrea Palladio***

La realizzazione di queste scale si lega anche alla diffusione della trattatistica rinascimentale di architettura<sup>4</sup>. Ne *I Quattro Libri* di Palladio (1570) per esempio c'è un intero capitolo, il XXVIII del Libro primo, dedicato a questo tema, «Delle scale, e varie maniere di quelle, e del numero, e grandezze de' gradi». La breve trattazione è accompagnata da una serie di figure che descrivono otto differenti tipi di scale e si conclude con il riferimento, anche illustrato, ad un esempio reale, la doppia scala elicoidale nel castello di Chambord in Francia. Le varianti introdotte da Palladio per le scale elicoidali, definite a «Lumaca» o anche a «Chiocciola», dipendono dalla forma della pianta, «ritonde» o «ovate», con la colonna nel mezzo oppure «vacue», con gradini retti o curvi. Nel testo, contrariamente a quanto riportato nel titolo, non si parla espressamente di numero e gran-

**4** Alcune parti di questo paragrafo, come alcune parti del successivo riguardanti la scala di Mascarino nel palazzo del Quirinale, sono tratte da Paris, Ricci, Roca De Amicis 2016. Si ringrazia l'editore Campisano per l'autorizzazione concessa.

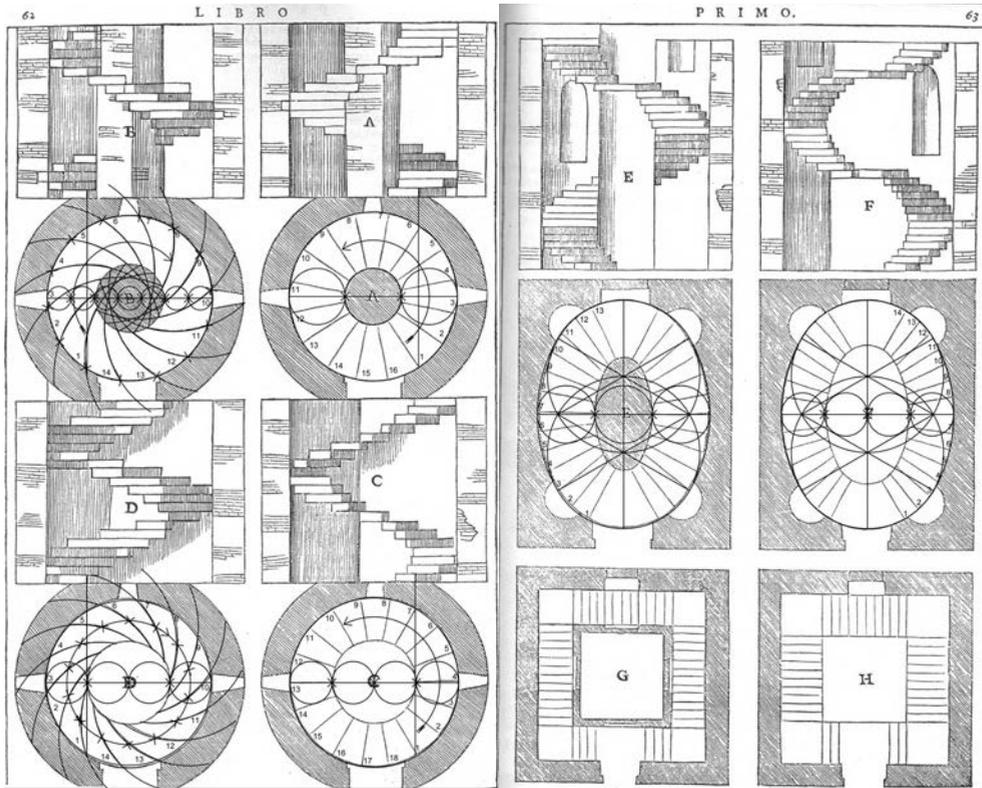


Fig. 2/ Andrea Palladio, scale a lumaca. Tavola del trattato con elaborazioni grafiche dell'autore (da *I quattro libri*, Venezia 1570, I, p. 62).

Fig. 3/ Andrea Palladio, scala "ovata" e "diritta". Tavola del trattato con elaborazioni grafiche dell'autore (da *I quattro libri*, Venezia 1570, I, p. 63).

dezza dei gradini, né si fa riferimento alle costruzioni dell'ovale, come invece aveva fatto Serlio nel suo Libro Primo (pubblicato in Francia nel 1545) descrivendone «quattro maniere».

Analizzando nel dettaglio i differenti modelli proposti da Palladio si nota che, per quelle a pianta circolare ed ovale, l'autore associa a ciascuna planimetria anche la rappresentazione in alzato, in una forma ibrida prospetto-sezione; i gradini sono blocchi monolitici leggermente sovrapposti mentre i muri sezionati in alzato sono contrassegnati da alcuni ricorsi di mattoni. Nelle scale a pianta circolare è ben individuato l'accesso e le finestre strombate (non riportate però in alzato) (fig. 2). Nelle due scale a pianta ovale, oltre all'apertura di accesso alla scala, sono presenti anche quattro nicchie absidali disegnate sia

in pianta che in alzato (fig. 3). Nelle scale circolari non sono presenti pianerottoli che molto spesso identificano, anche dal punto di vista funzionale, il collegamento con i livelli di distribuzione orizzontali. In questo caso Palladio ripropone una soluzione come quella realizzata da Vignola a Caprarola.

Palladio, nel trattato, propone dei rapporti proporzionali per la costruzione della pianta tra la parte dedicata ai gradini e la restante parte, sia essa piena o vuota; queste proporzioni descritte nel testo corrispondono perfettamente nei disegni. Il numero di gradini utilizzati per compiere un giro completo dell'elica è sempre variabile, così come le pendenze. Nella soluzione A il diametro è suddiviso in tre parti uguali (di cui una per la colonna centrale), con 16 gradini per ogni giro. Nella soluzione B la colonna centrale è pari a  $\frac{3}{7}$  del diametro ed i gradini necessari per compiere un giro completo sono 14 ed hanno una conformazione curva. Nelle due soluzioni C e D lo spazio centrale è vuoto e di ampiezza pari alla metà del diametro, quindi molto più ampio che nelle soluzioni con pilastro centrale, con 18 gradini rettilinei nella soluzione C e sempre 14 gradini curvi nella soluzione D<sup>5</sup>.

Lo studio dell'elica cilindrica applicata alla realizzazione di scale elicoidali deve prima di tutto prendere in considerazione la sua pendenza, perché questa, evidentemente, ha delle inevitabili conseguenze funzionali nel determinare il rapporto tra l'alzata e la pedata dei gradini.

La pendenza può essere espressa con il valore di un angolo ma più comunemente viene espressa con un valore percentuale dato dal rapporto tra le due misure, dell'alzata e della pedata<sup>6</sup>. La differenza fondamentale tra scale dritte e scale rotonde o ovali è che nelle prime la pendenza è costante su tutta la larghezza della scala, nelle altre varia aumentando di valore avvicinandosi verso il centro (fig. 4).

**5** La costruzione geometrica degli archi curvilinei delimitanti i gradini nelle due soluzioni B e D è diversa; nel primo caso gli archi hanno i centri sul perimetro esterno della scala, nel secondo caso lungo la circonferenza mediana rispetto alla larghezza dei gradini stessi.

Le soluzioni con gradini rettilinei, A e C, hanno come verso di salita quello antiorario; le soluzioni con gradini curvi salgono invece in senso orario.

**6** Con una pendenza per esempio del 30%, ad una pedata di 30 cm corrisponde un'alzata di 9 cm. Con una pendenza del 100% l'alzata e la pedata hanno la stessa misura.

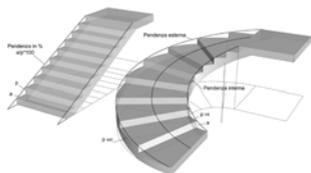
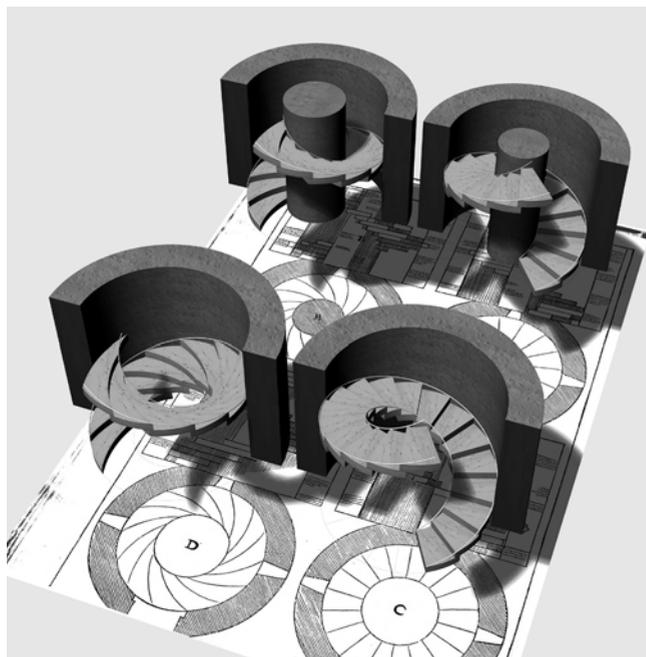


Fig. 4/ Confronto tra la pendenza di una rampa rettilinea e di una curva.

Fig. 5/ Elaborazione tridimensionale della tavola di Palladio. Cfr. fig. 2.



Nelle due soluzioni proposte da Palladio (fig. 5), per esempio nei due casi con gradini a pedata rettilinea, le pendenze calcolate in base al rapporto tra raggio della scala e altezza di una spira variano nel caso A da un valore del 27% all'esterno ad un valore dell'80% nel punto più interno; nel caso C la circonferenza esterna è uguale al caso A ma poiché il passo della spira è maggiore la pendenza aumenta al 31%; sulla circonferenza interna, che è di dimensioni maggiori rispetto al caso A, la pendenza è del 61%. Simili valori di pendenza sono evidentemente in contrasto con la comodità d'uso che, come sapevano anche gli antichi, è uno dei requisiti fondamentali di una scala.

Il problema della pendenza della scala curva si complica notevolmente quando si passa ad una soluzione a pianta ovale con la necessità di inserire almeno due pianerottoli ed eventualmente anche altri intermedi (fig. 6).

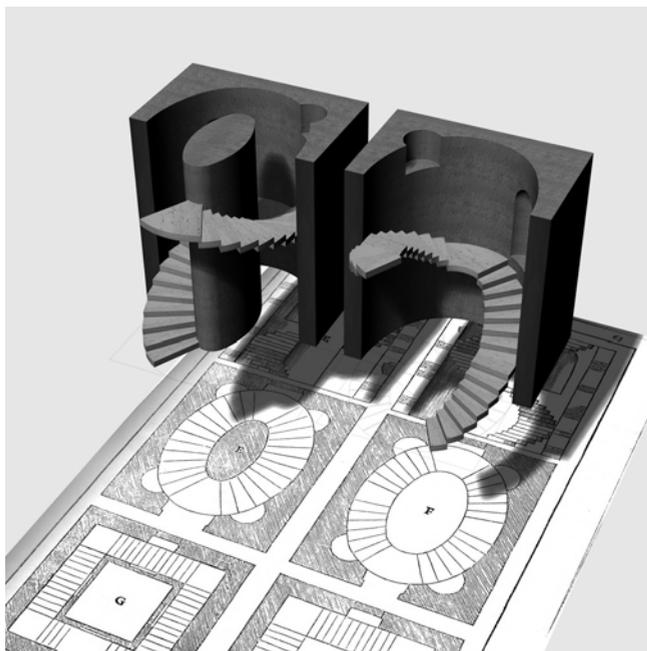


Fig. 6/ Elaborazione tridimensionale della tavola di Palladio. Cfr. fig. 3.

### **Evoluzione di un'idea. Il ruolo della linea curva tra configurazione formale e percezione spaziale**

Come abbiamo visto, l'elica cilindrica rappresenta la matrice formale di una scala elicoidale ed il suo sviluppo geometrico può essere condizionato dalla necessità funzionale di inserire dei pianerottoli che, inevitabilmente, interrompono la continuità della linea. Nei primi due casi tra quelli citati in precedenza questo problema non si pone. Bramante infatti non realizza una scala ma una rampa continua, senza interruzioni. Vignola realizza una scala continua di tre spire e mezza, senza pianerottoli, basandosi, com'è nel suo stile, sulla ripetizione di elementi modulari su una matrice esagonale.

Diverso, e indubbiamente più complesso, il caso della scala «ovata» di Mascarino al Quirinale con l'inserimento di soluzioni tecnico-formali molto sofisticate che in parte verranno poi riprese anche nella scala di Palazzo Barberini.

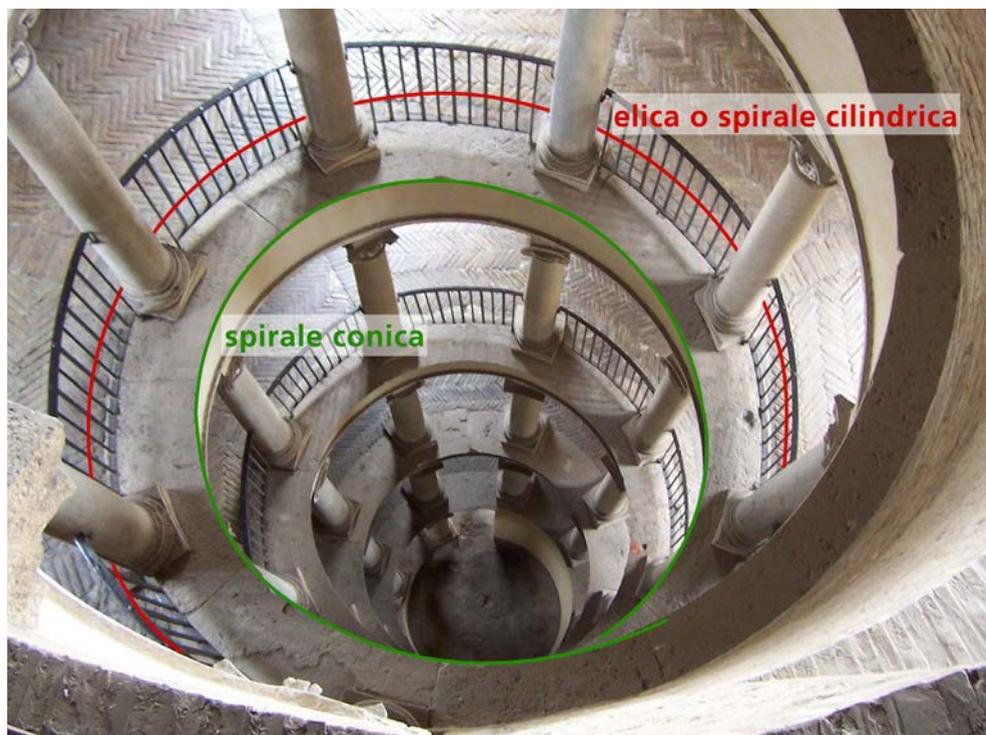
L'elemento che più di altri simboleggia, in tutta la sua forza dinamica, l'essenza geometrica dell'elica cilindrica è la trabeazione che corre internamente ai nuclei di queste scale, trabeazione sorretta strutturalmente, ma anche percettivamente, da una sequenza ritmata di colonne e basamenti<sup>7</sup> che con grande maestria vengono adattati al doppio movimento di rotazione e traslazione.

Le scale cosiddette *vacue* rappresentano, in questo periodo, una mirabile sintesi della triade vitruviana anche per quanto riguarda una rinnovata *utilitas*. Palladio ne esalta l'uso sia per quanto riguarda l'illuminazione sia per la visibilità cosicché «quelli, che sono al sommo della Scala, veggono tutti quelli, che saliscono, o cominciano a salire: e similmente sono da questi veduti».

La relazione geometrica che intercorre tra rampa/gradini e ordine architettonico non è univoca ma dipende dalla combinazione degli altri due fattori principali, quello costruttivo (*firmitas*) e quello formale (*venustas*). Ciò emerge chiaramente analizzando in dettaglio i quattro esempi citati nei quali ciascun progettista inventa e realizza una sua specifica soluzione. Un elemento le accomuna tutte: l'eleganza formale di queste scale architettoniche riesce sempre a nascondere la complessità geometrica.

Bramante, al quale va attribuito il ruolo di inventore di questa particolare soluzione architettonica, optando per una rampa non ha la necessità di risolvere gli aspetti funzionali di una scala. Di contro adotta, dal punto di vista architettonico, una soluzione molto complessa con una sequenza di 36 colonne di quattro ordini differenti (toscano, dorico, ionico e composito) su ogni spira formata da otto colonne (con l'aggiunta finale di un'altra mezza spira sempre di ordine composito). Le colonne hanno tutte la stessa altezza ma diametri differenti con l'utilizzo di un artificio al tempo stesso metrico e percettivo che

<sup>7</sup> La rampa di Bramante non presenta basamenti. Le colonne poggiano direttamente sul piano della rampa.



nasconde visivamente la discontinuità tra un ordine e quello successivo. L'allineamento all'elica cilindrica avviene nella sola parte interna dei piedritti delle colonne. In questo modo la rampa mantiene inalterata la sua larghezza di 10 palmi romani. Questa scelta architettonica fa sì che l'elica di collegamento degli elementi esterni delle colonne (quelli che prospettano su vuoto centrale) sulla quale si sviluppa la trabeazione non fa parte di una superficie cilindrica bensì di una superficie conica (fig. 7). Un cono che si allarga verso l'alto con un angolo di pendenza della generatrice di poco inferiore ad  $1^\circ$ . Quindi la direttrice della trabeazione interna alla rampa elicoidale di Bramante è una spirale conica.

L'effetto percettivo di chi si affaccia nel vuoto centrale e che, inevitabilmente, è portato ad alzare lo sguardo verso l'alto è pertanto quello di una prospettiva rallentata.

Fig. 77 Roma. Cortile del Belvedere in Vaticano, scala elicoidale di Bramante. Individuazione delle due differenti direttrici: eliche o spirale cilindrica e spirale conica. Si ricorda che nel caso di un cilindro l'elica e la spirale coincidono mentre nel cono sono diverse. L'elica conica è infatti una curva con pendenza costante, mentre la spirale è definita dal movimento costante di un punto lungo una generatrice e dalla rotazione attorno al proprio asse. Nella rampa del Bramante la linea interna, essendo determinata dall'intersezione di un cono con un elicoide cilindro, ha una pendenza variabile. Per ulteriori approfondimenti su eliche e spirali si rimanda al capitolo curato da Marta Salvatore, pp. 96-97.

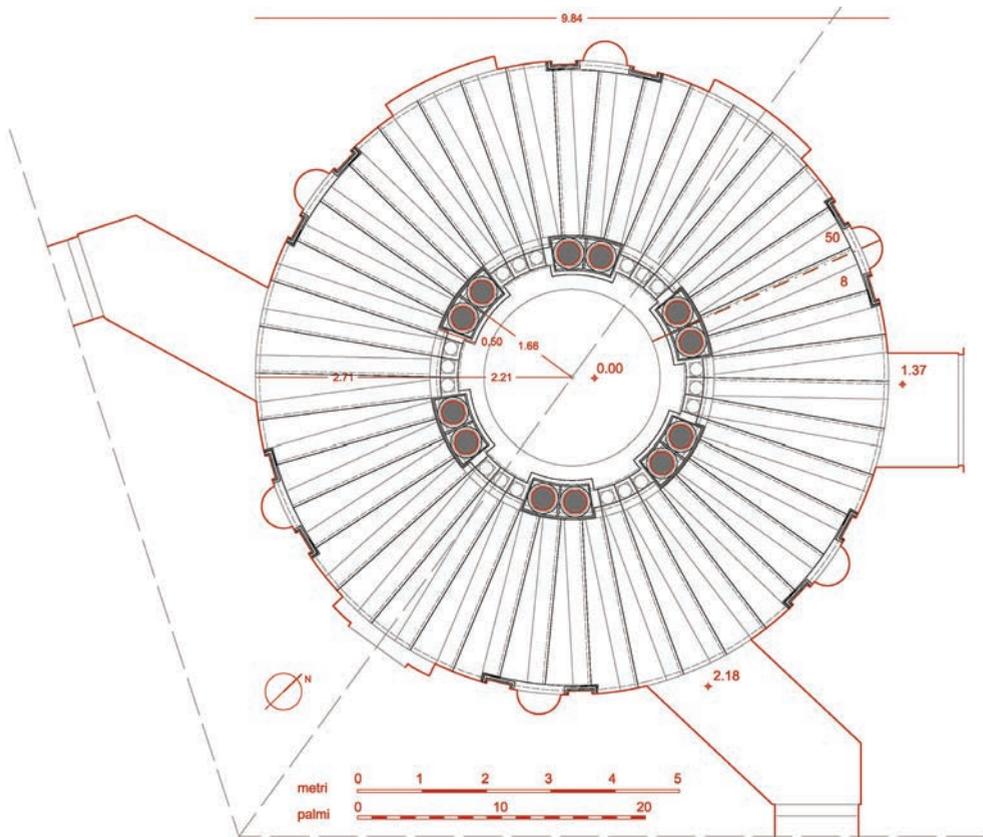
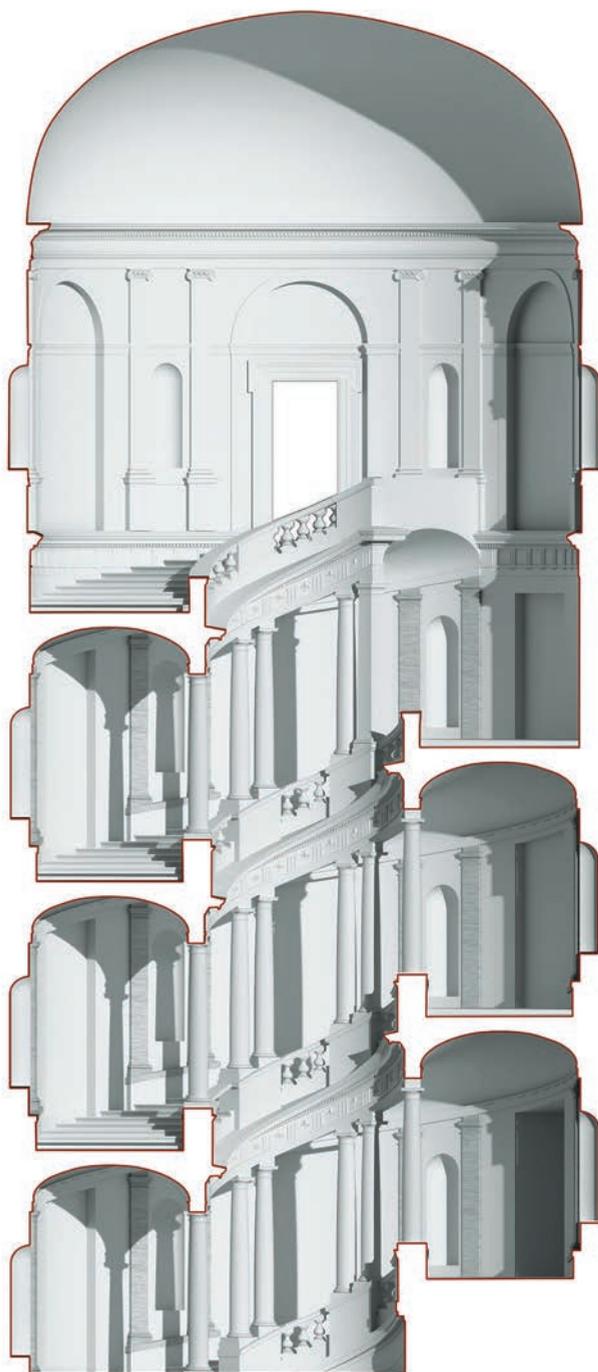


Fig. 8/ Palazzo Farnese a Caprarola. Scala elicoidale di Vignola. Pianta. Rilievo di Leonardo Paris.

A Caprarola Jacopo Barozzi da Vignola riprende l'invenzione formale del Bramante realizzando una scala vera e propria con gradini radiali, senza pianerottoli, con un ritmo architettonico centrale di sei colonne binate in ordine dorico per ogni spira; ritmo che viene proiettato su paraste anche sulla superficie cilindrica esterna (fig. 8). I gradini della scala si sviluppano su tre spire complete più un sesto, con 13 coppie di colonne binate più due moduli (all'inizio ed alla fine della scala) formati da una colonna circolare uguale alle altre e da pilastri quadrati adattati nella forma e nella proporzione. La scala culmina con un grande spazio circolare coperto da una cupola a sezione semiovale (fig. 9). L'elemento più caratterizzante della scala è indub-

## La spirale cilindrica nelle scale rinascimentali e barocche

Fig. 9/ Palazzo Farnese a  
Caprarola. Scala elicoidale di  
Vignola. Sezione del modello 3D.  
Rilievo di Leonardo Paris.



biamente il suo nucleo, con la ricca trabeazione dorica che si avvolge al di sopra delle colonne lungo la direttrice elicoidale, e con il fregio ritmato dalla perfetta alternanza di triglifi e metope con i gigli, simbolo dei Farnese. La scala ha una suggestiva progressione luminosa dal basso verso l'alto determinata dalla particolare collocazione delle finestre che diffondono una luce mai diretta ma sempre laterale. Il fascino della "lumaca" di Caprarola deriva dalla grande abilità progettuale di un Vignola pienamente maturo e dal rigore nel controllo dell'esecuzione dell'opera. Qui Vignola si misura nell'ardua impresa di piegare l'ordine architettonico secondo una direttrice geometrica a sviluppo tridimensionale qual è l'elica cilindrica e teorizza il valore della geometria come elemento di controllo dell'articolazione dello spazio architettonico anche nelle forme più complesse<sup>8</sup>.

Gli esempi scelti per questo breve saggio sono tutti fortemente emblematici di un progressivo cambiamento culturale che contraddistingue il passaggio dal Rinascimento al Barocco.

La misura di un nuovo significativo cambiamento del pensiero architettonico si riesce a cogliere proprio nell'opera di Ottaviano Mascarino quando, ormai architetto affermato e maturo, si trova nella condizione progettuale simile a quella del suo maestro; trasformare una preesistenza in un palazzo, inserendo anche qui una scala monumentale curva (fig. 10). Mascarino ama l'ovale, così come Vignola, ma si rende subito conto del diverso livello di difficoltà nel trasformare questa figura geometrica, apparentemente semplice, in uno sviluppo tridimensionale elicoidale. Tra le possibili soluzioni geometriche dell'ovale teorizzate da Serlio Mascarino sceglie la quarta, l'ultima, quella cosiddetta equilatera che in qualche modo rimanda all'esagono vigolesco con angoli di 60° e suoi sottomultipli. Adatta le dimensioni della linea al progetto. Una lettura attenta del disegno

**8** Negli stessi anni di costruzione di Palazzo Farnese Vignola manda alle stampe nel 1562 il suo trattato *Regola delli Cinque Ordini d'Architettura*.

## La spirale cilindrica nelle scale rinascimentali e barocche

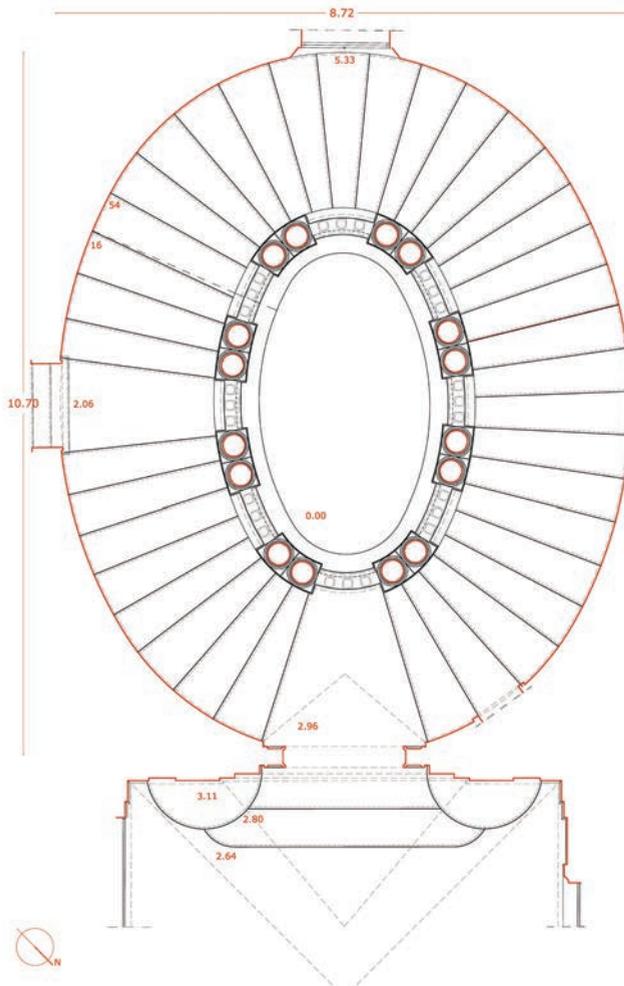
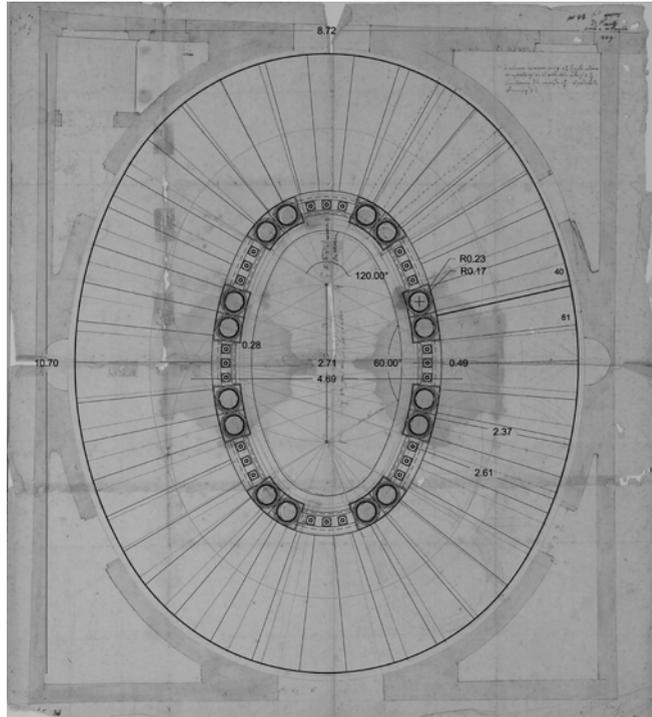


Fig. 10/ Roma. Palazzo del Quirinale. Scala elicoidale di Mascarino. Pianta. Rilievo di Leonardo Paris.

conservato all'Accademia di San Luca consente di comprendere bene la matrice geometrica usata dal progettista, matrice che si è potuto riscontrare dal rilievo essere molto fedele a quanto poi effettivamente realizzato (fig. 11). Il disegno risulta altresì incompleto di alcuni elementi architettonici di dettaglio e, per altri aspetti, in contrasto con quanto effettivamente realizzato e rilevato. Lo spartito architettonico del nucleo centrale, che deriva dai prototipi di Bramante e di Vignola, è una vera e propria innovazione tipologica perché basata su una pianta

## Le linee curve per l'architettura e il design

Fig. 11/ Roma. Palazzo del Quirinale. Scala elicoidale di Mascarino. Sovrapposizione del rilievo sul disegno di Ottaviano Mascarino (ANSL, *Fondo Mascarino*, n. 2463r).



ovale e non più circolare con l'utilizzo di un sistema a colonne binate in ordine dorico. Lo spazio centrale è scandito da un ritmo di otto colonne binate e da altrettanti spazi vuoti, disposti planimetricamente in modo che quattro di questi ultimi siano centrati sui due assi dell'ovale.

Il diametro delle colonne che scandiscono il ritmo dell'ordine architettonico è di un palmo e mezzo, con le basi delle colonne binate tangenti nella proiezione dei rispettivi tori.

La posizione delle colonne binate lungo l'ovale è uno dei primi problemi geometrici di non immediata risoluzione che Mascarino ha dovuto affrontare nel momento in cui decide di utilizzare la pianta ovale. Se infatti la divisione della circonferenza in parti uguali è facilmente risolvibile utilizzando poligoni regolari inscritti o circoscritti, nel caso della policentrica chiusa non era nota in quel periodo storico al-

## La spirale cilindrica nelle scale rinascimentali e barocche

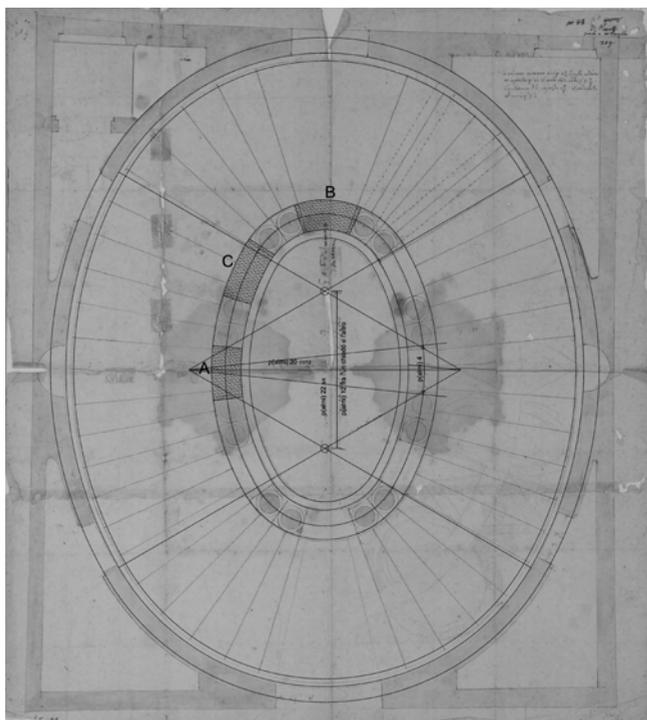


Fig. 12/ Roma. Palazzo del Quirinale. Scala elicoidale di Mascarino. Annotazioni grafiche sul disegno di Ottaviano Mascarino (ANSL, Fondo Mascarino, n. 2463r) con evidenziate le differenti dimensioni degli spazi vuoti tra blocchi di colonne binate.

cuna costruzione grafica esatta ma solo soluzioni approssimate.

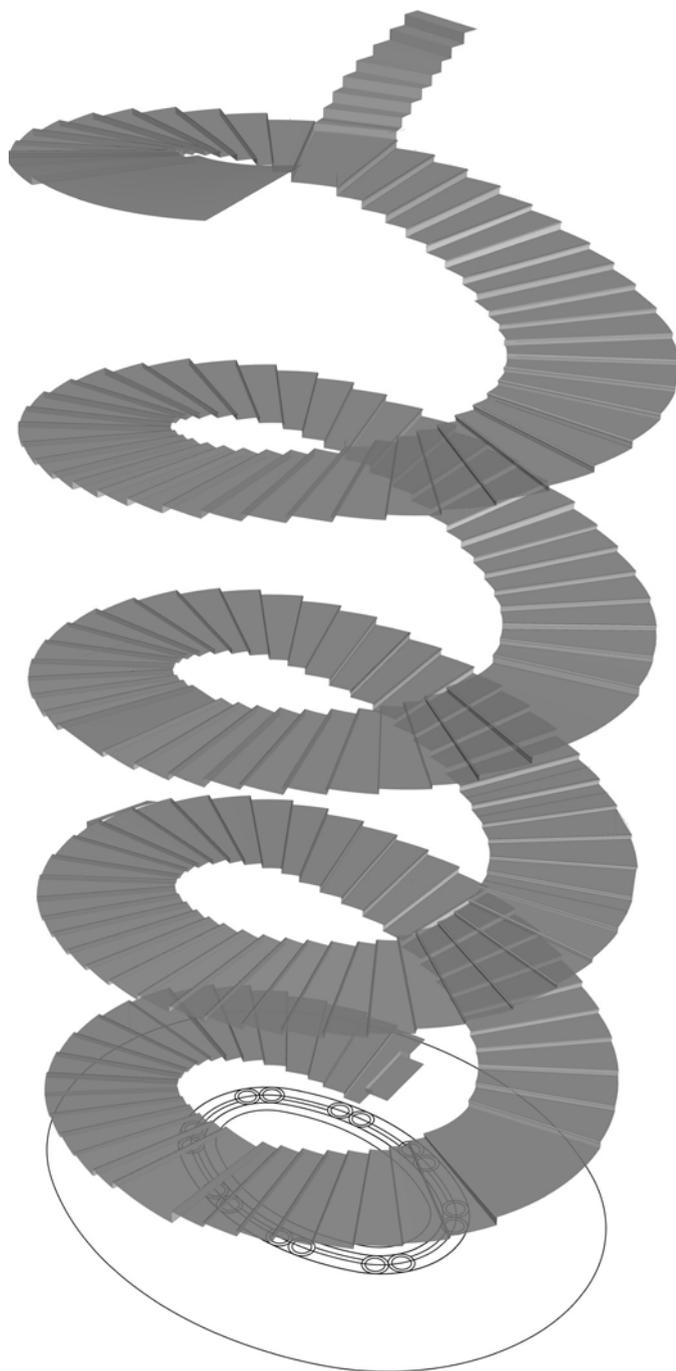
Osservando il disegno (fig. 12) si notano tre distinti tipi di spazi vuoti: i due simmetrici lungo l'asse minore (tipo A), corrispondenti alla curvatura di raggio maggiore, i due simmetrici lungo l'asse maggiore (tipo B), corrispondenti alla curvatura di raggio minore, e i quattro spazi intermedi (tipo C) sui quali insistono entrambe le curvature. Gli spazi tra le coppie di colonne nel disegno di Mascarino (così come poi verificato nel rilievo) sono diversi per ognuno dei tre tipi sopradescritti, in maniera anche significativa. Si può pertanto affermare che non c'è stata da parte del progettista la volontà di suddividere i pieni ed i vuoti in parti uguali, proponendo invece, volutamente, una soluzione che tenesse conto dei diversi aspetti percettivi dello spazio e della luce che un utente poteva avere percorrendo la scala.

<sup>9</sup> Cfr. Paris 2016.

<sup>10</sup> Cfr. Paris, Ricci 2014 e Ricci 2016.

## Le linee curve per l'architettura e il design

Fig. 13/ Roma. Palazzo del Quirinale. Scala elicoidale di Mascarino. Modello 3D dei gradini.



Tralasciando al momento molte altre considerazioni di dettaglio che si possono fare confrontando il disegno di progetto con la sua realizzazione<sup>9</sup>, si vuole rimarcare qui un punto fondamentale, e cioè quanto questo progetto sia il paradigma di un cambiamento culturale già pienamente maturo che porterà dopo qualche anno alla nascita del barocco. La geometria rigorosa del progetto di Vignola lascia spazio ad una idea di spazio che muta e si adatta al movimento percettivo dell'osservatore. Questa idea, che ritroviamo ancora ben evidente nello sviluppo tridimensionale dell'elicoide, deriva evidentemente anche dalla notevole capacità di Mascarino di essere, prima ancora che architetto, un raffinato prospettico in grado, quindi, di sapere controllare le variazioni percettive di uno spazio architettonico<sup>10</sup>.

Ritornando per un momento all'analisi planimetrica, un altro degli elementi caratteristici di una scala a pianta ovale è la conformazione dei gradini che non sono ortogonali alle tangenti della policentrica. Mascarino disegna una sequenza che, viste le risultanze del rilievo, sarà ampiamente disattesa in fase di realizzazione (fig. 13). La soluzione con due pianerottoli grandi lungo l'asse maggiore e due mini-pianerottoli lungo l'asse minore pone un problema geometrico-costruttivo nel momento in cui si vuole adottare una soluzione con una partitura architettonica centrale alla quale è associata una trabeazione che, per avvolgersi nello spazio in maniera continuativa, deve appoggiarsi ad una direttrice parallela all'andamento dei gradini. Questa partitura in una scala a pianta circolare senza pianerottoli corrisponde all'elica cilindrica; in una scala a pianta ovale, ricordiamo, ci sono quattro archi di circonferenza a due a due uguali e simmetrici, e con due distinti valori della curvatura. Per cui occorre prima di tutto riuscire a garantire la continuità della geodetica lungo uno spira, ma ancora più difficile è riuscire a dare

## Le linee curve per l'architettura e il design

Fig. 14/ Roma. Palazzo del Quirinale. Scala elicoidale di Mascarino. Individuazione delle due eliche.



continuità alla direttrice introducendo dei pianerottoli. Nella scala del Quirinale, a differenza del disegno di progetto, sono stati realizzati solo due veri e propri pianerottoli, in corrispondenza dei due accessi dalla loggia d'onore e dalla sala ad essa sottostante, con una soluzione di attacco particolare che, come è emerso dal rilievo, non altera l'andamento dell'elica. Ma è nel nastro elicoidale della trabeazione interna al nucleo che si manifesta tutta la genialità del progettista e l'innovazione formale che caratterizza quest'opera architettonica.

La trabeazione è composta da un architrave con due fronti, uno verso il pozzo centrale e l'altro in-

terno alla scala. Il fregio e la cornice della trabeazione sono presenti solo all'interno del vuoto centrale dando così forma a quel meraviglioso nastro elicoidale che è l'emblema stesso di questa scala. Analizzando le misure della trabeazione ci si è accorti di qualcosa che a prima vista difficilmente appare, la presenza cioè di un vero e proprio artificio prospettico che introduce un ulteriore grado di difficoltà formale e costruttiva che rende questa architettura un vero e proprio capolavoro.

Mentre l'architrave e la cornice mantengono un'altezza costante per tutto lo sviluppo della scala, la misura del fregio aumenta progressivamente e sensibilmente. Ciò comporta l'introduzione di una seconda elica con pendenza di poco superiore a quella utilizzata per impostare i gradini della scala. Viene introdotto un raffinatissimo gioco formale (con significative ripercussioni costruttive) pensato per contrastare lo schiacciamento prospettico di chi, percorrendo la scala, è inevitabilmente portato ad affacciarsi nel pozzo centrale e ad alzare lo sguardo verso la principale fonte di luce del lucernaio.

Per riuscire a comprendere la raffinatezza del gioco formale bisogna osservare attentamente la scala soprattutto da un punto di vista interno, stando cioè sui gradini (fig. 14). Si individua nettamente un'elica continua alla base del piedistallo sulla quale si appoggiano tutti i gradini; alzando lo sguardo si nota anche un'elica continua, sulla quale si appoggia l'architrave e che si ritrova parallelamente anche sul muro esterno.

L'elica in basso è collegata direttamente alla trabeazione interna al pozzo e conseguentemente all'elica dell'architrave. Avendo verificato che l'ordine interno alla scala, formato da architrave, colonna e piedistallo rimane costante per tutta la sua altezza, solo una attenta lettura dei dati rilevati ha consentito di comprendere la soluzione adottata da Masca-

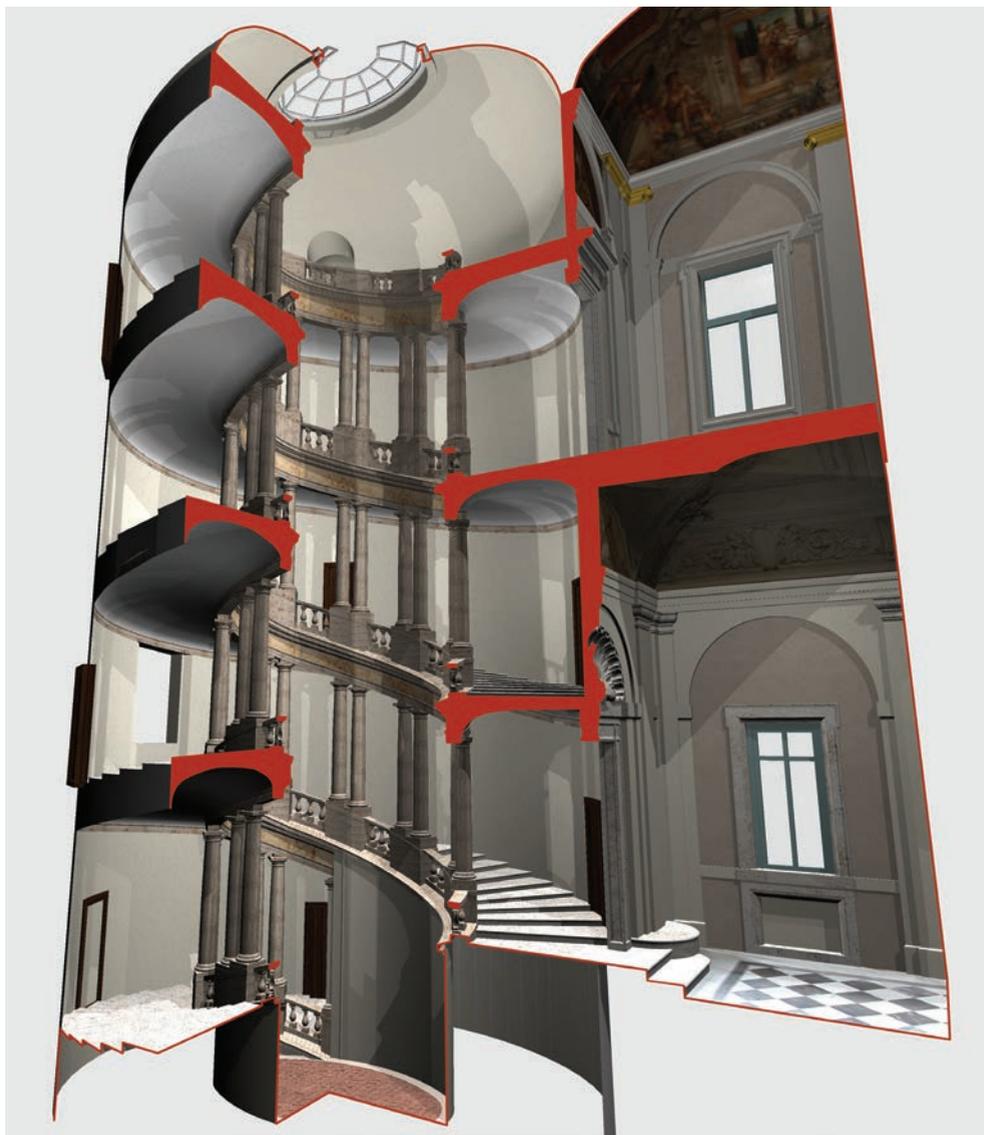


Fig. 15/ Roma. Palazzo del Quirinale. Scala elicoidale di Mascarino. Vista del modello 3D. Spaccato prospettico.

rino, cosicché i gradini seguono una pendenza e la volta elicoidale ne segue un'altra. Ciò comporta una variazione dello spessore murario tra la volta ed il piano di imposta dei gradini; variazione in nessun modo percepibile da chi, utilizzando la scala, rimane condizionato visivamente dalla costante regolarità dell'ordine architettonico (fig. 15).

Senza alcun timore reverenziale nei confronti del suo maestro, Ottaviano Mascarino realizza un'opera che ha indubbiamente influenzato gli artisti a venire forse più di quanto gli storici hanno lasciato fin qui intendere. Se la scala di Palazzo Barberini, attribuita al genio di Borromini, è uno dei simboli del barocco romano, si può affermare che la scala di Mascarino, costruita appena cinquant'anni prima, contiene in sé già tutti gli elementi di innovazione formale e forse anche qualcosa in più.

A Palazzo Barberini Borromini interviene sicuramente nella fase di progettazione di trasformazione del Palazzo con una variante al progetto iniziale di Carlo Maderno, proponendo una scala elicoidale con una nuova conformazione della pianta ovale, mantenendo sempre il nucleo centrale con colonne. L'idea, sintetizzata nel disegno preparatorio elaborato da Borromini sotto la direzione di Maderno (Alb. Az. Rom 957) deriva indubbiamente dalla scala ovale realizzata da Mascarino.

Borromini aveva lavorato pochi anni prima, sempre sotto la direzione di Maderno, nel palazzo del Quirinale, e in quel cantiere aveva avuto la possibilità di studiare attentamente quella la scala ovale. Alla morte di Carlo Maderno nel cantiere del costruendo Palazzo Barberini subentra Bernini, con il quale Borromini avvierà una collaborazione destinata però a concludersi poco dopo. La scala verrà costruita nel 1633 quando ormai Borromini aveva già abbandonato il cantiere.

Al di là delle considerazioni di carattere storico che riguardano la figura di Borromini e più in generale l'evoluzione della nuova concezione dello spazio, caratteristica del periodo barocco – in particolare romano – ci interessa mettere in evidenza quegli aspetti legati alla particolarità geometrico-costruttiva della scala elicoidale a pianta ovale, nel rapporto tra idea progettuale sintetizzata negli elaborati di

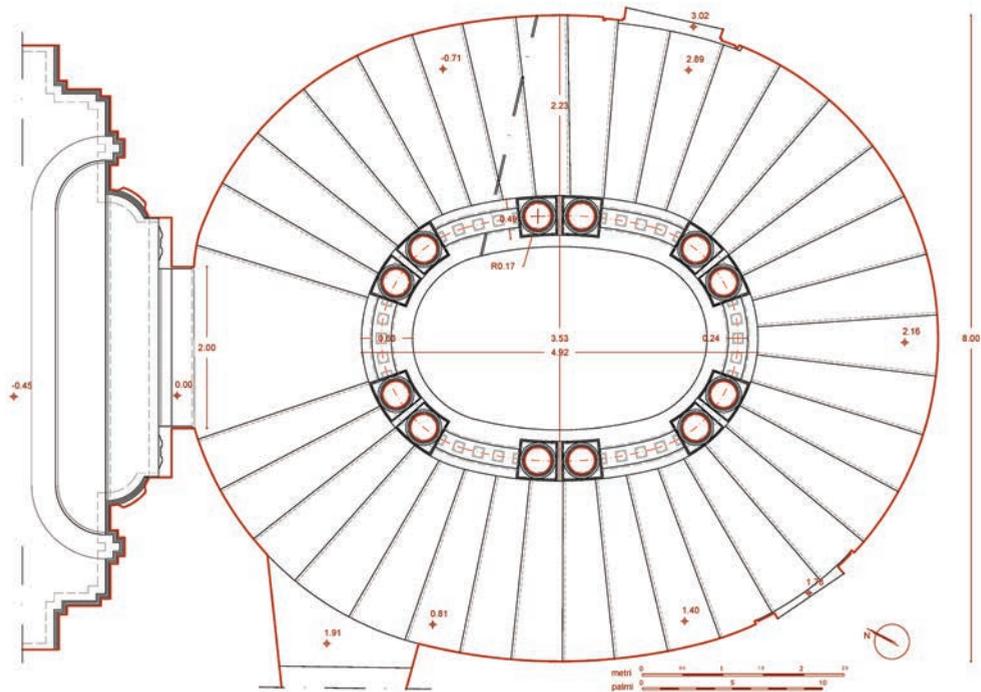


Fig. 16/ Roma. Palazzo Barberini. Scala elicoidale attribuita a Borromini. Pianta. Rilievo di Leonardo Paris.

progetto e costruzione reale, sulla base dei dati ottenuti da una campagna di rilievo digitale.

Se Mascherino nella scala ovale del Quirinale sceglie una soluzione classica basata sull'ovale equilatero in cui, cioè, i quattro centri formano un rombo dato dalla somma di due triangoli equilateri, Borromini opta per una soluzione meno vincolante, riferibile alla prima costruzione di Serlio (fig. 16).

L'altro elemento rilevante del progetto è quello dell'ordine architettonico dato dalla sequenza di coppie di colonne, per le quali l'importanza strutturale passa decisamente in secondo piano rispetto al loro valore plastico di conformazione dello spazio, di esaltazione del valore simbolico dell'elica, di controllo e diffusione della luce, tema quest'ultimo particolarmente caro a Borromini (fig. 17).

In questo caso entrano in gioco diverse scelte me-



Fig. 17/ Roma. Palazzo Barberini. Scala elicoidale attribuita a Borromini. Modello 3D parametrico (di Mario Graziano Valenti).

triche e proporzionali, alcune delle quali condizionate dalla scelta di base della pianta ovale. Riferendoci per il momento solo all'impianto planimetrico, le scelte principali riguardano il diametro della colonna, la distanza tra gli assi delle colonne binate, la suddivisione in sei parti dell'ovale.

Per quanto riguarda il diametro della colonna, qui Borromini ripropone l'esatta misura delle colonne della scala ovale di Palazzo del Quirinale, pari ad un palmo e mezzo. Adotta sempre una soluzione legata al modulo per quanto riguarda lo sviluppo dell'ordine sia nel capitello che nella base della colonna. A

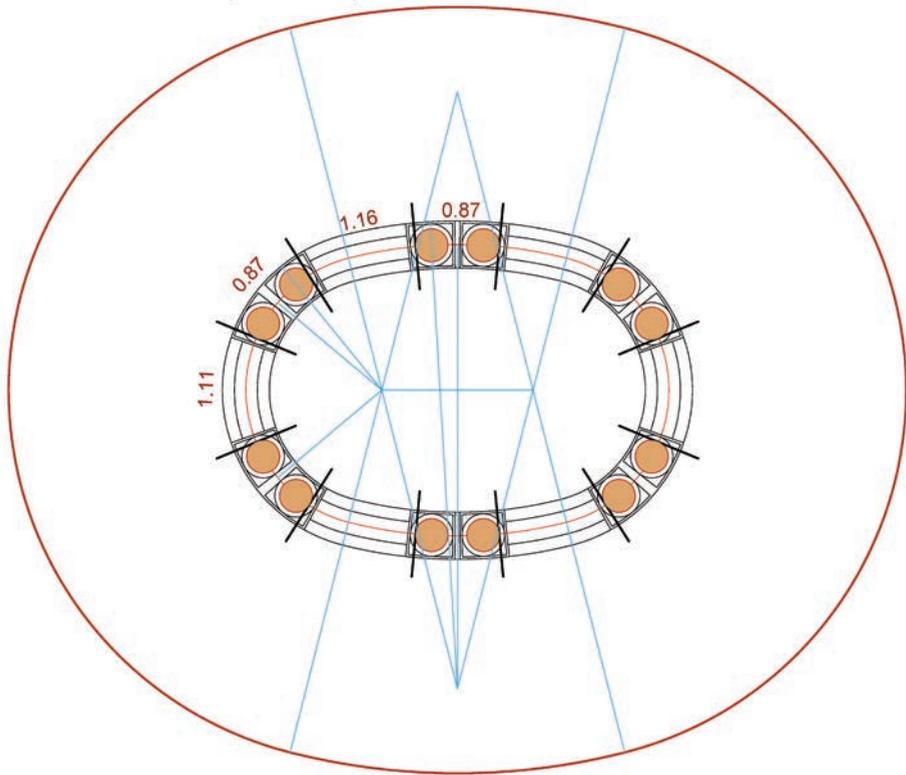


Fig. 18/ Roma. Palazzo Barberini. Scala elicoidale attribuita a Borromini. Analisi della partizione planimetrica tra spazi vuoti e blocchi di colonne binate.

Borromini lo spazio tra le due colonne binate proposto da Mascherino deve essere sembrato troppo stretto; un filtro troppo forte per l'esigua luce proveniente dal lucernario superiore e dalle tre finestre in posizione molto laterale rispetto alla pianta e che prospettano sulla facciata principale ma in una posizione d'angolo in prossimità dell'avancorpo destro dell'edificio che ne limita molto l'esposizione solare in tutto l'arco della giornata. Borromini quindi prospetta una soluzione aumentando lo spazio tra le due colonne binate in modo tale che i plinti delle colonne, anziché essere accoppiati come accade al Quirinale, sono separati da uno spazio vuoto.

La scala di Palazzo Barberini è più piccola di quella del Quirinale, con un asse maggiore sensibilmente più corto ed un asse minore di poco inferiore. La

conseguente restrizione dello spazio nel nucleo centrale ha indotto Borromini a progettare una soluzione di suddivisione dello spazio basata su sei coppie binate di colonne, anziché otto come aveva fatto Mascherino. Questo comporta una distribuzione dei pieni e dei vuoti molto differente. Nella soluzione a otto colonne gli assi dell'ovale attraversano entrambi lo spazio vuoto; nella soluzione a sei l'asse maggiore è sulla visuale libera, mentre l'asse minore è contrassegnato dal pieno delle colonne binate. C'è anche un problema di suddivisione in un ritmo prefissato di parti dell'ovale. Se ci si riferisce ad una pianta circolare come in Bramante o Vignola, il problema geometrico è riconducibile, come detto, alla suddivisione in parti uguali della circonferenza. Trasponendo il problema all'ovale si tratterebbe di suddividere in sei parti uguali la policentrica. Analizzando i dati del rilievo si nota che le differenze sono molto meno evidenti di quelle rilevate nella scala di Mascarino. Gli spazi tra le colonne presentano inevitabilmente delle differenze legate alla diversità della curvatura (fig. 18). Due sono corrispondenti all'asse maggiore dell'ovale, quattro sono quelli laterali. Misurando la lunghezza degli archi di circonferenza che definiscono i pieni ed i vuoti si registra una differenza tra gli spazi di circa 5 cm. Diversamente da quanto osservato per la scala al Quirinale, a palazzo Barberini occorre valutare meglio se la differenza dipenda da una precisa volontà progettuale o se, più plausibilmente, la differenza sia dovuta a soluzioni approssimate di suddivisione in parti uguali della figura geometrica di base.

### **In conclusione**

Non deve essere stato facile per questi nostri architetti riuscire a tradurre la suggestione di una linea infinita, qual è l'elica, nella finitezza di un nuovo linguaggio architettonico fondato sul rigore geometri-

co e sul recupero dei canoni classici di ritmo e proporzione. Bramante ha il merito di aver pensato ad una soluzione mai sperimentata prima di allora, dando valore architettonico ad un collegamento verticale tra il lato sud del vecchio Palazzo Vaticano e la villa Belvedere di Innocenzo VIII e al contempo utilizzando l'elica anche come elemento simbolico di ascesa verso lo spazio dell'arte e della bellezza che Giulio II aveva in animo di allestire negli spazi superiori del Belvedere. Riuscire ad interrompere l'infinità di questa linea ha rappresentato per tutti una sfida nella sfida. Forse Bramante aveva pensato una soluzione terminale diversa considerando che l'opera è stata interrotta e ripresa dopo la sua morte. Vignola è forse l'unico che è riuscito a progettare una "lumaca" che ha un "inizio ed una fine". Mascarino, una volta garantita la funzione di collegamento tra la loggia d'onore e l'ambiente sovrastante lascia scorrere la sua doppia elica facendo in modo che sia la stessa trabeazione (che nella parte terminale gira seguendo la retta perpendicolare alla tangente dell'elica) ad esaltarne la chiusura. Soluzione ripresa con qualche modifica anche a Palazzo Barberini ma con un elemento murario sovrastante di raccordo con il sottotetto che ne appesantisce la parte terminale.

L'aspetto sicuramente più interessante che emerge da questa storia, che ha come *fil rouge* la medesima idea geometrica di sviluppo di una linea curva, è come i diversi progettisti siano riusciti a declinare in maniera del tutto originale un tema così complesso, e come, proprio grazie al ruolo della geometria, siano stati in grado di controllarne tutte le sue fasi, dalla ideazione alla realizzazione.

# Lo spazio della linea. Il tiburio di Sant'Andrea delle Fratte

di Giovanna Spadafora

*"La forma non è che una veduta dello spirito, una speculazione sull'estensione ridotta all'intelligibilità geometrica, fino a che non vive nella materia"*  
Focillon 1987, p. 51

La linea che nei disegni di Francesco Borromini modella il profilo delle facciate, disegna le piante, articola le modanature, è una linea mista che si dispiega all'interno di una intelaiatura geometrica molto precisa. Gestii iniziali rapidi e sicuri tratteggiano per tentativi le intuizioni formali. I successivi disegni a riga e compasso ricercano logica e regole per assicurarne la realizzabilità: il progetto seleziona i prodotti dell'intuizione attraverso un crivello geometrico. Ma le singole parti sono graficamente legate tra loro in una concatenazione di forme<sup>1</sup> che ha anche una sua *ratio* costruttiva. Questo legame pone la geometria al centro del progetto di architettura<sup>2</sup>: ordina e distribuisce i pesi delle strutture mentre modella lo spazio.

**1** Paolo Portoghesi scrive, a proposito della concatenazione tra gli elementi, che Borromini ha ereditato da Serlio "il metodo casistico con cui viene continuamente mutata nello stesso disegno la forma degli ambienti minori, la disponibilità a seguire la logica delle composizioni geometriche [...] anche se al metodo serliano del montaggio e della giustapposizione spesso dissonante di elementi diversi sarà sostituita la ricerca della concatenazione delle forme e della sensibilizzazione l'uno all'altro degli elementi contigui". Portoghesi 2014, p. 359.

**2** Dal confronto tra i rilevamenti delle opere costruite e i disegni di progetto, emerge molto chiaramente l'uso di una geometria che Federico Bellini definisce "operativa". Cfr. in proposito Bellini 2004, Canciani 2016.



Fig. 1/ Il tiburio di Sant'Andrea delle Fratte e il campanile (foto Spadafora).

Occorre tuttavia distinguere, tra i numerosi disegni, quelli che sono effettivamente funzionali al progetto da quelli che Borromini realizza in un secondo momento, probabilmente per la pubblicazione dell'*Opus architectonicum*, e nei quali le figure geometriche che vi compaiono hanno lo scopo di sottolineare soprattutto i rimandi simbolici<sup>3</sup>. In queste righe ci occuperemo dei primi, cercando di mettere in evidenza come una sequenza di linee riesca a determinare una geometria complessa, prima bidimensionale e poi tridimensionale, attraverso la quale si modella il pieno e il vuoto, la massa portante e le cavità che alleggeriscono i pesi delle strutture.

Possiamo, dunque, guardare ai disegni di Borromini considerando la linea curva sotto vari aspetti, spesso compresenti: la linea che si appoggia a una intelaiatura geometrica; le linee che si sovrappongono con andamenti diversi, a volte opposti, e che modellano lo spazio in altezza definendo le superfici; la linea come limite, profilo che dà luogo a forme per estrusione o rotazione; la linea che diventa indifferente

<sup>3</sup> Cfr. in proposito Connors 1998 e Portoghesi 2015, pp.55-58.

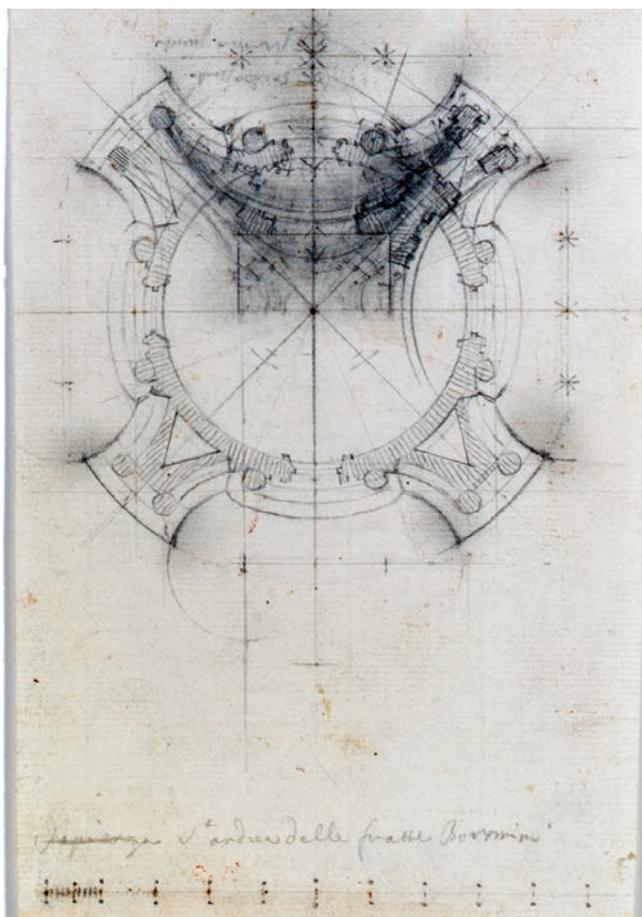


Fig. 2/ Francesco Borromini, la pianta del tiburio di Sant'Andrea delle Fratte (disegno AzRom 108 - Museo Albertina, Vienna).

alle dimensioni fisiche quando disegna, con lo stesso, complesso andamento, il dettaglio e l'insieme, legando il piccolo al grande in una medesima intuizione creativa.

### **Il tiburio di Sant'Andrea delle Fratte: le curve disegnate**

Il disegno AzRom 108 (fig. 2), pianta del tiburio di Sant'Andrea delle Fratte<sup>4</sup> (fig. 1), è emblematico del rapporto tra intelaiatura geometrica e scaturigine della linea curva.

La pianta, tralasciando il disegno parziale ad essa sovrapposto, riferibile ad una lanterna prevista e non

**4** L'arrivo di Borromini nel cantiere di Sant'Andrea delle Fratte è datato a partire dal 1653. Cfr. Zanchettin 1997. Su una chiesa il cui impianto planimetrico era stato già avviato nel 1595 da Gaspare Guerra, Borromini concentra il suo ingegno creativo sulla costruzione della cupola, che diventa occasione per realizzare un elemento architettonico fortemente simbolico e celebrativo della committenza Del Bufalo. Dal punto di vista formale il tiburio di Sant'Andrea delle Fratte, la cui costruzione termina presumibilmente intorno al 1665, rimanda ai mausolei campani, in particolare al mausoleo detto "la Conocchia", ma che trae altresì decisi spunti costruttivi dai tempietti disegnati da Giovanni Battista Montano. Sulla storia della costruzione della chiesa si si rimanda ai testi di Zanchettin 1997 e 2000 e Bellini 2006, che affrontano per esteso tutti gli aspetti storici, costruttivi e geometrici attraverso l'analisi dei disegni relativi al tiburio AzRom 108 e AzRom 106, e ai quali si rimanda anche per l'ampia bibliografia sull'argomento.

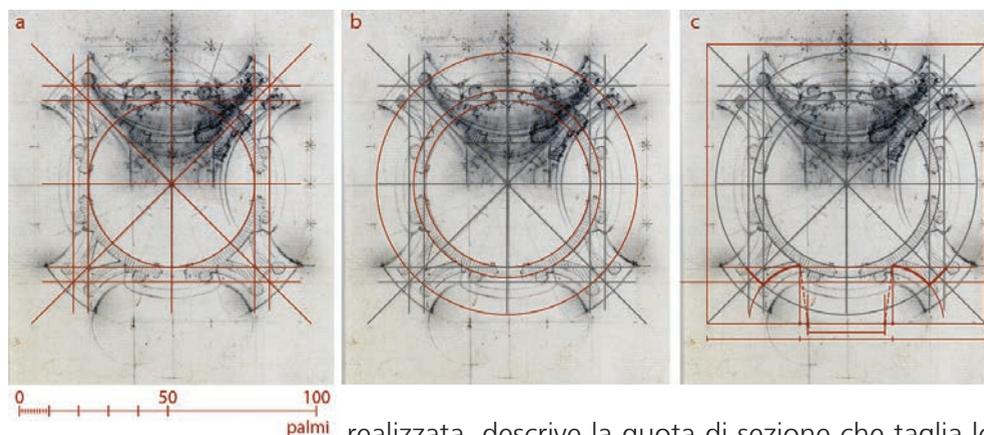


Fig. 3/ (a-f) Costruzioni geometriche sovrapposte al disegno del tiburio AzRom 108.

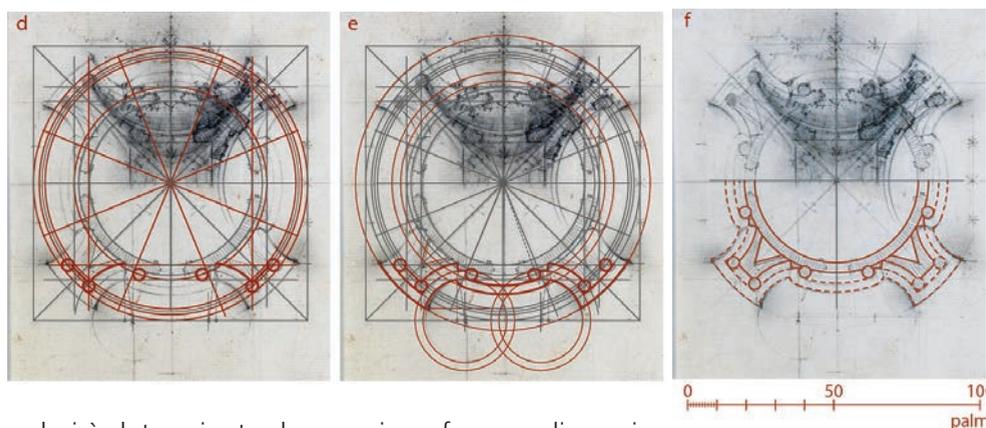
**5** Si è proceduto rilucidando, all'interno di un software vettoriale, le costruzioni geometriche presenti sul disegno, valutando le piccole differenze presenti in esso, ad esempio nella determinazione delle parti simmetriche, cercando di individuare i principi generali che hanno guidato la definizione della intelaiatura grafica complessiva.

**6** Tale spessore corrisponde a  $1/16$  del diametro interno del tiburio, valore piuttosto piccolo se riferito ai rapporti proporzionali più usati all'epoca nella costruzione delle cupole. Cfr. Villani 2008. Tuttavia, occorre considerare che la cupola è rinserrata dai quattro speroni angolari la cui profondità, di 12,5 palmi misurata sulla diagonale, aumenta la sezione resistente del tiburio.

**7** Osservando il disegno, si nota che non tutti e quattro i segmenti sono effettivamente alla distanza di 19 palmi dal quadrato centrale, anzi su ciascun lato della pianta si intravedono almeno due linee parallele tra loro. In particolare, considerando la scala dei palmi

realizzata, descrive la quota di sezione che taglia le quattro finestre, evidenziandola con un tratteggio inclinato, ma rappresenta con un segno continuo anche la proiezione della cornice sopra le colonne e quella più esterna di coronamento. L'indicazione della scala in palmi, presente sul bordo inferiore del foglio, aiuta nell'analisi dei tracciati geometrici e nella comprensione dei rapporti dimensionali tra le parti, i quali vanno naturalmente valutati considerando il grado di approssimazione grafica del disegno, la sua riproduzione e la sua messa in scala<sup>5</sup>. Il tiburio prende forma nel disegno, attraverso una sequenza di linee appartenenti a piani orizzontali sovrapposti, all'interno di una costruzione geometrica pensata nello spazio, ma che le governa tutte su di un unico piano. Borromini traccia, quindi, una pianta sinottica, costruendo nelle due dimensioni un ragionamento tridimensionale.

Le costruzioni geometriche individuabili sul disegno AzRom 108, all'interno delle quali si delinea la pianta del tiburio, indicano (fig. 3a) il tracciamento della circonferenza relativa al vano della cupola, di raggio pari a 28 palmi, la costruzione di un quadrato tangente esternamente ad essa e di un ulteriore quadrato esterno ad esso, posto a una distanza di 5 palmi. Lo spessore murario del tiburio è disegnato pari a 3,5 palmi<sup>6</sup>, mentre la profondità degli speroni an-



golari è determinata da una circonferenza di raggio pari a 44 palmi (fig. 3b).

Per la costruzione delle ali concave, Borromini disegna quattro segmenti lungo il perimetro della pianta a una distanza di 19 palmi<sup>7</sup> dalla circonferenza interna del tiburio (fig. 3c).

Su questi individua i centri delle concavità distanziati tra loro di 26 palmi e costruisce due archi di circonferenza di raggio pari a palmi 19,85. L'innesto tra le due curve concave sulla curva convessa del tiburio<sup>8</sup> è risolto con l'introduzione di due semiparaste, utili alla costruzione delle zaine<sup>9</sup> all'interno delle quali verranno collocate le due colonne che affiancano il finestrone. Le colonne centrali che inquadrano le aperture sono tangenti ai raggi che ripartiscono la circonferenza del tiburio in ottavi. Per determinare la loro posizione, Borromini traccia un'ulteriore circonferenza inscritta nel quadrato maggiore e su questa traccia i centri delle colonne del diametro di 4 palmi<sup>10</sup>. Per collocare, invece, le colonne sugli speroni Borromini costruisce una circonferenza tangente ai segmenti che contengono i centri delle ali concave e una ulteriore circonferenza distante da questa 4 palmi corrispondenti ai diametri delle colonne i cui centri sono collocati sul prolungamento dei due quadrati descritti nella figura 3a (fig. 3d).

Borromini disegna, quindi, la proiezione della corni-

posta in basso, nella porzione inferiore della pianta le due linee risultano rispettivamente alla distanza di 17 e 18 palmi. Questo conferma l'ipotesi che il disegno sia un elaborato di progetto e che Borromini si avvicini alla configurazione finale per approssimazioni successive, evidenti anche dalle leggere variazioni nella disposizione degli elementi architettonici riscontrabili tra i quattro lati della pianta. Si è scelto di considerare la misura di 19 palmi, leggibile sui lati alto e destro del disegno, perché essa – come si vede nella fig. 3d – ricuce geometricamente al resto del disegno anche la posizione delle colonne sugli speroni.

**8** I due punti di innesto delle curve concave sulla curva convessa corrispondono a un terzo del lato del quadrato, disegnato a partire dalle linee che Borromini traccia a 19 palmi di distanza dalla circonferenza interna del tiburio. Di fatto questo ulteriore quadrato non è visibile nel disegno AzRom 108, tuttavia tale corrispondenza geometrica sembra essere precisa.

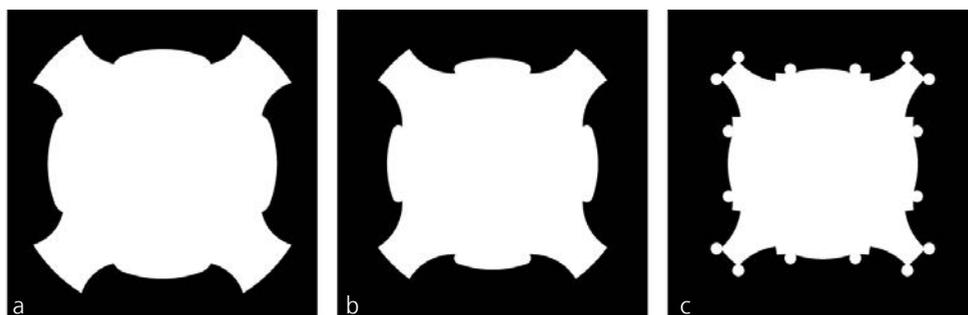


Fig. 4/ (a-c) Lo spazio esterno modellato dalle tre curve principali individuate sul disegno AzRom 108.

**9** «In Sant'Andrea [...] le colonne sono inalveolate da una semiparasta verso l'ala concava e da un semplice risalto di muratura sul centro. Il termine «zaina» deriva da «zana», attestato sin dal XVI secolo a Siena dove significa "culla", Bellini 2004, p. 293 nota 86).

**10** Nel disegno, Borromini schiaccia la forma delle colonne per far sì che esse risultino anche tangenti al quadrato più esterno, forzando, come già evidenziato, la forma circolare dei fusti all'interno della maglia geometrica; a questo proposito cfr. Bellini 2004, p. 272. Di contro, le due colonne disegnate nella parte superiore del foglio, sul quale Borromini ritorna per disegnare anche la lanterna, hanno una forma circolare, che corrisponde di fatto a quanto realizzato. È come se Borromini, nel sovrapporre alla pianta del tiburio quella della lanterna sia andato oltre la rigidità dello schema geometrico iniziale, lavorando sugli elementi architettonici e sulle nuove relazioni costruttive e formali che la lanterna avrebbe introdotto tra essi.

ce e della trabeazione, il cui aggetto, sugli speroni angolari è delimitato da una circonferenza di 50,5 palmi di raggio.

La linea curva riferita alla proiezione della cornice inverte il suo andamento in prossimità delle colonne centrali per disegnare una curva concava, molto tesa, costruita su una circonferenza di raggio pari a 35 palmi. La trabeazione ne riprende il profilo aggettando di 3 palmi (fig. 3e).

Gli speroni angolari risultano svuotati internamente da un vano a base triangolare<sup>11</sup> equilatera che ha il vertice negli angoli del primo quadrato che circoscrive la circonferenza del tiburio (fig. 3f).

Le curve che si determinano dalla costruzione geometrica descritta, riferita al disegno AzRom 108, a meno dei risalti che in questa elaborazione grafica sono stati omessi, sono, quindi, tre (fig. 4 a, b, c):

a) alla quota delle finestre, il profilo esterno della muratura è mistilineo: due curve concave si raccordano a una curva convessa centrale mediante esili paraste. In particolare, l'andamento convesso della curva centrale in cui è ritagliata la finestra è interrotto dalle colonne semialveolate che la fiancheggiano e che si distaccano dalla muratura e dalle paraste con profonde linee d'ombra, mentre il cambio di curvatura sulla testata dello sperone è enfatizzato dalla presenza delle colonne in angolo. A questo livello di sezione orizzontale, ogni cambio di curvatura è occasione per introdurre un elemento architet-

tonico che frammenta la continuità tra le superfici e rende difficile rileggerne con immediatezza la configurazione geometrica di partenza;

b) la cornice di coronamento, invece, è una sequenza continua di concavo, convesso, concavo, nella quale la parte convessa che sormonta la finestra è una policentrica in cui l'arco di circonferenza centrale si ripiega alle estremità sulle curve concave che la fiancheggiano formando due cuspidi.

c) la trabeazione, in sommità, descrive una sequenza di curve più ampia e più fluida.

Non compare invece, in questo disegno, il basamento che ha, sui quattro lati, compreso tra gli speroni angolari, un andamento concavo-convesso continuo, sul tipo di quello che modella la parte inferiore della facciata del San Carlino.

Il disegno AzRom 108, nelle lievi differenze riscontrabili nel modo in cui gli elementi sono stati disegnati, testimonia un uso della geometria intesa non come strumento vincolante quanto piuttosto di guida generale, sulla quale prevale la coerenza della composizione architettonica. I tratti di grafite rivelano il continuo lavoro alla ricerca del miglior rapporto tra le pareti concave degli speroni e le colonne del corpo centrale, ma definiscono una fase di progetto per certi versi ancora concettuale, che lascia margini per ulteriori definizioni di dettaglio da meglio specificare in corso d'opera e che trova quindi nella costruzione la sua compiutezza.

### **Il tiburio di Sant'Andrea delle Fratte: le curve realizzate**

Le linee che modellano la superficie esterna del tiburio si spezzano e si piegano, e quando prendono corpo nella materia, non sono mai visibili per intero da un solo punto di vista, a meno della curva sinusoidale del basamento. Nel tiburio si concentra quell'attitudine alla «flessione della forma» di cui

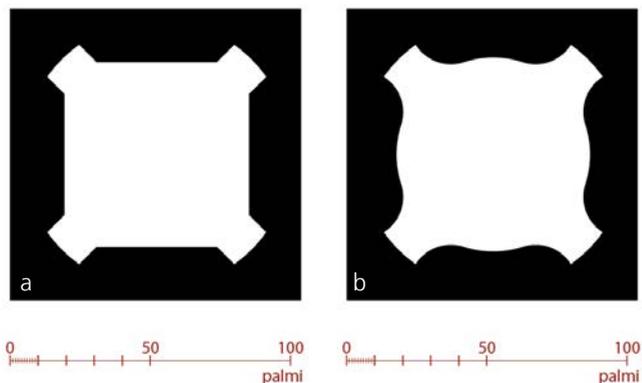


Fig. 5/ L'interno della cupola di Sant'Andrea delle Fratte.

**11** A proposito della funzione di alleggerimento della struttura, assolta dai vuoti triangolari, rispetto ai sottostanti pennacchi, cfr. Bellini 2004, p. 266.

## Le linee curve per l'architettura e il design

Fig. 6/ (a, b) Lo spazio esterno del tiburio modellato dal dado rettilineo e dal basamento curvilineo, ottenuti dal rilievo.



**12** «Si noti bene: interno dell'esterno, come dimensione propria dell'esterno architettonico, che solo in rari casi coincide con l'interno vero e proprio. Questa coincidenza non è appunto necessaria alla struttura spaziale dell'esterno», Brandi 1974, p. 67.

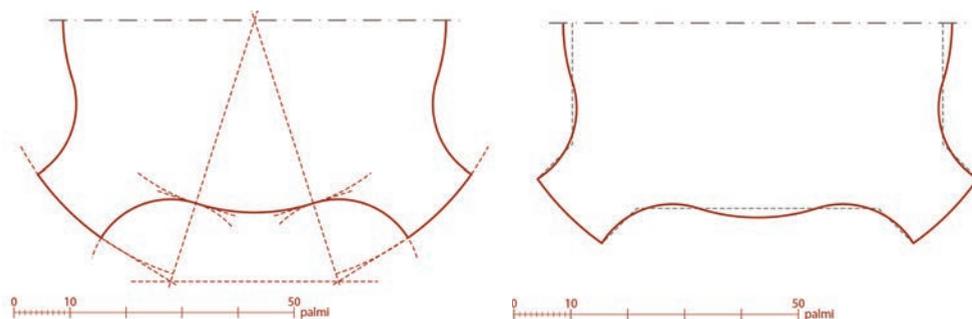
**13** Borromini usa una calotta a tutto sesto solo nella chiesa di Sant'Andrea delle Fratte. La contrapposizione tra lo spazio esterno e lo spazio interno è netta, ma di fatto essa risponde contemporaneamente anche alle due differenti esigenze di rispettare, da una parte, la sobrietà dell'organismo architettonico interno, nato come chiesa parrocchiale, e dall'altra di costruire un elemento architettonico con una forte valenza visiva anche alla scala urbana. Cfr. Bellini 2004, Zanchettin 1997. Sul rapporto tra lo spazio esterno e lo spazio interno nell'opera di Borromini cfr. anche Brandi 1974.

**14** Ciò è evidente soprattutto nei due lati del tiburio che sormontano il breve transetto.

parla Cesare Brandi il quale, nel descrivere la struttura spaziale delle architetture borrominiane, parla di un esterno pensato come un interno<sup>12</sup>.

Il tiburio risulta quasi intagliato nella massa muraria solida, e nella sua articolazione volumetrica cela la configurazione dello spazio interno. Qui, la linea sul piano orizzontale che disegna lo spessore murario del tiburio è una circonferenza che in alzato costruisce uno spazio cilindrico uniforme, appena mosso da coppie di paraste in lieve risalto che intervallano le aperture, sul quale Borromini impianta una calotta a tutto sesto<sup>13</sup> (fig. 5).

L'esecuzione di un rilievo mediante laser scanner 3D dell'esterno del tiburio ha permesso di disegnare la curva sinusoidale del basamento (fig. 6 a, b), assente nel disegno AzRom 108, e di verificare la relazione tra questa e la linea spezzata del dado, impostato sui piloni della crociera. I tratti rettilinei del corpo centrale piegano con un angolo di 45° in corrispondenza degli speroni angolari, chiudendone i brevi fronti con una curva molto tesa. La linea curva del basamento arretra rispetto al dado di imposta e sporge, in maniera più pronunciata nelle parti centrali<sup>14</sup> (figg. 7, 8), sostenuta da alcuni filari di mattoni in progressivo aggetto (fig. 1). Il ridisegno delle curve costruite (fig. 9) ha evidenziato una sostanziale corrispondenza con quelle disegnate in AzRom 108,



e una variazione nella dimensione dell'ingombro relativo alla cornice superiore del tiburio, che risulta di circa un palmo più piccola lungo tutto il perimetro.

### Figure non-dimensionali nei disegni di Borromini

La pianta del tiburio di Sant'Andrea delle Fratte è stata assimilata a quella di un capitello corinzio<sup>15</sup>, ma dal punto di vista strettamente geometrico, essa presenta alcune analogie anche con gli studi per una fontana che avrebbe dovuto essere collocata davanti all'Oratorio di San Filippo Neri (AzRom 336, fig. 10): un profilo in cui si alternano curve concave e convesse, in una matrice geometrica che divide la circonferenza di base, diversamente da quanto avviene in Sant'Andrea delle Fratte, in angoli di 30° e 60°. In effetti, al di là di un possibile richiamo di tipo geometrico e non costruttivo con gli esempi riportati, quello che emerge nell'opera di Borromini è una continuità figurativa che lega le parti costitutive del tutto agli elementi di dettaglio. Egli, infatti, attribuisce alla linea, entità geometrica per definizione unidimensionale, lo stesso valore formale, sia che essa ritagli lo spazio minuto di una sequenza di modanature, sia che modelli l'interno o l'esterno di un vaso architettonico<sup>16</sup>. Una unità linguistica che lega il piccolo al grande attraverso l'uso di profili mistili-

Fig. 7/ Il basamento sinusoidale del tiburio rilevato. Costruzioni geometriche.

Fig. 8/ La relazione tra la curva sinusoidale del basamento e il dado rettilineo su cui si imposta.

<sup>15</sup> Su questo cfr. in particolare Raspe 2000, p. 83.

<sup>16</sup> Ho avuto modo di approfondire il tema del rapporto tra il dettaglio architettonico e l'intera opera in Spadafora 2015 e 2016.

## Le linee curve per l'architettura e il design

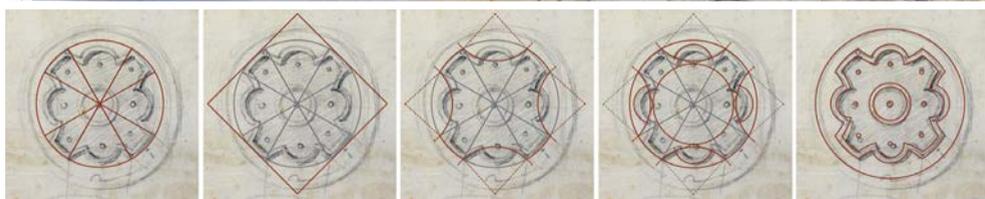
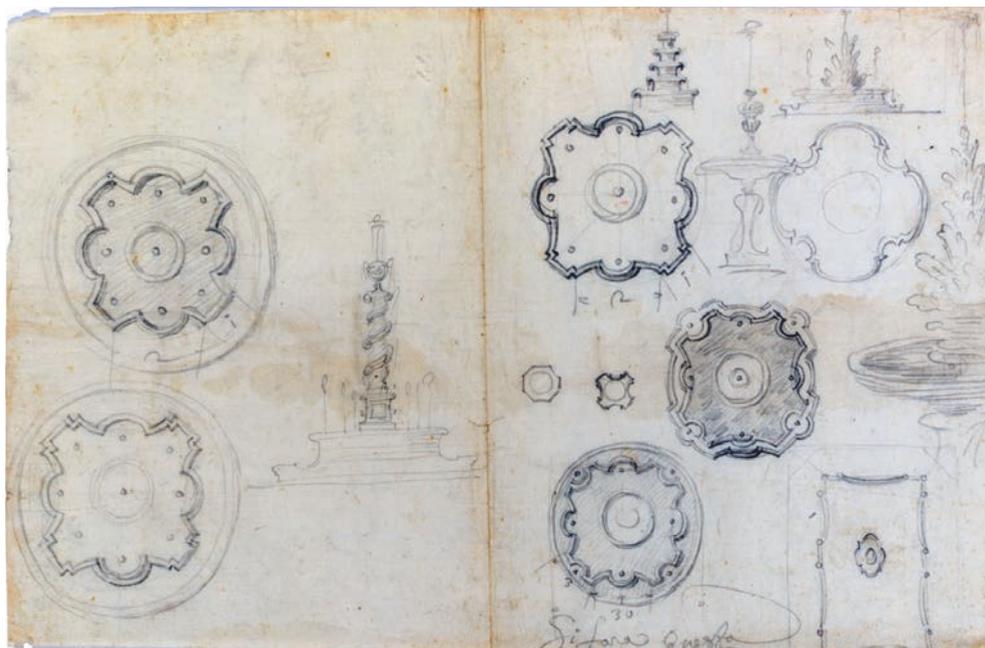
Fig. 9/ Il modello della nuvola di punti e le sezioni estrapolate sul tiburio.



nei, nei quali le curve a volte esasperano il loro andamento, stirandosi, allungandosi e cambiando improvvisamente direzione.

D'altronde, l'uso stesso delle proiezioni ortogonali come metodo di rappresentazione prevalente nei suoi schizzi progettuali conferma l'attitudine a pensare alla forma tridimensionale in prima istanza come il risultato della sovrapposizione di sezioni orizzontali. Un *modus operandi* che accentua il ruolo della linea curva come generatrice delle figure architettoniche.

All'interno della vasta produzione di disegni autografi, sia negli schizzi di progetto che nei disegni prodotti per l'*Opus Architectonicum*, il ruolo delle costruzioni geometriche nella genesi della forma si rivela con maggiore evidenza nelle piante delle chiese e in quelle degli altari. Dei dettagli architettonici si hanno, invece, in prevalenza rapidi disegni a mano libera, che tratteggiano i profili con gesti rapidi ed espressivi. Ma in tutti i casi la linea curva si articola in sequenze a volte ininterrotte, a volte agganciate in una cuspide, con variazioni in profondità che neces-



sitano di un coinvolgimento del corpo per poter essere pienamente comprese: dello sguardo e del movimento del corpo nelle architetture, della mano che tocca e segue le pieghe nei dettagli più minuti (figg. 11, 12). Solo nello spazio concreto e nell'esperienza piena della percezione corporea trovano senso le sequenze di curve che in disegno possono apparire ridondanti, a tratti paradossali. Una conseguenza di tale maniera di procedere è che il disegno della forma, per certi versi, non è vincolato dalla materia con cui essa sarà realizzata. Se è vero che la plasticità delle curve è governata da una rigorosa intelaiatura geometrica, e che questa negli edifici corrisponda anche ai ragionamenti statico-costruttivi che presie-

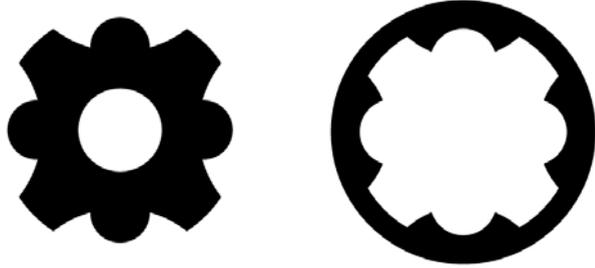
Fig. 10/ Francesco Borromini, disegni di fontane (AzRom 336 - Museo Albertina, Vienna).

Fig. 11/ Analisi geometrico-grafica del disegno in alto a sinistra contenuto nel foglio AzRom 336.

## Le linee curve per l'architettura e il design

Fig. 12/ Lo spazio interno della fontana (disegno AzRom 336) e quello esterno, delimitato dalla vasca circolare che la racchiude.

**17** A questo proposito Sedlmayr scrive: «Nella particolare concezione non-cosale di Borromini c'è la possibilità tuttavia di separare, fino a un certo grado, le immagini dall'oggetto cui esse in origine si riferiscono e di considerarle come figure autonome: esse risultano, così, sospese liberamente nell'aria come "possibilità" collocate al di là del mondo delle cose. Attraverso questa separazione esse acquistano una particolare vita propria; la struttura degli oggetti che si riferiscono a esse può cambiare profondamente. Come disegni, infatti, le immagini non possiedono più il carattere delle cose reali e immobili, ma diventano dei complessi di relazioni geometriche come linee e numeri. In quanto tali, però, esse sottostanno ai condizionamenti della realtà in base ai quali risultano accettabili solo le figure che si possono realizzare nei limiti di precisi compiti costruttivi», Sedlmayr 1996, p. 122.



dono alla scelta del materiale più adatto alla dimensione (marmo, stucco, laterizio), è altrettanto vero che il loro svolgersi nello spazio non è vincolato dalla materia che dovrà esprimere quella forma<sup>17</sup>. Tutto avviene, per così dire, nello spazio del foglio di carta e della mano che vi traccia la linea, in maniera indipendente dalle dimensioni reali dell'artefatto. Piccolo e grande, dentro e fuori, ottico e tattile sono declinazioni di un unico modo di intagliare lo spazio, governato dalla geometria.

### Ringraziamenti

Per aver collaborato alle operazioni di rilevamento si ringraziano l'arch. Eleonora Antonucci, l'arch. Antonio Camassa, che ha curato anche l'elaborazione del modello, e il prof. Marco Canciani per aver messo a disposizione la sua esperienza nel campo del rilievo 3D.

# Le generatrici tecnologiche

di Maria Laura Rossi

## **La rivoluzione industriale e le esposizioni universali**

Con la rivoluzione industriale si assiste all'evoluzione della siderurgia e alla produzione di grandi quantità di ferro forgiato e ghisa che rivoluzionano i vecchi sistemi costruttivi. Prima di questo fondamentale momento nella storia dell'architettura, il ferro veniva impiegato solo per elementi accessori (grappe, ancoraggi, tiranti, etc.) mentre ora questi nuovi materiali possono essere utilizzati svolgendo un ruolo primario, ad esempio per creare travi connesse tra loro, non solo attraverso meccanismi ad incastro tra parti, ma soprattutto tramite saldatura. È nell'Ottocento che si cominciano a costruire edifici che mettono in evidenza le strutture portanti: prima fra tutte la *Bibliothèque Ste-Geneviève* di Pierre-Francois-Henri Labrouste, che si scontra fortemente con il filone di pensiero di quell'epoca chiamato «Razionalismo Strutturale». Tale movimento, derivato dall'insegnamento di Viollet Le Duc, promuove la precisa inten-

zione di separare gli elementi funzionali da quelli meramente espressivi, sintetizzata dal detto «nulla è bello in architettura, tranne il vero».

Conseguenza della rivoluzione industriale è la nascita della cosiddetta "Architettura degli Ingegneri" che stabilisce la netta divisione tra i doveri dell'architetto, incline alla creatività dell'artista esteta, e quelli dell'ingegnere, votato al rigore tecnico di uno scienziato. L'architetto viene relegato in posizione secondaria rispetto all'ingegnere, più pronto a rispondere alle esigenze di una società in veloce evoluzione. Le nuove architetture devono essere funzionali, semplici, rapide e, soprattutto, economiche. Con Labrouste però questa linea di demarcazione tra le due figure decade: sia l'ingegnere che l'architetto devono confrontarsi con una realtà in forte fermento culturale in cui la struttura non ha più un mero carattere utilitaristico, ma comincia a caricarsi di valore formale ed estetico.

Dalla metà dell'Ottocento in poi le nuove strutture trovano un enorme campo di applicazione e sperimentazione, stimolata dalle Esposizioni Universali, fiere annuali dei paesi all'avanguardia industriale, grazie alle quali vediamo il moltiplicarsi di padiglioni monumentali, stazioni, mercati.

Joseph Paxton (1801-1856), ingegnere e costruttore di serre, realizzò nel 1851 a Londra, in occasione della prima Grande Esposizione, il Crystal Palace, una struttura in ghisa, ferro e vetro. È ad oggi considerato come il primo passo rivoluzionario verso l'architettura moderna. In realtà non è altro che l'espressione ultima della tradizione delle serre e delle pensiline ferroviarie consolidatisi tra il 1830 e il 1850, proprio perché ferro e vetro sono sempre stati materiali adatti solo per una gamma molto ristretta di tipi edilizi. Paxton crea dunque un prototipo per grandi opere da realizzare attraverso elementi prefabbricati, prodotti in serie e montati in cantiere,

dove la decorazione non si sovrappone alla struttura ma è struttura stessa. Inoltre, nell'ottica di questa nuova concezione dell'architettura, l'impiego di elementi modulari consente risparmio e reimpiego. Tuttavia, se questo primo edificio prefabbricato suscitò interesse e scalpore, non altrettanto si poté dire per gli oggetti esposti che rivelarono in maniera evidente, nelle loro forme, le contraddizioni fra arte e industria, risultando incapaci di rispondere qualitativamente alle aspettative del pubblico. Si è in presenza di una produzione nel complesso dequalificata, di un insieme di oggetti le cui forme riprendono in modo incerto gli stili del passato<sup>1</sup>.

Dunque, il conflitto tra la figura dell'architetto e quella dell'ingegnere non è il solo a imperversare durante il periodo della prima rivoluzione industriale, che viene accompagnata anche dalla vivace polemica circa il ruolo dell'industria nei confronti dell'artigianato. Il clima positivista di cui le nuove realizzazioni sono l'espressione massima, è affiancato dalla constatazione che il progresso della tecnica non necessariamente coincida con il progresso dell'umanità, anzi l'industrializzazione corre il rischio di appiattirne gli aspetti spirituali. In tale dibattito si inserisce l'opera dell'ebanista Michael Thonet (1796-1871), figura di spicco nel campo del design industriale dell'Ottocento. Thonet si distingue per la ricerca di una nuova simbologia, rappresentativa di una classe che aveva raggiunto il predominio sociale. La borghesia non poteva riconoscersi in oggetti in cui l'estetica offuscava l'utilità, in prodotti le cui forme riecheggiavano gli stili della distrutta nobiltà. Era necessario definire un nuovo stile che fosse «interprete ufficiale di una aspirazione costante al risparmio e all'equa ripartizione dei beni»<sup>2</sup>. La diffusione dei prodotti Thonet fu massima, tanto da divenire vere e proprie icone rivoluzionarie, impassibili di fronte al passare del tempo e all'avvicinarsi delle

<sup>1</sup> Cfr. Portoghesi 1964.

<sup>2</sup> Portoghesi 1964, p. 44.

## Le linee curve per l'architettura e il design



Fig.1/ (1) Pablo Picasso; (2) Pierre-Auguste Renoir; (3) Le Corbusier; (4) Albert Einstein; (5) Joan Miró e la sedia modello Thonet n.18B; (6) Howard Carter esplora il sarcofago del Faraone Tutankhamon, foto Harry Burton; (7) La scena di un film di Charlie Chaplin; (8) Lyza Minelli; (9) Federico Fellini e Marcello Mastroianni seduti su una sedia n.18; (10) Al Moulin Rouge, Henri de Toulouse-Lautrec; (11) Andrey Remnev, Birthday.

mode, utilizzate dai personaggi più famosi, ritratte in film e opere d'arte, immortalate durante episodi cardine della storia e della politica (fig. 1).

In ambito artistico il tentativo di evadere da una realtà materiale e volgare e di rifugiarsi in un mondo immaginario intimo e raffinato è detto Decadentismo e si manifesta in un movimento europeo che prende nomi diversi a seconda delle varie nazioni: *Art Nouveau* in Francia, *Modern Style* in Inghilterra, *Modernismo* in Spagna, *Jugendstil* in Germania, *Secessionstil* in Austria e *Liberty* in Italia.

La forma degli edifici *Art Nouveau* tenta di uscire da un'impasse stilistica classicistica, risentendo dell'enfasi ottocentesca sull'uso dei materiali nuovi che avevano ideato i palazzi delle esposizioni. La caratteristica dello stile *Art Nouveau*, comune a tutti i filoni europei, è quella di voler rendere esteticamente validi gli oggetti di uso comune che le industrie, grazie alla diffusione dei nuovi materiali, propongono sul mercato, in modo tale da salvaguardarli dall'appiattimento e dalla banalizzazione della produzione in serie.

I tratti caratteristici di questo movimento dai tanti nomi sono da ascrivere all'ampiezza del programma del nuovo stile e alla sua doppia anima fatta di innovazione e di tradizione. In questo contesto, Thonet anticipò alcuni caratteri che poi divennero costan-

ti nell'*Art Nouveau* come la preferenza per le tematiche curvilinee, per le forme a spirale e a voluta, l'interesse a comunicare attraverso gli oggetti agilità e leggerezza. Inoltre, prefigurerò quelli che sarebbero stati i caratteri fondanti del Bauhaus, che avrebbe cercato di ricreare tra arte e industria quello stesso legame che aveva congiunto l'arte all'artigianato. Con Thonet «l'arredamento non diventa più "riempimento" di uno spazio ma filtraggio di uno spazio, caratterizzazione dinamica di uno spazio, attraverso un sistema equilibrato di linee»<sup>3</sup>. In particolar modo, la linea curva racchiude in sé simboli, morfologie, significati intrinseci: «è la linea antropomorfa e fitomorfa per eccellenza»<sup>4</sup>. Ancora, Oscar Niemeyer dirà «non è l'angolo retto che mi attira. Neppure la linea retta, dura, inflessibile, creata dall'uomo. Quello che mi attira è la linea curva, libera, sensuale. [...] L'universo intero è fatto di curve. L'universo curvo di Einstein». La curva tuttavia non ha un mero carattere naturalistico ed esoterico; essa in arte e in architettura è rivoluzionaria: segna con forza e in maniera netta il passaggio al barocco in antitesi ai canoni classici e rigorosi della rettilinea prospettiva rinascimentale; nell'espressionismo compare come strumento di ribellione nei confronti del razionalismo; così come l'architettura organica di Wright si porrà in opposizione critica all'International Style della scuola lecorbusiana.

### **Innovazione in una tecnica antica per la produzione Thonet**

Michael Thonet nasce nel 1796 a Boppard in Germania, e qui nel 1819 avvia un laboratorio specializzato in tradizionali intarsi geometrici. Forte di una non comune preparazione artigianale, nel 1830 impresse una svolta alla propria attività iniziando i primi importanti esperimenti sulla curvatura del legno. L'innovativa e originale tecnica di lavorazione del le-

**3** Massobrio, Portoghesi 1976, p. 110. «Nei mobili di Thonet, soprattutto i più complessi e ambiziosi si entra come in un ambiente [...] i dondoli, le chaises longues, i divani, i letti sono strutture dotate di una loro spazialità interna che ha nella trasparenza il suo carattere e la sua specificità. Un ambiente arredato con mobili di Thonet ha un fascino supplementare a quello dei singoli oggetti per la serie infinita di relazioni originata dalla trasparenza e dalle infinite possibili sovrapposizioni dei vari pezzi che si articolano, si oppongono e riflettono l'uno nell'altro formando un unico inestricabile nodo di linee tese».

**4** V. Torselli, *La linea curva* <http://www.artonweb.it/artemoderna/linguaggiartemoderna/articolo28.htm>.

gno, al cui studio Thonet dedicò tutta la propria esistenza, fu intuiva dalla semplice osservazione di un principio di vita biologica, ovvero quello dell'elasticità dei rami degli alberi, resa possibile dalla presenza della linfa nelle loro fibre<sup>5</sup>.

L'intuizione sta nell'agire sulle proprietà fisiche del legno attraverso l'uso del vapore che restituisce al legno secco la sua naturale elasticità. Curvare, da Thonet in poi, non significherà più creare un pezzo curvo ma generare una voluta piegando un'unica barra dritta di legno senza fare incastri, raccordi o sovrapposizioni (fig. 2).

Un pezzo curvato, contrariamente a un pezzo tagliato all'interno di un'asse, presenta tre vantaggi fondamentali: resistenza<sup>6</sup> e al contempo flessibilità; economia di materiale<sup>7</sup>; tempo di lavorazione estremamente ridotto<sup>8</sup>. A questo va aggiunto che i pezzi curvati all'interno di una cassaforma sono tutti perfettamente identici tra loro e questo produce un effetto sconvolgente sul mercato dei grandi numeri: è l'inizio della serialità del design (fig. 3). Il merito di Thonet non sta nello sfruttare le potenzialità del vapore, già ampiamente utilizzato da tempo in vari campi soprattutto quello della meccanica, né tantomeno nella sua applicazione sul legno. Egli riuscì a inquadrare le diverse fasi di lavorazione meccanica, solo parzialmente adottate dai laboratori artigianali a lui contemporanei, in un unitario processo produttivo: venne determinata una logica da catena di montaggio, basata cioè su operazioni consecutive e ripetute, a partire dall'ideazione del prodotto, alla sua lavorazione fino alla messa sul mercato, con l'obiettivo di creare arredi esteticamente validi, di buona fattura e al contempo economici, adatti al consumo di massa.

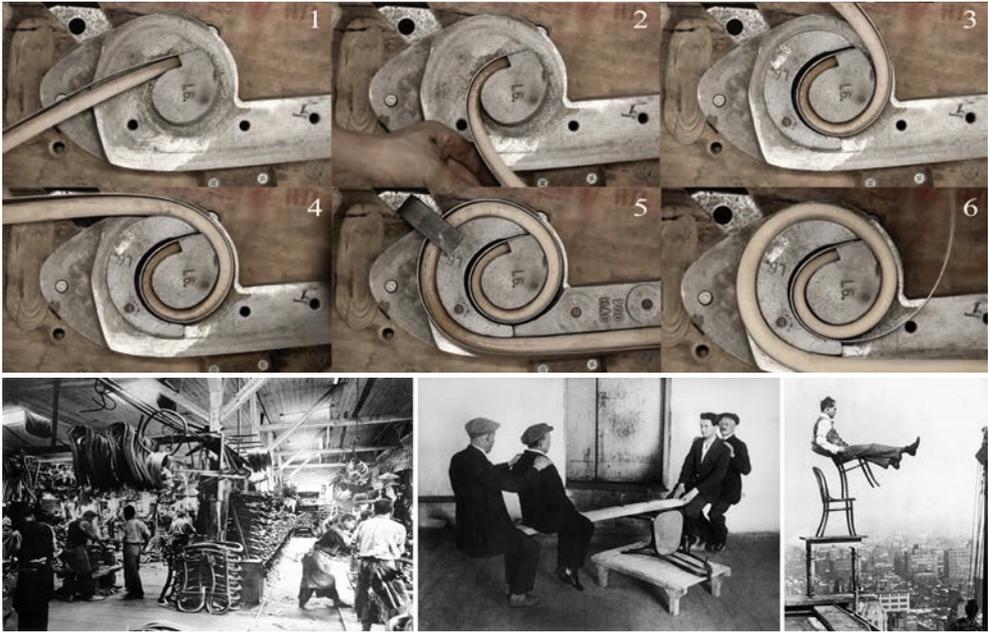
Dietro questo processo c'è un'enorme attenzione e conoscenza della materia prima: i pezzi Thonet derivano dal legno di faggio. Grazie alle sue fibre cor-

**5** Cfr. D'amato 2001.

**6** Una sedia modello n.14 è in grado di portare oltre 600 kg.

**7** Un bracciolo curvato necessita di una barra di circa 1 dmc; un bracciolo curvo, ricavato dal massello, necessita di 10 dmc, il rapporto tra gli scarti è di 1 a 10.

**8** Una barra Thonet viene tornita prima della curvatura e questo avviene in pochi minuti; il bracciolo ricavato dal blocco di legno viene reso tondo dopo ore di lavorazione manuale.



te, il faggio risulta molto duttile e flessibile, stabile e particolarmente adatto a essere piegato poiché evita la creazione di eventuali fessure o rotture durante la lavorazione. L'andamento delle fibre è di importanza fondamentale per la curvatura: se piegato in senso opposto alla struttura delle fibre, il legno si spezza; se invece la curvatura asseconda la fibratura, è possibile ottenere elementi curvi dallo spessore anche molto ridotto, offrendo resistenze differenziate all'aumentare o al diminuire del diametro del tondo ligneo. Il legno è sottoposto a vapore a una temperatura superiore ai 100°C e resta sotto pressione all'interno di una caldaia per circa sei ore. La pressione comprime il vapore acqueo che penetra nel legno fino a saturarlo. L'alta temperatura rende la barra di faggio estremamente elastica, condizione fondamentale per la successiva fase di curvatura. I "curvatori", inseriscono la barra di legno al centro dell'apposita dima. Un nastro metallico fissato all'estremità della barra di faggio impedisce lo stira-

Fig.2/ Creazione di una voluta lignea, con l'aggiunta, ad ogni giro, delle componenti metalliche che definiscono la forma e delle grappe di fissaggio, fino alla totale rimozione del supporto.

Fig.3/ Fotografia della produzione Thonet in fabbrica. Prove di resistenza e di flessibilità del prodotto. Infine, un temerario in equilibrio su mobili Thonet, New York, circa 1920. Fotografia di George Rinhart.

## Le linee curve per l'architettura e il design



Fig.4/ Lavorazione manuale del legno forzato all'interno della dima e del nastro contenitore per la fibratura; il componente è immobilizzato attraverso grappe a stringimento meccanico.

to eccessivo delle fibre in corrispondenza della curvatura più esterna. Senza questo contenimento, le fibre si lacererebbero e il legno si romperebbe. Affinché il legno curvato conservi la nuova forma viene tenuto nella dima per due giorni all'interno di una camera di essiccazione a 70°. Al termine di questo processo, il legno, pressoché privo di umidità residua, viene tolto dalla dima<sup>9</sup> (fig. 4).

L'intuizione di Thonet nello sfruttare questa tecnica all'interno del processo di progettazione di oggetti in legno, soprattutto arredi, è davvero rivoluzionaria, soprattutto se inserita in un modello produttivo che privilegia criteri di standardizzazione, prefabbricazione e processi meccanici. In questo modo si adattano i parametri progettuali di oggetti in ferro o in ghisa ad oggetti in legno, sfidando le leggi della materia naturale sulla base di precisi rapporti geometrici, in favore della funzionalità strutturale del prodotto e della sua riproducibilità in milioni di copie uguali. Così facendo Thonet crea strutture

<sup>9</sup> <http://it.thonet.de> *Il legno non è tondo, a meno che non lo si curvi.* (In) Thonet. Wooden Furniture. <http://it.thonet.de/inspirazioni/magazine/thonet-la-storia/il-legno-non-e-tondo-a-meno-che-non-lo-si-curvi.html>.

uniche scomponibili in una serie di elementi lineari afferenti a rigorosi schemi geometrici e matematici, che garantiscono la funzionalità strutturale nonostante la multiformità dei componenti. Ciò, di fatto, accresce la qualità dei mobili diminuendo la quantità degli elementi lignei, quindi della manodopera, quindi di tempi e costi.

### **Riproposizione in chiave geometrica di un elemento di arredo: la sedia n.14**

L'esemplare della produzione Thonet passato alla storia come "la sedia più venduta del mondo" o "la sedia delle sedie" è senza dubbio quello indicato con il n. 14. La n. 14 di Thonet (da molti chiamata più semplicemente Thonet) ricevette la medaglia nel 1867 in occasione dell'Esposizione universale di Parigi<sup>10</sup>. L'innovazione di questo modello sta nell'essere riuscito ad unire estetica e macchina: le sue curve, eleganti ma essenziali, ben si sposano con la produzione seriale tanto da costituirsi a tutti gli effetti come "la" sedia dell'uomo moderno, il primo vero arredo pensato e realizzato per il consumo di massa. La Thonet è un successo internazionale, capace di essere contemporanea a tutte le epoche, talmente versatile da adattarsi sia a locali (bar, ristoranti,...) che abitazioni, dalle più modeste alle più sfarzose, tenendo conto che l'affinarsi delle tecniche di finitura hanno permesso il suo utilizzo anche come arredo d'esterno. Lo stesso Le Corbusier scelse di affiancare le poltroncine Thonet ai modernissimi *casiers standard* nel soggiorno del suo Pavillon de l'Esprit Nouveau all'Exposition Internationale des Arts Decoratifs di Parigi del 1925. Adolf Loos descrive la sedia Thonet, che in fondo è il maggior oggetto di design anonimo del secolo, come l'unica sedia adatta al vivere moderno, senza fronzoli e inutili orpelli e decori, come scrive chiaramente in *Ornamento e delitto* del 1908. Egli dà il proprio personale contributo alla produzio-

<sup>10</sup> <https://www.arredativo.it/La-n-14-di-Thonet-una-sedia-all'Esposizione-Universale> <https://www.arredativo.it/2015/pezzi-storici/la-n-14-di-thonet-una-sedia-allesposizione-universale/>.

## Le linee curve per l'architettura e il design

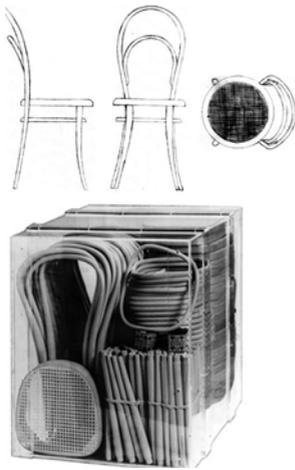


Fig.5/ Disegni del progetto originario; componenti della sedia e praticità di imballaggio per la rivendita e il trasporto.



ne progettando la sedia n. 255, sempre con il classico linguaggio delle tradizioni Thonet: sezione tonda, paglia di Vienna, curve armoniose, leggerezza.

Con la sedia n. 14, la straordinaria evoluzione delle idee formali e tipologiche di Thonet giunse finalmente al suo culmine progettuale, a una sintesi estetico-funzionale non ulteriormente semplificabile. Composta di appena sei elementi di legno curvato, tale sedia poteva essere montata da chiunque con l'ausilio di sole 10 viti. Spalliera e gambe posteriori sono formate da un unico elemento di faggio ricurvo, con un componente arcuato più piccolo inserito nello schienale; la seduta presenta un telaio su cui viene intrecciata la paglia di Vienna e nel quale vengono infisse le gambe anteriori, mentre un altro cerchio più piccolo funge da controvento per le gambe (fig. 5).

La particolarità di questa sedia, estremamente semplice ed essenziale, risiede sicuramente nella forma dell'elemento unico schienale-gambe e nella genesi della forma stessa, ovvero nella tecnica con cui questa curva prende vita. Come si è detto, per garantire la produzione standardizzata di pezzi identici tra loro, i pezzi di legno vengono curvati all'interno di dime metalliche, dove vengono fissati in maniera

manuale da professionisti artigiani che sconfinano nelle figure di operai di fabbrica.

Si propone con questo studio una rilettura in ambiente digitale della forma dello schienale e, conseguentemente, della dima che lo accoglie, della sedia n.14, immaginando che alla base della produzione di un prototipo replicabile su larga scala ci sia uno strumento di controllo di tipo geometrico. Viene dunque eseguita una ricostruzione attraverso modelli geometrici tridimensionali sulla base dei primi disegni progettuali della Thonet, che nel corso degli anni subisce numerose variazioni per divenire il più possibile ergonomica (fig. 6).

In base alle giaciture in pianta e prospetto della sedia vediamo che la caratteristica forma dello schienale con le due gambe posteriori segue l'andamento di una curva che può essere accumulata alla curva intersezione tra due cilindri ortogonali tra loro: il primo è un cilindro circolare che conferisce allo schienale l'andamento ricurvo che vediamo di profilo; il secondo è un cilindro ellittico, non completamente involupato dal primo, che accoglie la schiena creando una sorta di forma a 8 non chiusa. Cambiando le proporzioni, allo stesso modo viene generata la forma dello schienale più piccolo, che si interrompe prima che la forma si richiuda su se stessa, per essere inserita direttamente nello schienale. La zona centrale in cui la forma ad 8 va a stringere è un punto nodale: da qui iniziano due tangenti alla curva che definiscono le gambe posteriori, che avranno perciò un andamento rettilineo in vista frontale e curvilineo in vista laterale (fig. 7).

Definita la genesi geometrica di questo elemento, e verificata la continuità della curvatura, risulta di particolare interesse la forma della dima che deve accogliere l'elemento ligneo saturo di vapore. Questa infatti non abbraccia in maniera uniforme l'elemento ma ricurva su sé stessa in alcune zone, costringendo

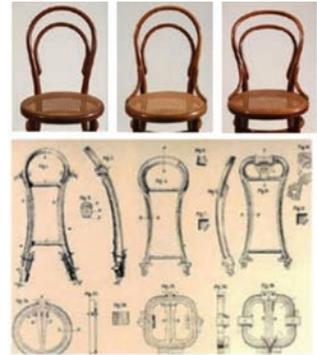


Fig.6/ Versioni della sedia Thonet e relativa dima e seduta: prima forma del 1859; seconda forma del 1875 con barre di rinforzo laterali; terza forma, la più ergonomica, sul mercato dal 1880 al 1930.

## Le linee curve per l'architettura e il design

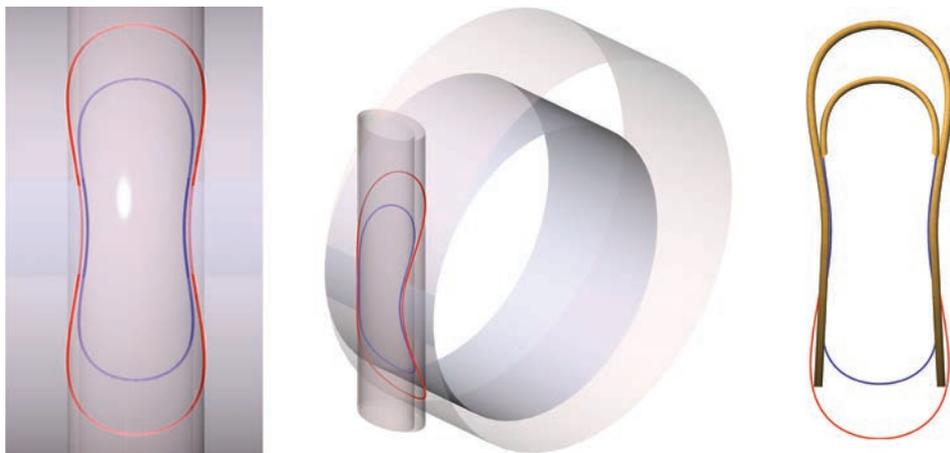


Fig.7/ L'intersezione tra il cilindro ellittico e il suo corrispettivo cilindro circolare genera la curva caratteristica dello schienale della sedia. Dal centro, l'intersezione tra due piani obliqui tangenti alla curva principale (rossa) intersecano il cilindro principale secondo due curve in continuità di curvatura con la parte superiore.

Fig.8/ I due "curvatori" si accingono ad imprimere la forma dello schienale all'interno della dima.



il materiale a subire non solo la curvatura ma anche delle torsioni (fig.8).

La natura di questa forma particolare è da ricercare evidentemente nelle proprietà strutturali intrinseche del legno di faggio, che avendo una fibratura corta tende a sfilacciarsi di fronte a curvature accentua-



te; costringendo invece il legno a torcersi su sé stesso, cioè all'interno del tondo ligneo, non ci saranno fibre interne compresse e fibre esterne pericolosamente tese, ma una curvatura moderata e costante in tutte le zone critiche.

Nella zona centrale, là dove sono le fibre esterne ad essere compresse e tese quelle interne, la torsione fa in modo tale che sia agevole spingere all'infuori le gambe della sedia. A questa altezza viene posizionato il pezzo di legno curvato circolare che fa da controvento per le quattro gambe. Completa la struttura della sedia Thonet una seduta circolare con un rivestimento in paglia di Vienna fissata direttamente al telaio (fig.9).

### Conclusioni

L'operato di Michael Thonet si caratterizza come una delle più grandi intuizioni del design industriale dell'Ottocento. La ricerca in ambito tecnologico concilia l'alta qualità estetica e la massiva diffusione commerciale, donando un contributo fondamentale alla determinazione di un nuovo stile, capace di dominare il mezzo tecnico a favore del risultato formale proprio dell'artigianato. La versatilità dei suoi prodotti genera un perfetto connubio tra funzionalità ed estetica, dove la forma è strettamente legata alle caratteristiche del materiale utilizzato. La legge della

Fig. 9/ Viste tradizionali del modello digitale: prospetto laterale, frontale, pianta, assonometria. Foto del modello originale della sedia n.14: peso 4 kg; profondità 48cm; altezza totale 92cm; altezza seduta 45,5cm.

## Le linee curve per l'architettura e il design

scelta della forma in funzione della virtualità costruttiva della materia è probabilmente la legge cardine del linguaggio di Thonet<sup>11</sup>. Nella sua produzione confluiscono inventiva, tipologia ed esperienza tecnico-artigianale, fantasia stilistica e padronanza tecnologica. La creazione di un linguaggio progettuale ha cambiato per sempre il modo di "fare arredo" e, soprattutto, ha contribuito a richiamare l'attenzione degli artisti della civiltà moderna sulle reali esigenze e gli effettivi bisogni dell'uomo comune.

11 Cfr. Portoghesi 1964.

Altri siti consultati non riportati in nota.

*Legno curvato. Stile Thonet, design europeo nel cuore di Vienna.*

<http://legnocurvatoedesign.it>

Scordo Alessandro, *Curvare il legno* <http://legnocurvatoedesign.it/curvare-il-legno/>

Scordo Alessandro, *Thonet nella Valle dei Re* <http://legnocurvatoedesign.it/thonet-nella-valle-dei-re/>

Renzi Giovanni, *Intervista a Franco Moschini: imprenditore del bello* <http://legnocurvatoedesign.it/intervista-franco-moschini-imprenditore-del-bello/>

Renzi Giovanni, *La Sedia n. 255 di Adolf Loos* <http://legnocurvatoedesign.it/sedia-n-255-adolf-loos/>

Renzi Giovanni, *Le Corbusier e la poltroncina viennese* <http://legnocurvatoedesign.it/le-corbusier-e-la-poltroncina-viennese/>

Renzi Giovanni, *Si può parlare di stile Thonet?* <http://legnocurvatoedesign.it/si-puo-parlare-di-stile-thonet/>

*Thonet.* <http://it.thonet.de>

*Didatticarte.* <http://www.didatticarte.it>

Pulvirenti Emanuela, *Vi racconto la Thonet n. 14* <http://www.didatticarte.it/Blog/?p=2461>

*Design Street.* <http://designstreet.it>

*Thonet: l'azienda che ha inventato il design moderno* <http://designstreet.it/thonet-lazienda-che-ha-inventato-il-design-moderno/>

ArtOnWeb. Linguaggi dell'arte moderna. <http://www.artonweb.it>

# Il ruolo delle curve generative nel design nautico

di Michele Russo

## **Introduzione**

Nell'ambito dell'industrial design la ricerca della forma, intesa come atto traduttivo ed interpretativo di una idea nella sua realizzazione, rappresenta un percorso complesso di mediazione fra tradizione e innovazione, fra significante e significato, fra libertà progettuale e vincolo materico, per arrivare ad un prodotto di sintesi progettuale. In questo processo di raffinamento iterativo verso la forma, le curve rappresentano il dato generativo di partenza per la costruzione di superfici complesse, liquide, che tendono ad uscire dai canoni geometrici verso un unicum formale. Un ambito nel quale queste geometrie trovano una importante applicazione è il "design nautico", una disciplina nella quale le curve nello spazio hanno il compito di definire lo scheletro geometrico di volumi complessi, restituiti graficamente attraverso il metodo proiettivo che riporta l'informazione geometrica sui tre principali piani di proiezione, avviando un sistema multivisione di analisi e

controllo della forma<sup>1</sup>. L'introduzione dei sistemi di acquisizione e rappresentazione digitale ha modificato negli ultimi anni il processo di costruzione delle curve generative degli scafi, pur mantenendo un forte collegamento con la tradizione progettuale e costruttiva navale. L'intento del contributo è quello di tracciare un percorso storico, logico-evolutivo e critico sull'utilizzo delle curve nella Nautica, intese come elemento generativo di una forma che integra tradizione ed innovazione, adattabilità e rigore, definendo un prodotto di altissima qualità e rappresentativo del *Made in Italy*.

### **Cenni storici sull'uso delle curve in ambito navale**

L'uso delle geometrie curve per il progetto nautico affonda le sue radici nella storia e nella produzione cantieristica navale<sup>2</sup>. Già in epoca romana fu introdotto un sistema di riproduzione delle forme curve che consentiva la creazione seriale di imbarcazioni da guerra, un primo tentativo di industrializzazione per ridurre i tempi di produzione e poter apportare velocemente delle migliorie o riparazioni. Il sistema romano si fondava sull'uso di sagome ad arco circolare e tangenza continua che venivano riportate di volta in volta sulle ossature lignee degli scafi, senza dover essere costretti a ripetere le operazioni di costruzione ex-novo. Questa tecnica fu notevolmente perfezionata tra il XIII e il XIV secolo dalla marineria Veneziana nella costruzione delle Galee<sup>3</sup>, tanto da essere conservata fino all'introduzione della geometria proiettiva mongiana, che definì una prima svolta cruciale nell'ambito della progettazione navale<sup>4</sup>. Una seconda trasformazione profonda è avvenuta nella metà del secolo scorso con l'introduzione di un nuovo linguaggio di dialogo progettuale, non più tra progettista e maestranze di cantiere ma tra disegnatore e macchina, che ha definito una re-

<sup>1</sup> Cfr. Musio Sale 2009.

<sup>2</sup> Cfr. Casson 2004.

<sup>3</sup> Imbarcazione diffusa in tutto il Mediterraneo e diretta discendente della trireme.

<sup>4</sup> Cfr. Marzari 1998.

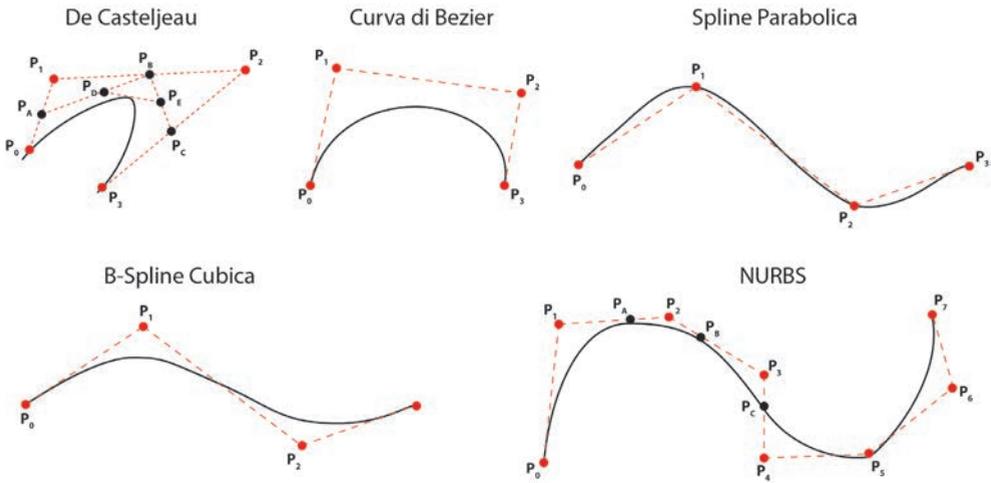


Fig. 1/ Tipologie di curve nella storia della Computer Grafica.

lazione biunivoca fra quello che si vede e quello che si rappresenta sulla carta (WYSIWYG<sup>5</sup>). In particolare, la possibilità di poter tradurre e manipolare una curva mantenendone la coerenza nel prodotto finito ha rappresentato una sfida per i matematici dell'epoca, grazie soprattutto allo sviluppo dei calcolatori che hanno posto le basi al concetto di serializzazione e produzione industriale. Il processo di progettazione e produzione di imbarcazioni sul territorio nazionale rappresenta oggi un mirabile esempio di integrazione di competenze e tradizioni, di tecniche tradizionali e moderne tecnologie, che trovano sempre più spazio soprattutto nella fase di progetto.

### La costruzione e rappresentazione delle curve

La genesi delle curve e delle superfici matematiche in ambito navale è legata alla loro evoluzione nel campo della Computer Grafica (fig. 1). Il primo passo avvenne negli anni '40 grazie ad un progettista di aerei della North American che si pose il problema della deperibilità dei supporti cartacei di progetto, arrivando a tradurre le curve disegnate in numeri ordinati in tabella<sup>6</sup>. Questo metodo permise di risolvere il problema della conservazione dei dati di pro-

<sup>5</sup> WYSIWYG = What You See Is What You Get.

<sup>6</sup> Cfr. Liming 1944.

getto, ponendo al contrario il problema della traduzione della tabella in una rappresentazione digitale grafica. Nel 1959 presso la Citroën il matematico Paul de Casteljau definì per la prima volta un metodo per costruire curve direttamente dal computer, inserendole all'interno di un poligono di controllo contenente poli di controllo della geometria<sup>7</sup>. Contestualmente in Renault il matematico Pierre Bezier studiò un metodo simile ma basato sull'intersezione di due cilindri ellittici costruiti all'interno di un parallelepipedo, ponendo le basi del sistema CAD/CAM adoperato per più di trent'anni dalla casa costruttrice (Unisurf) e sviluppato nel programma CATIA<sup>8</sup>. Partendo da queste curve di base, nei successivi decenni la ricerca matematica ha condotto alla elaborazione di curve polinomiali sempre più evolute<sup>9</sup>, passando dalle curve Spline alle B-Spline fino alle NURBS<sup>10</sup>, dotate di un controllo geometrico a livello locale e capaci di rappresentare forme geometriche sempre più complesse con funzioni polinomiali di grado sempre più basso<sup>11</sup>. Queste curve, tutt'oggi utilizzate come standard nel disegno CAD, rappresentano la base di partenza per la costruzione delle principali superfici matematiche digitali delle imbarcazioni.

Dal punto di vista della rappresentazione, le superfici di una barca presentano una trasformazione spaziale continua, che alterna gli andamenti concavi degli avvisi prodieri a quelli convessi delle paratie, fino a riproporre forme concave vicino alla poppa. Tale movimento genera una "liquidità" formale estremamente complessa da rappresentare e per la quale si prevede una fase di semplificazione basata sul metodo delle proiezioni ortogonali, che concorre a delineare le primitive generative della forma ma nel contempo ne evidenzia un limite intrinseco. Richiamando infatti la rappresentazione di solidi elementari, questi sono facilmente descrivibili in pro-

**7** Cfr. De Casteljau 1959.

**8** Cfr. Bézier 1971.

**9** Cfr. De Boor 1978.

**10** Cfr. Piegl 1995.

**11** Cfr. Sederberg 2012.

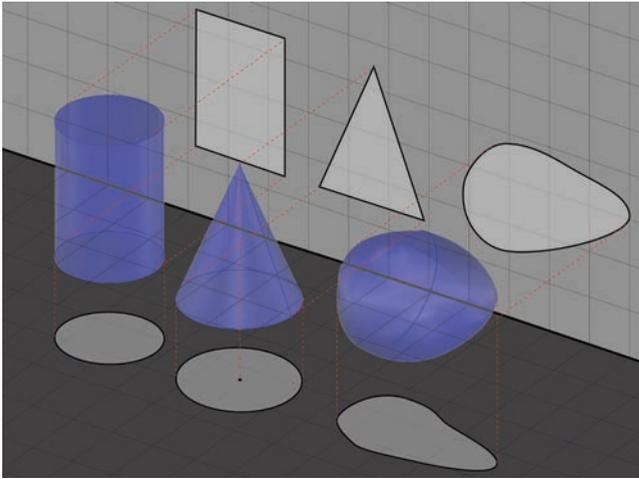


Fig. 2/ Confronto nella rappresentazione di solidi elementari e complessi attraverso il metodo delle proiezioni ortogonali.

iezione attraverso le loro direttrici e generatrici; al contrario invece la rappresentazione di solidi complessi attraverso le linee di bordo o *break-lines* risulta spesso non sufficiente per descriverne in maniera completa l'andamento spaziale nella sua interezza e complessità (fig. 2).

Il problema della corretta rappresentazione di superfici *free-form* attraverso proiezioni ortogonali è tema che affonda le sue radici nella restituzione territoriale, basata sulla rappresentazione cartografica delle variazioni di quota dei terreni. In questo campo la restituzione della terza dimensione avviene ancora oggi mediante l'utilizzo delle curve di livello o *isopse*<sup>12</sup> che descrivono l'inclinazione del terreno in un preciso punto. Anche nell'ambito della progettazione navale è stata sviluppata la medesima tecnica, fondata sull'utilizzo delle curve di livello e sul metodo delle proiezioni quotate. Tale metodo si basa sull'integrazione di curve di contorno e un sistema progressivo di sezioni operate nel volume a quote prestabilite e prodotte da piani paralleli ai piani di proiezione. Il risultato che si ottiene da questa procedura, chiamato "Piano di Costruzione" o "Body Plan" (fig. 3), consente di apprezzare l'andamento

**12** Sequenze di curve caratterizzate da un dislivello costante, la cui distanza corrisponde alla retta di massima pendenza tracciabile tra le due curve.

## Le linee curve per l'architettura e il design

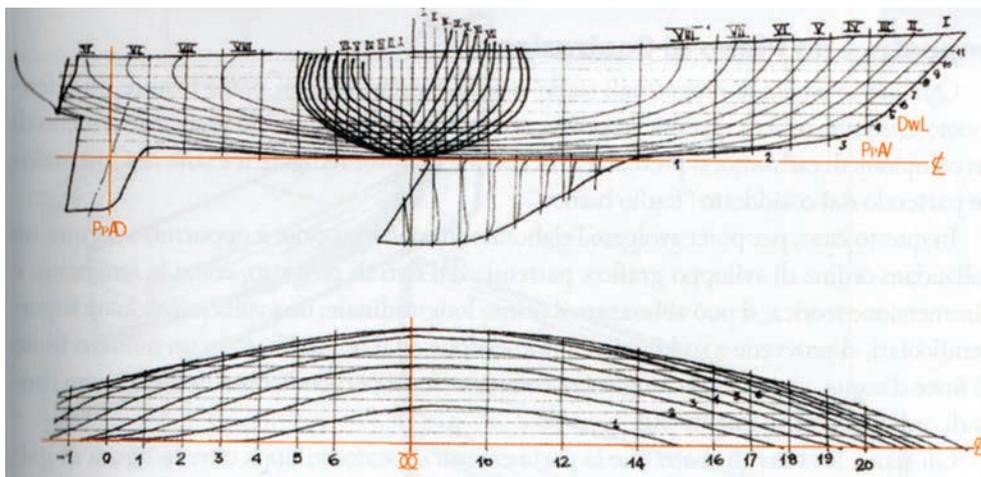


Fig. 3/ Confronto nella rappresentazione Piano di Costruzione dello Yacht "CHAPLIN" progettato da Sciarelli nel 1974, Costruzione Sangermani (fonte: Yacht Design: dal concept alla rappresentazione, a cura di Musio Sale Massimo).

complessivo delle forme, potendo identificare qualsiasi punto "intermedio" fra una sezione e l'altra attraverso una semplice operazione di interpolazione fra le due sezioni. Tale elaborato condensa tutte le informazioni volumetriche attraverso una pianta o semi-pianta, un alzato del fianco o proiezione longitudinale, nonché gli alzati o semi-alzati combinati, che integrano spesso in una sola rappresentazione le viste della prua e della poppa. Il "Piano di Costruzione" si può quindi intendere come un grafico multivisione in cui tre serie di curve di livello proiettate sui tre piani ortogonali si relazionano reciprocamente. Sulla pianta sono riportate le curve che prendono il nome di "linee d'acqua" o "linee di galleggiamento", nel piano longitudinale si individuano le curve corrispondenti ai diversi profili della barca, infine sul piano verticale sono rappresentate le ordinate nel loro sviluppo geometrico, ovvero le sezioni perpendicolari rispetto al piano di simmetria e alla linea di costruzione.

### **Le curve per la progettazione e per l'analisi di imbarcazioni esistenti**

In ambito navale è prassi diffusa partire da un piano di costruzione esistente, utilizzando un listato di

misure corrispondente alla sintesi dei valori geometrici dello scafo, al quale vengono applicati dei "coefficienti di affinità" che consentono di plasmare la forma della barca progettata rispetto a quella di partenza. Qualora non esista una base di partenza<sup>13</sup>, si presenta l'occasione di redigere un nuovo "Piano di Costruzione", nel quale si costruisce la prima curva corrispondente al "primo longitudinale", identificando sommariamente la dimensione della barca e l'immersione teorica. Da questa si tracciano una sequenza di curve perpendicolari, normalmente una ventina, che tendono a suddividere in parti uguali lo spazio fuori acqua ed in immersione. Infine, grazie alla relazione proiettiva fra i punti di intersezione di queste curve, è possibile definire la sezione maestra o di simmetria e la figura di galleggiamento. In questo procedimento ex-novo è indispensabile che sia sempre soddisfatta la relazione fra i punti singolari di incrocio tra linee d'acqua, ordinate e profili, pena l'inaffidabilità complessiva dell'intero elaborato prodotto. Dal punto di vista metodologico la progettazione navale richiama spesso le tradizioni progettuali, partendo da un bozzetto disegnato a mano, sul quale vengono stese ad una ad una le liste flessibili<sup>14</sup> e i piombi di posizionamento<sup>15</sup> (fig. 4), andando a determinare il primo piano di costruzione<sup>16</sup>. Verificata ad occhio la qualità della forma del fasciame, chiamata anche "avviamento", si può passare quindi alla rappresentazione più raffinata della forma. L'introduzione dei sistemi CAD 2D/3D hanno modificato il processo di progettazione, consentendo di rappresentare graficamente e verificare in tempo reale la qualità delle curve costruite (fig. 4) attraverso i grafici di curvatura<sup>17</sup>.

La generazione di superfici matematiche rappresenta una fase delicata, fondata sull'uso di curve generatrici, direttrici e applicazione di traslazioni e rotazioni nello spazio. La qualità delle superfici discende

**13** Cfr. Musio Sale 2009.

**14** I flessibili o stecche flessibili sono delle stecche lignee di sezione variabile con la caratteristica di poter essere formate in maniera da seguire le curve delle diverse sezioni dello scafo. La variazione di spessore viene scelta proprio per simulare le diverse parti della barca caratterizzate da diverso spessore e rigidità.

**15** La rigidità dei flessibili comporta il loro utilizzo associato a quello di elementi di legno pesanti con terminazione metallica, che consentono di bloccare sul foglio di carta la stecca senza che questa si muova durante il tracciamento.

**16** Cfr. Marzari 1998.

**17** Cfr. Gaiani (a cura di) 2006.

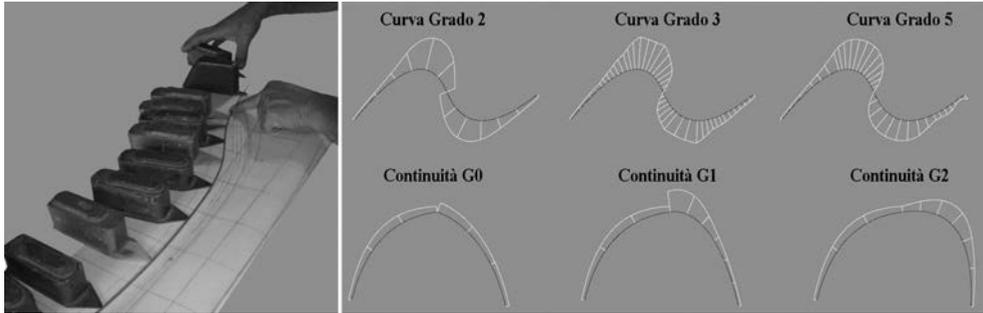


Fig. 4/ A sinistra lista flessibile e piombi di posizionamento per la realizzazione di curve Spline su carta, a destra tipologie di curve matematiche e condizioni di continuità fra curve reciproche, evidenziate dal grafico di analisi della curvatura.

dalla qualità delle curve, ovvero dal grado del polinomio di struttura e dalla loro forma geometrica nello spazio, nonché dalle condizioni di continuità fra primitive reciproche, verificabile attraverso strumenti di visualizzazione basati sul *real-time rendering*<sup>18</sup>. Dal punto di vista morfologico-costruttivo, la distribuzione sequenziale delle curve nello spazio rende le superfici di *loft* lo strumento ideale per la definizione del "corpo centrale" dello scafo, mentre più complesse risultano le costruzioni delle superfici corrispondenti all'avvio di prora e di poppa. Il primo è basato sulla generazione di una superficie a tre lati con vincolo di continuità fra corpo centrale e piano di mezzeria, condizione di costruzione limitante data la parametrizzazione geometrica delle superfici 3D fondata sulle due direzioni ( $u, v$ ) e quattro lati. Per risolvere questo limite è necessario sovrapporre due vertici di bordo e definire iso-parametriche convergenti, con conseguente definizione di una forma tridimensionale di difficile realizzazione e controllo<sup>19</sup>. Lo specchio di poppa invece si presenta come superficie quadrangolare leggermente convessa, molto importante per la definizione della mezzeria e della generatrice di massima sporgenza della imbarcazione rispetto alla vista di profilo (fig. 5).

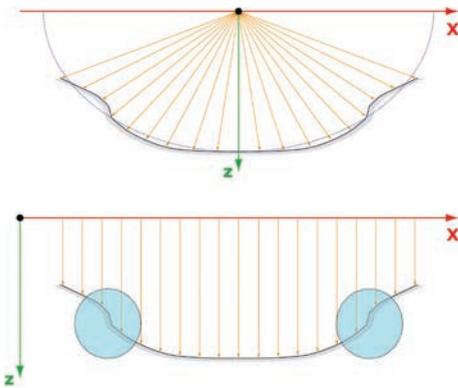
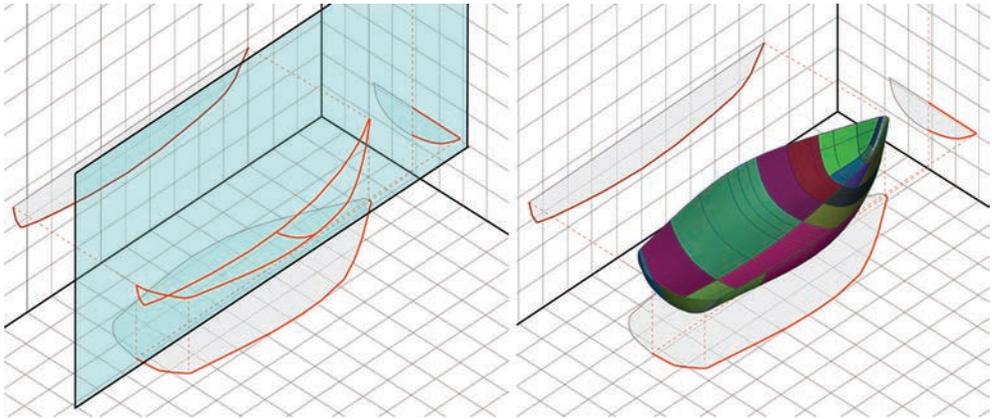
Completamente differente è la generazione di curve attraverso il processo di *Reverse Modeling* di una imbarcazione<sup>20</sup>. Tale processo<sup>21</sup> consente di ottenere il calco digitale di una barca esistente attraverso

**18** Cfr. Brevi 2004.

**19** Cfr. Brevi 2004.

**20** Cfr. Gaiani et al. 2006.

**21** Cfr. Guidi et al. 2010.



l'applicazione di metodiche di rilievo digitale, fondate sull'uso di sistemi attivi come i laser scanner 3D o passivi come la fotogrammetria digitale<sup>22</sup>. Dalla applicazione di queste metodologie di acquisizione si ottengono nuvole di punti dense corrispondenti alla superficie esterna della barca, che vengono utilizzate come dati di interpolazione per la costruzione di superfici numeriche (fig. 6). Il modello poligonale ottenuto può essere sezionato in qualsiasi punto, andando ad estrarre curve spezzate, definite dalla intersezione fra il piano di sezione e la moltitudine di piani triangolari. Tali sezioni rappresentano la base di partenza per la ricostruzione nello spazio di curve e superfici matematiche. Il livello di attendibilità delle geometrie ottenute in questa fase dipende dal-

Fig. 5/ A sinistra relazione omologica fra curve proiettate sui piani e nello spazio, a destra network di superfici dello scafo.

Fig. 6/ A sinistra schema di campionamento di una superficie secondo una proiezione a raggi divergenti o a raggi paralleli, con relativa evidenziazione delle possibili zone d'ombra non rilevate, a destra rilievo digitale basato su raggi divergenti.

<sup>22</sup> Cfr. Remondino, El-Hakim 2006.

la corretta progettazione del rilievo (fig. 6), la scelta dello strumento e dal trattamento dei dati acquisiti<sup>23</sup>, tenendo presente nel contempo sia l'aleatorietà del processo interpretativo di ricostruzione di curve matematiche coerenti con i dati rilevati, sia la conservazione delle corrispondenze proiettive tra le sezioni estratte.

L'uso del modello sottostante in fase di ricostruzione matematica consente di poter confrontare in tempo reale la distanza fra il modello matematico progettato e quello numerico di riferimento. Un secondo vantaggio, legato alla analisi della forma rilevata, consiste nella possibilità di studiare con precisioni sub-millimetriche l'intera superficie della barca, a differenza dei rilievi manuali, potendo verificare in qualsiasi punto dello scafo la presenza di "difetti" ed indicare dove apportare i correttivi in maniera puntuale.

### Casi studio

Il primo caso studio riguarda la barca in legno denominata "Leone di Caprera"<sup>24</sup>, presentata come applicazione del processo di *Reverse Modeling* per lo studio di scafi storici finalizzato al restauro nautico. Per progettare il restauro della imbarcazione è stata avviata una campagna di rilievo basata sull'uso integrato di tecniche fotogrammetriche e laser scanning 3D, impiegando la prima tecnica per il rilievo dello scafo, data la possibilità di poter esprimere la sua forma attraverso alcune specifiche curve di sezione, utilizzando la seconda per acquisire la coperta. Da una prima analisi dei dati rilevati è stato possibile evidenziare una torsione subita nel tempo dallo scafo, alcune asimmetrie presenti o sporgenze nel fasciame, fornendo subito una prima indicazione utile a livello progettuale per il cantiere di restauro e conservazione. Dal modello tridimensionale numerico così definito è stato possibile creare una sequen-

<sup>23</sup> Cfr. Guidi et al. 2005.

<sup>24</sup> Baleniera con armo a goletta costruita nel 1879 è oggi una tra le imbarcazioni più antiche della flotta italiana; è stata oggetto di un restauro dello scafo nel 2009 che ne ha preservato l'aspetto ma non la funzionalità.

## Il ruolo delle curve generative nel design nautico

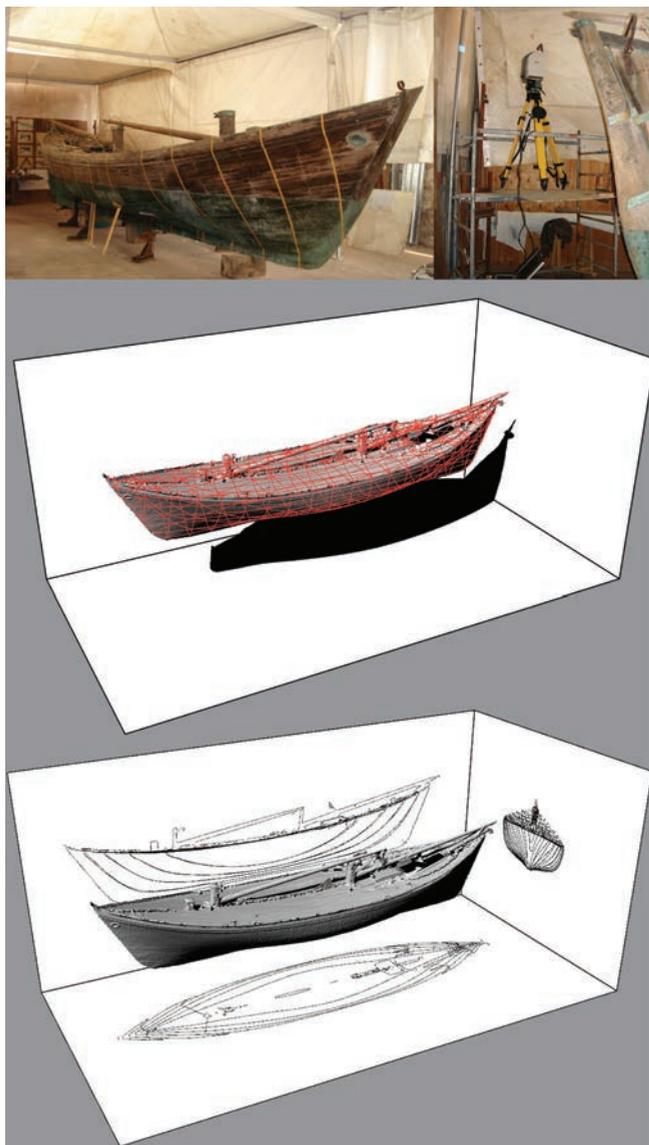


Fig. 7/ In alto alcune fotografie riguardanti la fase di acquisizione 3D attraverso fotogrammetria digitale e laser scanning 3D, con evidenziate sullo scafo le curve di riferimento da acquisire. In basso due fasi di interrogazione del modello numerico attraverso l'estrazione delle sezioni e la riproiezione delle curve sui piani determinando il Piano di Costruzione della imbarcazione.

za di sezioni e ricostruire il "Piano di Costruzione" dell'imbarcazione (fig. 7).

Il secondo caso studio riguarda l'imbarcazione FIV 555 (Nautivela) in vetroresina e l'applicazione del processo di *Reverse Modeling* per l'analisi della superficie esistente, l'estrazione delle curve e il con-

## Le linee curve per l'architettura e il design

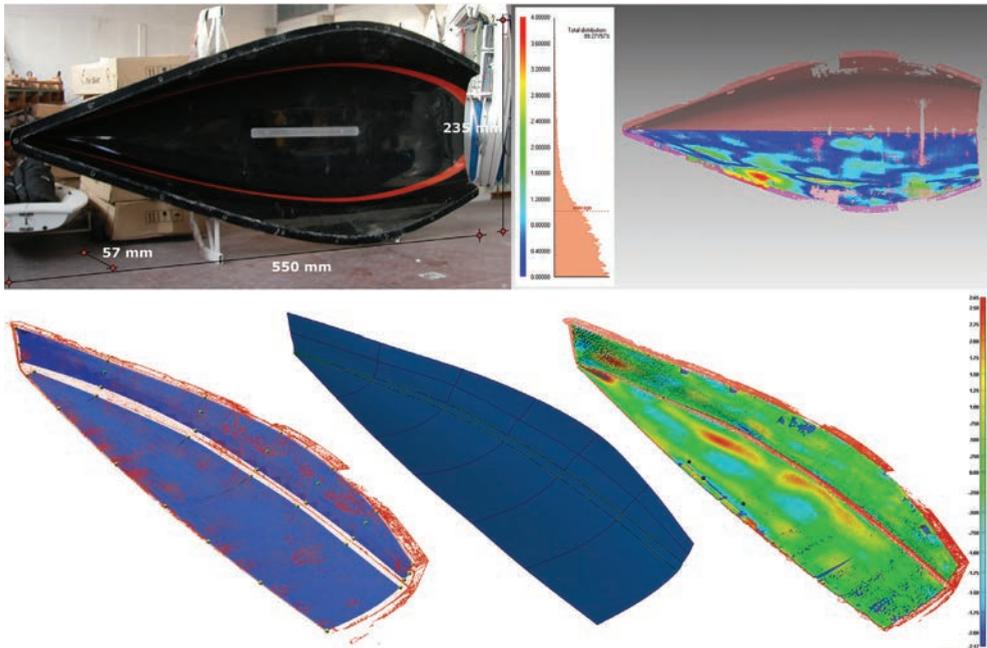
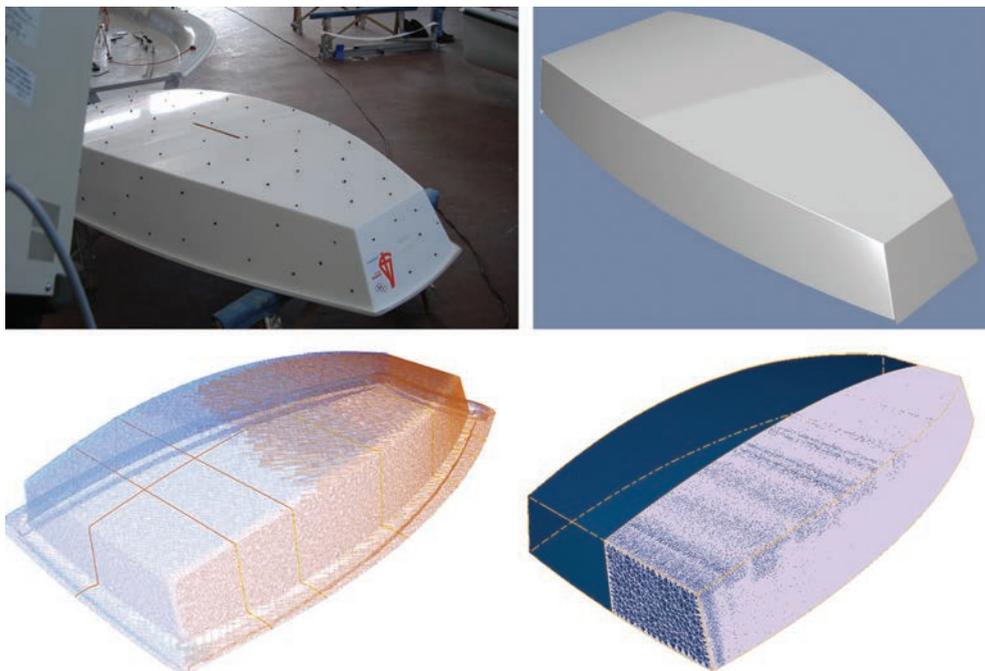


Fig. 8/ Percorso di ricostruzione del modello matematico dell'imbarcazione FIV 555: in alto a sinistra una fase di rilievo, in basso la sequenza di fasi di costruzione delle superfici matematiche dal modello numerico fino al confronto sulla distanza fra i due modelli, in alto a destra una verifica di simmetria che evidenzia le notevoli differenze fra le due parti nelle parate della barca.

trollo di qualità. La richiesta di portare a termine una analisi geometrica di alta precisione dello scafo ha condotto alla scelta di adottare l'integrazione di tecniche di acquisizione tridimensionale, utilizzando un laser scanner 3D a triangolazione per il rilievo di dettaglio e un laser scanner 3D a tempo di volo per l'acquisizione globale, definendo un passo di campionamento di 0,3 mm e un'accuratezza globale di pochi millimetri. La definizione di un modello poligonale molto simile al reale ha consentito di condurre una analisi di precisione sulla forma attraverso una verifica di simmetria, evidenziando una variazione centimetrica in prua. La disponibilità di un modello numerico affidabile ha fornito inoltre l'occasione per sperimentare alcuni metodi di generazione di superfici matematiche basate su processo manuale, semi-automatico e automatico (fig. 8).

Il terzo e ultimo caso riguarda l'imbarcazione di classe Optimist (Nautivela) in vetroresina e l'applicazio-



ne del processo di *Reverse Modeling* per la definizione delle curve e superfici matematiche del prodotto a supporto della progettazione nautica. L'elevata qualità del prodotto ha richiesto di minimizzare gli errori in tutto il processo di rilievo e modellazione, andando ad ottimizzare sia la fase di acquisizione che di creazione delle superfici, ricreando una forma matematica tridimensionale molto simile alla forma reale dello scafo.

Il modello 3D è servito principalmente per conservare digitalmente un prodotto soggetto all'usura del tempo e ai cicli di produzione che progressivamente deteriorano la sua forma originaria. La ricostruzione matematica ha permesso di correggere le imperfezioni della superficie reale e generare un modello simmetrico, andando ad apportare delle modifiche progettuali che rientrano nelle tolleranze costruttive stringenti dalla Federazione Nautica (fig. 9).

Fig. 9/ Percorso di ricostruzione del modello matematico dell'Optimist: in alto a sinistra una fase di acquisizione 3D, in basso a sinistra la ricostruzione delle curve sulla base del modello numerico, a destra in basso il doppio modello matematico-numerico e in alto a sinistra il modello matematico finale.

### **Conclusioni**

Il saggio ripercorre il ruolo e la funzione delle curve nel campo della progettazione navale. In questo ambito le curve hanno sempre rappresentato il fulcro generativo delle imbarcazioni, partendo dalle forme di ausilio in cantiere agli strumenti tradizionali per la restituzione su carta, fino alle attuali rappresentazioni digitali. Il loro significato e ruolo viene oggi declinato in funzione della finalità di progetto o di analisi dell'esistente, sfruttando le potenzialità offerte dalla Computer Grafica per la generazione di curve e superfici complesse e la restituzione sintetica attraverso il metodo delle proiezioni ortogonali. Grazie all'introduzione di strumenti digitali a supporto del rilievo è oggi possibile "campionare" con densità prossime al continuo materico le barche esistenti, potendo portare a termine analisi geometriche su forme complesse, da cui è possibile estrarre le curve di base a supporto della riprogettazione delle superfici esistenti. L'analisi e la costruzione geometrica, il rilievo dell'esistente e la rappresentazione nel piano e nello spazio definiscono quindi una unica filiera della conoscenza della nautica, nella quale le curve assumono un ruolo di primo attore e nucleo generativo dell'intero processo.

## Le linee coniugate

di Leonardo Paris

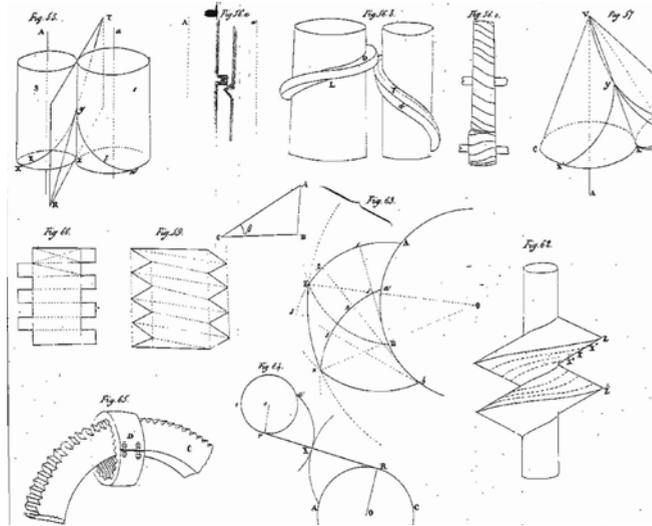
Il movimento di un ingranaggio si basa sulla rigorosa applicazione di principi geometrici che ne consentono il corretto funzionamento. In un ingranaggio si riconoscono sempre delle superfici che nel loro movimento imprimono o ricevono una spinta reciproca mantenendo delle precise relazioni e proprietà geometriche. Queste geometrie si definiscono "coniugate". Le linee che sono alla base di queste superfici si definiscono per l'appunto "linee coniugate".

Gli ingranaggi sono meccanismi conosciuti sin dall'antichità. Un primo studio specifico e dettagliato in cui vengono individuati i primi elementi facenti parte dell'ingranaggio come le ruote, le leve e le pulegge lo si deve in epoca ellenistica ad Erone d'Alessandria che descrive in maniera accurata un "odometro", cioè un misuratore di distanza.

Un'applicazione molto utile nell'antichità è quella relativa al pompaggio dell'acqua nei mulini nei quali si fa largo uso di ruote dentate per la trasmissione del moto. A Leonardo da Vinci – come anche ad al-

## Le linee curve per l'architettura e il design

Fig. 1/ Disegni di ingranaggi, dal trattato di Codazza 1854.



tri "ingegneri" rinascimentali – si devono numerose descrizioni, anche grafiche, della concatenazione dinamica fra più elementi.

Se si parla invece di ricerche geometriche degli ingranaggi, quelle cioè che sono alla base di una vera e propria "teoria geometrica", uno dei precursori è il matematico Philippe de La Hire (1640-1718) al quale si devono descrizioni sulle proprietà delle epi-ipo-cicloidi e cicloidi piane applicate agli ingranaggi per la costruzione esatta dei profili dei denti. Il primo trattato teorico sugli ingranaggi lo si deve a Charles Etienne Louis Camus (1699-1768) cui sono seguiti i contributi di molti grandi matematici e geometri del Settecento e dell'Ottocento quali Eulero, Hachette, Lefebvre, Monge, Olivier. A quest'ultimo si deve la pubblicazione a Parigi nel 1842 dell'opera *Théorie géométrique des engranages*. Uno dei trattati italiani più importanti e completi è *La Teoria geometrica degli ingranaggi* di Giovanni Codazza (fig. 1), pubblicato a Milano nel 1854, cui segue alcuni anni più tardi il primo dei tanti contributi di Domenico Tessari a cavallo del nuovo secolo. Nel '900 lo studio geometrico degli ingranaggi non registra particolari

novità; di contro si registra un enorme progresso soprattutto tecnologico unito allo sviluppo sempre più specifico delle macchine di precisione.

Recentemente il tema è tornato di attualità anche grazie alle potenzialità offerte dalla modellazione digitale e parametrica attraverso cui è possibile costruire ingranaggi virtuali sia secondo configurazioni già ampiamente codificate sia, al tempo stesso, sperimentando nuove soluzioni potendone verificare in tempo reale l'efficacia dinamica. Grazie al crescente sviluppo delle moderne tecniche di prototipazione questi modelli virtuali possono facilmente tradursi in modelli fisici prototipali.

### **Gli ingranaggi**

Un ingranaggio si compone di diverse parti di cui quella più importante è la ruota dentata, cioè quella parte composta da elementi sporgenti, i denti, distribuiti in maniera uniforme ed intervallati da spazi vuoti, i vani. La ruota è generalmente fissata ad un albero di rotazione.

L'ingranaggio è pertanto un meccanismo elementare costituito da una ruota dentata che ingrana con un'altra ruota dentata o con una cremagliera o con una vite senza fine allo scopo di trasmettere un movimento (fig. 2). Gli ingranaggi possono essere utilizzati per trasmettere il moto rotatorio fra due o più assi, o per convertire il moto rotatorio in moto progressivo; in questo caso sono organi meccanici studiati nella cinematica, cioè nella teoria dei meccanismi<sup>1</sup>.

Su questi presupposti particolare importanza riveste lo studio delle forme geometriche dei denti, affinché la trasmissione del moto avvenga nelle condizioni più favorevoli a raggiungere la soluzione del problema dinamico. Negli ingranaggi la trasmissione del movimento avviene attraverso delle ruote dentate. In questa trasmissione di moto gli assi possono essere: paralleli, concorrenti o sghembi (fig. 3).

**1** Nel caso in cui gli ingranaggi vengono utilizzati per trasmettere l'azione di un motore ai diversi meccanismi destinati a produrre un determinato effetto meccanico, lo studio fa parte della dinamica delle macchine, attraverso cui valutare la porzione di lavoro consumata dall'attrito durante la trasmissione del movimento.

## Le linee curve per l'architettura e il design

Fig. 2/ Esempi di ingranaggi.



**2** Un altro elemento che concorre a definire un diverso tipo di ingranaggio è quello dell'attrito cioè della forza dissipativa che si esercita tra due superfici a contatto tra loro e che si oppone al loro moto relativo. Quando due linee si muovono l'una sull'altra si possono avere i seguenti casi: la prima curva ruota sull'altra senza scorrere o strisciare (attrito volvente); la prima curva scorre sull'altra senza ruotare (attrito radente); la prima curva ruota e scorre contemporaneamente sull'altra. Se nel movimento le curve si muovono l'una sull'altra mantenendosi a contatto si ha un attrito diretto; altrimenti, quando questa condizione non è soddisfatta si ha un attrito angolare. Si può avere quindi un: moto di rotazione ed attrito volvente diretto od angolare; moto di scorrimento ed attrito radente diretto od angolare.

In ciascun caso può verificarsi che il rapporto tra le velocità angolari rimanga costante oppure variabile. Nel primo caso si hanno gli ingranaggi a rapporto di velocità costante; nel secondo caso gli ingranaggi a rapporto di velocità variabile.

Un requisito fondamentale nella identificazione delle superfici dei denti è che queste debbono conservarsi a contatto durante il movimento rotatorio delle ruote; come detto, quando le superfici dei denti di due ruote di un ingranaggio soddisfano questa condizione si dicono coniugate. In un ingranaggio le superfici dei denti possono venire a contatto secondo una linea o conservarsi progressivamente a contatto in un punto. Nel primo caso l'ingranaggio si definisce di forza, nel secondo di precisione<sup>2</sup>.

La dentatura di un ingranaggio può essere esterna, interna o laterale. Il primo caso è la disposizione classica che dà all'ingranaggio una forma raggiata, con i denti rivolti verso l'esterno. Nel secondo caso questa disposizione lascia il bordo esterno liscio, mentre nella parte interna sono presenti gli ingranaggi diretti verso l'asse. Vi sono infine anche denti disposti lateralmente; questa disposizione fa assumere all'ingranaggio una forma simile a una corona di un re.

Gli ingranaggi si possono classificare prima di tutto in funzione della disposizione reciproca degli assi ed

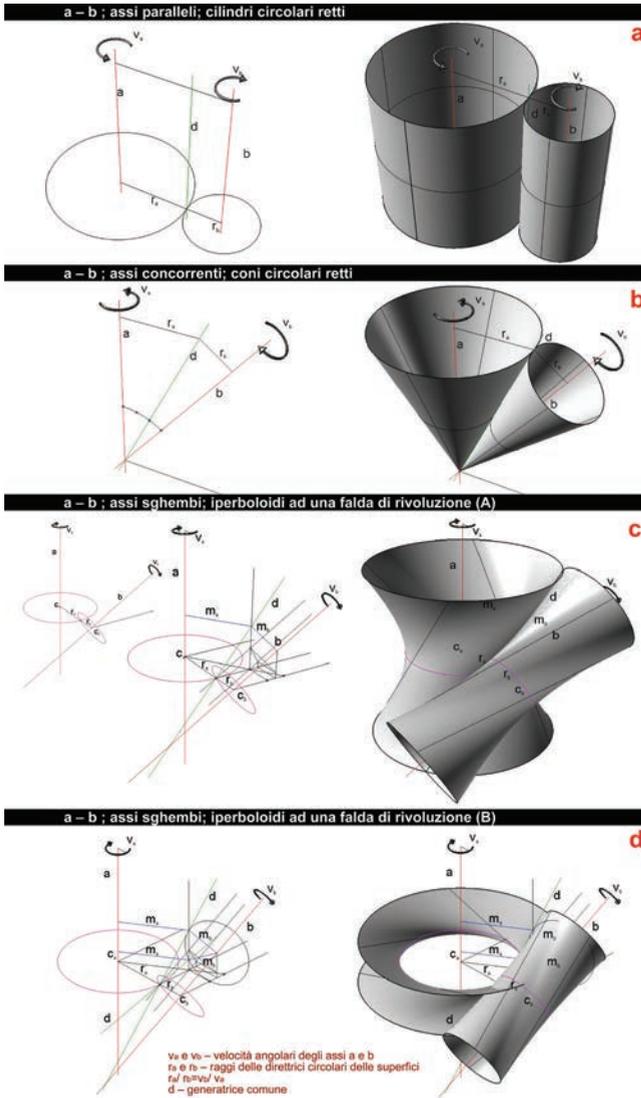


Fig. 3/ Superfici coniugate relative ai nuclei degli ingranaggi (gli elaborati di questo capitolo, ove non diversamente specificato, sono dell'autore).

anche in funzione della disposizione della dentatura, per cui si ottengono per esempio le ruote dentate semplici, elicoidali, a doppia elica, le ruote coniche a denti dritti o a corona ipoide, il rocchetto o cremagliera, la vite senza fine o ingranaggi non circolari. Tralasciando in questa sede gli aspetti geometrici legati alle diverse tipologie di nuclei (cilindrici, conici e iperboloidei) ed alle posizioni reciproche degli assi

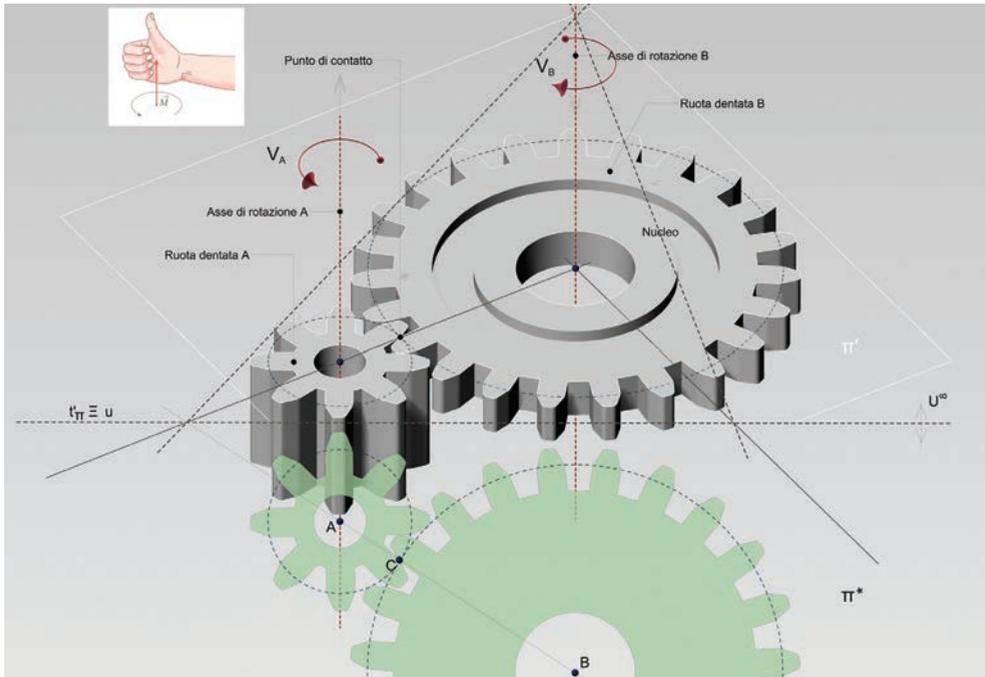


Fig. 4/ Ingranaggio semplice composto da due ruote dentate (Prokopios).

**3** Per un'analisi più approfondita sui più recenti studi sugli ingranaggi cfr. Paris 2012a, Paris 2012b, Ceccarelli, Cigola 2012, Prokopios 2015.

**4** Un ingranaggio è "semplice" quando una sola ruota conduce in una sola direzione l'altra; "simmetrico" quando una ruota può condurre l'altra sia in un verso che nell'altro; "reciproco" quando ciascuna ruota può assolvere allo stesso compito in entrambi i versi.

**5** Alcuni aspetti teorici del problema vengono necessariamente rimodulati in fase costruttiva nel momento in cui occorre tener conto del cosiddetto gioco dell'ingranaggio.

(paralleli, concorrenti o sghembi)<sup>3</sup>, vediamo in che modo le proprietà di una linea curva condizionano il profilo dei denti e, di conseguenza, la trasmissione del moto.

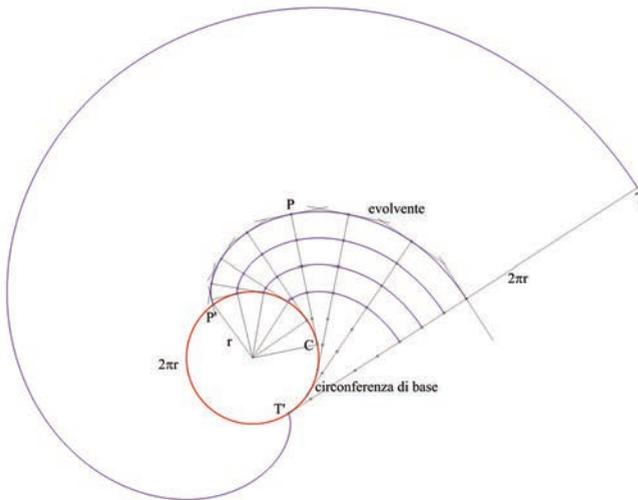
### Le linee coniugate come matrici formali dei denti di un ingranaggio

Un tipico ingranaggio è quello formato da due ruote, entrambe con nuclei cilindri, ad assi paralleli (fig. 4).

I denti hanno una estensione limitata rispetto al nucleo e nel moto rotatorio rimangono in contatto solo per una certa frazione di tempo e di spazio. L'ingranaggio quindi deve essere progettato per garantire la continuità del moto per cui quando un dente perde il contatto con il suo coniugato il dente successivo deve avere già ingranato l'altro<sup>4</sup>.

Questa condizione ha ripercussioni sulle dimensioni complessive della ruota, sul numero, sulle dimensioni e sul passo dei denti<sup>5</sup>.

Fig. 5/ Evolvente di una circonferenza.



Quale ruolo hanno le proprietà di una linea curva nella costruzione del profilo dei denti di un ingranaggio di questo tipo?

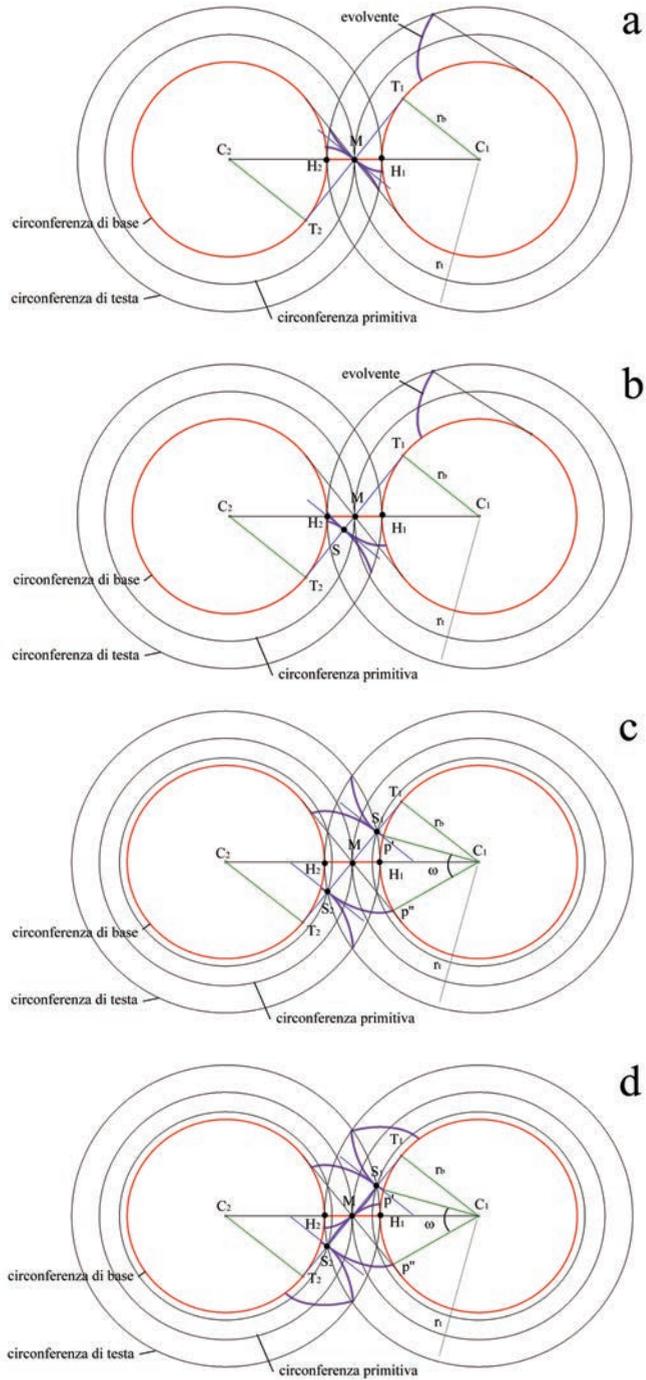
Esistono diversi metodi pratici per la costruzione del profilo di un dente ma da un punto di vista strettamente geometrico la linea che più di altre soddisfa la condizione di permanenza del contatto tra i due profili coniugati durante la rotazione è "l'evolvente della circonferenza", cioè il luogo dei punti descritto da un punto di una retta tangente in C (fig. 5) alla circonferenza di base a rotazione conclusa cade sulla circonferenza in P' percorrendo un settore circolare di lunghezza pari alla distanza del punto CP.

L'evolvente della circonferenza è l'involuppo delle perpendicolari alle rette tangenti. Per ogni punto della circonferenza è possibile costruire una famiglia di evolventi tutte equidistanti tra loro.

Una evolvente è una curva aperta a spirale in cui è identificabile un ciclo corrispondente ad una rotazione completa di  $360^\circ$  della retta tangente; cioè la distanza  $TT'$  è uguale a  $2\pi r$ .

# Le linee curve per l'architettura e il design

Fig. 6/ I profili coniugati in due ruote dentate.



Poiché per ogni punto esterno alla circonferenza è possibile costruire due diverse rette tangenti si possono ottenere due distinte famiglie di evolventi; una in cui il punto  $P$  si avvicina alla circonferenza secondo un andamento orario, l'altra antiorario.

Con un modellatore matematico si può visualizzare il comportamento di questa curva nel momento in cui si imprime al profilo coniugato un movimento rotatorio. Nel caso di due ruote dentate uguali (fig. 6), che hanno perciò la stessa velocità angolare, nel momento in cui si definiscono i due nuclei circolari delle ruote di raggio  $r$  occorre definire la distanza  $d$  tra i centri;  $d - 2r$  è l'altezza del dente. Ogni ruota ha una circonferenza di base, riferita al nucleo, ed una circonferenza di testa che include anche il profilo del dente. Si individua anche una circonferenza primitiva data dalla tangenza tra le ruote dentate il cui raggio varia in funzione dei raggi delle due ruote dentate e dalla distanza tra i due centri<sup>6</sup>.

La circonferenza di testa di raggio  $rt$  avrà un certo rapporto con il raggio della circonferenza di base  $rb$ , il cui valore è sempre  $> 1$ . Poiché la seconda ruota ha una circonferenza di base uguale, anche la seconda evolvente sarà uguale alla prima, con lo stesso verso, ma con un moto rotatorio contrario.

Date due circonferenze di base (fig. 6a),  $C_1C_2$  è la retta congiungente i due centri cui appartiene il segmento  $H_1H_2$ , cioè l'altezza del dente. Le evolventi delle circonferenze definiscono i due profili coniugati, che si incontrano nel punto medio  $M$  del segmento  $H_1H_2$ .  $T_1T_2$  è la tangente ad entrambe le circonferenze passante per il punto  $M$ . La normale alla retta  $T_1T_2$  per costruzione è anche tangente ad entrambe le due evolventi.

Se si imprime ora graficamente una stessa rotazione (fig. 6b), antioraria al primo profilo e oraria al secondo profilo si noterà che i due profili coniugati rimangono in contatto in un punto  $S$  che appartiene sempre alla

**6** Nel caso di ruote dentate uguali le due circonferenze primitive sono uguali e tangenti nel punto medio della distanza tra i due centri che è anche il punto intersezione con la tangente interna alle due circonferenze di base. Nel caso di ruote dentate a diverso raggio, e quindi con diverse velocità angolari, le circonferenze primitive sono sempre tangenti al punto intersezione tra la retta congiungente i centri e la tangente interna alle due circonferenze di base; hanno quindi raggi diversi in proporzione ai raggi delle circonferenze di base.

retta  $T_1T_2$  con una diversa normale evidentemente parallela alla prima. Tale condizione vale per qualsiasi rotazione impressa ai due profili coniugati.

Alla retta tangente  $T_1T_2$  appartengono pertanto tutti i punti di contatto tra le coppie coniugate di evolventi delle due circonferenze di base dell'ingranaggio.

La tangente  $T_1T_2$  contiene il segmento  $S_1S_2$  (fig. 6c) i cui estremi sono definiti dall'intersezione della stessa retta con le due circonferenze di testa. Questo segmento individua il campo di azione di due denti coniugati, cioè in sostanza la posizione iniziale  $S_1$  in cui il primo profilo aggancia il secondo e la posizione finale  $S_2$  in cui i due profili si staccano<sup>7</sup>.

Immaginiamo ora che l'ingranaggio che stiamo progettando sia "reciproco", che si possa cioè cambiare il senso di rotazione; questo significa che i denti avranno un profilo speculare che è un'altra evolvente (fig. 6d).

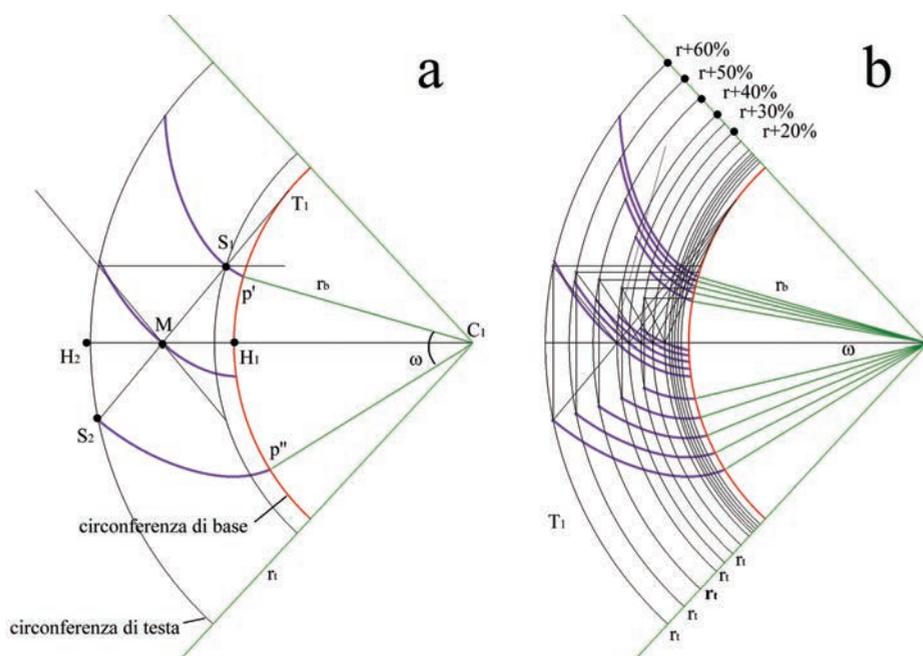
La ruota dentata è quindi formata da una serie di denti la cui geometria è definibile attraverso alcuni parametri costruttivi che sono, fondamentalmente, il numero, il passo e la dimensione dei denti. Questi vanno progettati in modo tale da garantire la continuità della rotazione ma anche la non interferenza tra i due denti coniugati.

Continuando la nostra sperimentazione, che ricordiamo è puramente geometrica e che quindi non tiene conto di valutazioni di carattere tecnico come per esempio il gioco meccanico o l'imprecisione costruttiva di alcuni raccordi, possiamo provare a calcolare qual è per esempio l'incidenza della geometria rispetto al passo, cioè la distanza tra due denti di una stessa ruota misurabile o al centro del dente o all'attacco  $P'P''$  delle due evolventi successive (fig. 7a).

Il passo dell'ingranaggio è esprimibile anche come valore dell'angolo  $\omega$  che sottende l'arco  $P'P''$ .

Sul passo dell'ingranaggio e quindi di conseguenza sul numero dei denti si possono a questo punto fare una serie di considerazioni. La prima è che il nume-

**7** L'individuazione di questo segmento è fondamentale per il corretto funzionamento dell'ingranaggio in quanto i due denti successivi devono poter "ingranare" prima che i precedenti si stacchino; questa è la condizione necessaria per dare continuità al movimento.



ro deve essere intero; l'angolo relativo al passo deve essere inferiore dell'angolo  $\omega$  altrimenti il movimento delle ruote non è continuo. Il passo infine deve essere tale da garantire il perfetto incastro senza sovrapposizioni tra i denti delle due ruote.

Il valore  $\omega$  dell'angolo è funzione esclusivamente del rapporto tra la circonferenza esterna e la circonferenza di base. Dato un arco di circonferenza di raggio  $r$  (fig. 7b) si costruisce la porzione dell'arco di circonferenza di testa come incremento percentuale di  $r$ ; nell'esempio, per  $r=10$ , la circonferenza di testa è uguale a 16. Si ricorda che la differenza tra i raggi delle due circonferenze determina l'altezza del dente dell'ingranaggio  $H_1H_2$ . Dal punto medio di  $H_1H_2$  si traccia la tangente alla circonferenza di base che incontra la circonferenza di testa nel punto  $S_2$ ; sfruttando la simmetria dell'ingranaggio è possibile individuare anche il punto  $S_1$ ; si costruiscono le due evolventi della circonferenza passanti per  $S_1$  e per  $S_2$  ottenendo il corrispondente angolo  $\omega$ .

Fig. 7/ Costruzione grafica per il calcolo dell'angolo  $\omega$  in funzione del rapporto tra il raggio della circonferenza di testa e della circonferenza di base.

## Le linee curve per l'architettura e il design

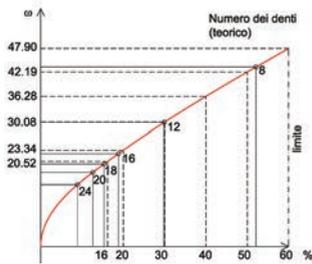


Fig. 8/ Diagramma per il calcolo teorico della circonferenza di testa in funzione al numero dei denti della ruota.

Fig. 9/ Modello di un ingranaggio con le seguenti caratteristiche: rapporto  $r_t / r_b = 1.26$ ; angolo  $\omega = 20$ ; numero dei denti = 18.

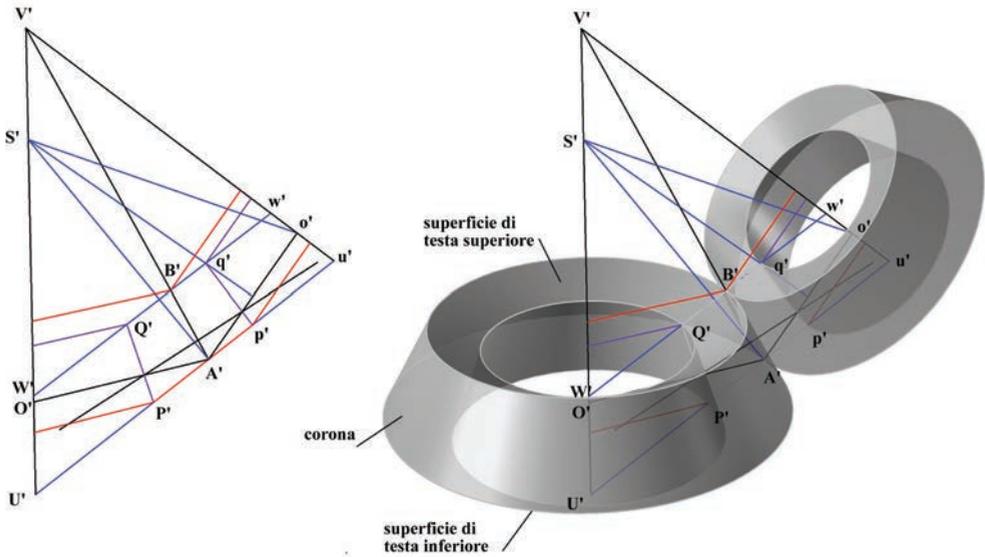


La variazione del rapporto tra il valore  $\omega$  dell'angolo e il numero dei denti può essere rappresentato in un diagramma (fig. 8): sulle ascisse l'incremento percentuale del valore del raggio delle due circonferenze, sulle ordinate il valore dell'angolo  $\omega$  con l'indicazione sulla curva risultante dei valori corrispondenti a numeri interi dei denti.

Una volta determinato quindi il passo dei denti, se si prova a disegnare l'intero profilo del dente (fig. 9), immaginandolo sempre nella condizione teorica minima e non costruttiva, con un'altra evolvente speculare a formare una specie di arco acuto si osserva che oltre un certo rapporto tra circonferenza esterna e di base, il dente non ha più lo spazio necessario per incastrarsi con l'altro. Per cui si può ricavare nel diagramma un limite oltre il quale il meccanismo non può funzionare<sup>8</sup>.

Se negli ingranaggi cilindrici, come abbiamo visto, la linea che meglio soddisfa la proprietà di mantenersi costantemente a contatto in un punto con la sua linea coniugata è la evolvente della circonferenza, nel caso degli ingranaggi conici una delle possibili soluzioni adottate nella pratica è quella di determinare l'epicicloide sferica, ottenuta dal movimento di un punto di una circonferenza che ruota, senza sci-

<sup>8</sup> In tutte le altre configurazioni al di sotto di tale soglia si verifica che è possibile allargare il profilo del dente riuscendo anche a ridurre leggermente il passo in modo da avere maggiore garanzia di continuità del moto rotatorio.



volare, intorno ad un'altra circonferenza disposta su un piano diverso, mantenendo un angolo costante. La curva appartiene alla superficie di una sfera ed è una curva gobba chiamata appunto cicloide sferica. L'elaborazione del modello digitale che viene illustrata di seguito ricalca l'esempio di un ingranaggio conico del trattato di Giovanni Codazza<sup>9</sup>.

Si individuano prima di tutto i due assi  $V'O'$  e  $V'o'$  e i raggi delle primitive  $O'A'$  e  $o'A'$ ; il segmento  $V'A'$ , la cui proiezione in pianta è  $OA$ , è l'apotema comune ai due coni primitivi (fig. 10). Poiché i raggi delle due ruote coniche sono diversi si è nel caso di ingranaggi con diverse velocità angolari, che sono, pertanto, inversamente proporzionali alle misure dei due raggi. Le due rette ortogonali all'apotema comune passanti per  $A'$  e per  $B'$  definiscono la cosiddetta corona dell'ingranaggio e le due superfici di testa, superiore e inferiore. L'altezza  $A'B'$ , che è la lunghezza dei denti può essere scelta in modo arbitrario.  $A'o'$ , ortogonale all'asse  $V'o'$ , è il diametro di una circonferenza che viene assunta come base di una cono circolare retto di centro  $S'$ , appartenente all'asse  $V'O'$ .

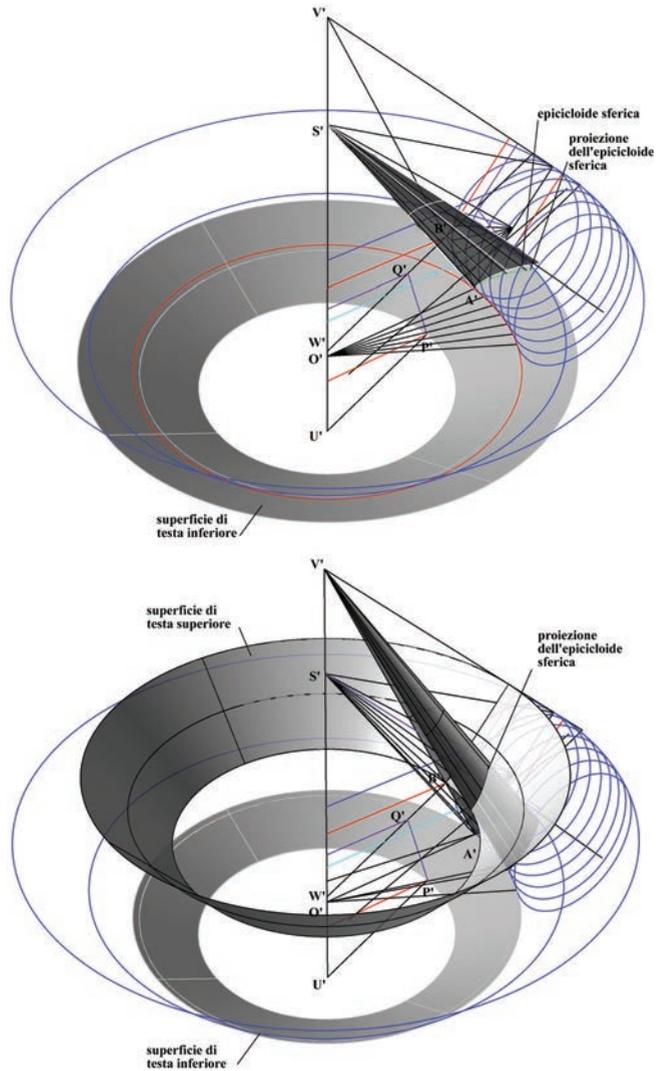
Fig. 10/ Elaborazione del modello digitale di un ingranaggio conico come descritto nel trattato di Codazza.

<sup>9</sup> Codazza 1854. Nel trattato l'ingranaggio viene rappresentato al Capo Terzo, paragrafo II, in una forma grafica sintetica in doppie proiezioni ortogonali. La figura di partenza utilizzata per la costruzione del modello digitale è la stessa, anche nell'uso delle denominazioni dei punti.

## Le linee curve per l'architettura e il design

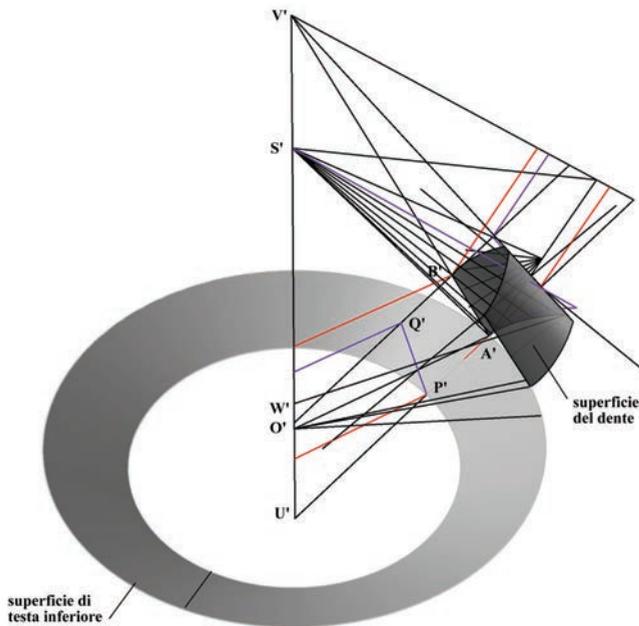
Fig. 11/ Costruzione dell'epicloide sferica e sua proiezione sulla superficie conica della testa inferiore dell'ingranaggio conico. La proiezione dell'epicloide è la direttrice della superficie conica di vertice  $S'$ , superficie che determina la configurazione di uno dei denti dell'ingranaggio.

Fig. 12/ Intersezione della superficie conica del dente con la superficie conica di testa superiore.



La rotazione di questo cono intorno alle circonferenza di raggio  $A'O'$  genera una epicicloide sferica (fig. 11); la rotazione dello stesso cono, all'interno della circonferenza di raggio  $A'o'$  genera una ipocicloide coincidente con il raggio  $A'o'$ . L'intersezione dell'asse di questo cono con la superficie di testa superiore dell'ingranaggio determina l'altezza dei denti (fig. 12). Nell'esempio illustrato l'altezza dei denti è data dai segmenti  $P'Q'$  e  $p'q'$ .

Fig. 13/ Costruzione del dente in funzione del passo dell'ingranaggio.



Per determinare le forme dei denti occorre trovare la linea intersezione del cono epicicloidale con le superfici coniche generate dalle rette  $U'A'$  e  $WB'$ . Riassumendo, nella costruzione del modello digitale si è prima di tutto determinata per punti l'epicicloide sferica, ottenuta per rotazione della circonferenza  $B$  attorno alla circonferenza  $A$ . Si è poi proiettata questa linea gobba sulla superficie conica di testa inferiore dal vertice comune dei due coni primitivi. Nello specchiare questo profilo rispetto al piano passante per l'asse del cono e per la cuspide superiore della linea si è calcolato un leggero distacco in modo da introdurre uno smusso, ottenendo così la direttrice della superficie conica di un dente con vertice corrispondente al punto di concorso dei due assi dell'ingranaggio (fig. 13). Sulla base delle considerazioni geometriche suddette è stato elaborato un modello digitale di un tipico ingranaggio conico ad assi ortogonali e rapporto di velocità costante uguale a 1 (fig. 14).

Fig. 14/ Modello digitale di un ingranaggio conico ad assi ortogonali e rapporto di velocità costante uguale a 1 (render Wissam Wahbeh).



### Concludendo

Questo saggio prende spunto da recenti studi svolti da chi scrive e da altri studiosi sulla teoria geometrica degli ingranaggi. Si è voluto evidenziare attraverso l'illustrazione di due esempi – l'uno riferito ad una particolare linea piana, "l'evolvente della circonferenza", e l'altro riferito ad una particolare linea gobba, "l'epicicloide sferica" – come sia possibile rendere evidenti concetti e proprietà, molto spesso declinati in forma astratta e quindi poco comprensibili.

Un grande aiuto, in questo senso, è dato dalla modellazione digitale e, più recentemente, dalle applicazioni di modellazione parametrica che utilizza procedure di *Visual Programming Language* (VPL) in cui il processo logico di costruzione degli oggetti (in questo caso ingranaggi) viene tradotto in forma algoritmica, scomponendo il problema complesso in concatenazioni di problemi semplici.

# Dalle linee curve alle superfici libere e viceversa nei modelli digitali dell'architettura

di Matteo Flavio Mancini

Le curve e le superfici NURBS (Non Uniform Rational B-Spline) sono caratterizzate da specifiche proprietà che le rendono particolarmente adatte alla progettazione dell'architettura e del design<sup>1</sup>. La possibilità di controllare le proprietà geometriche delle forme – come tangenza, curvatura e tipo di continuità dei raccordi – in modo continuo permette infatti una gestione accurata di forme anche complesse e non direttamente riferite a primitive geometriche elementari. In estrema sintesi si può dire che le geometrie NURBS siano caratterizzate: dall'essere geometrie continue, dall'aver la possibilità di controllare accuratamente le proprietà geometriche delle forme, dall'essere in grado di sostenere l'esecuzione di operazioni di proiezione e sezione delle geometrie rappresentate e dall'essere geometrie deformabili senza mai incorrere nell'insorgenza di spigoli<sup>2</sup>. Quest'ultima proprietà consente alle geometrie NURBS di restare smussate anche a seguito di modifiche introdotte per deformazione del poligono/poliedro di controllo (fig. 1).

**1** Ciarloni 2009, pp. 42-59.

**2** Intesi come punti o linee in cui la curvatura della geometria - curva nel primo caso, superficie nel secondo - presenti un salto netto di segno o valore, interrompendo la continuità della geometria stessa.

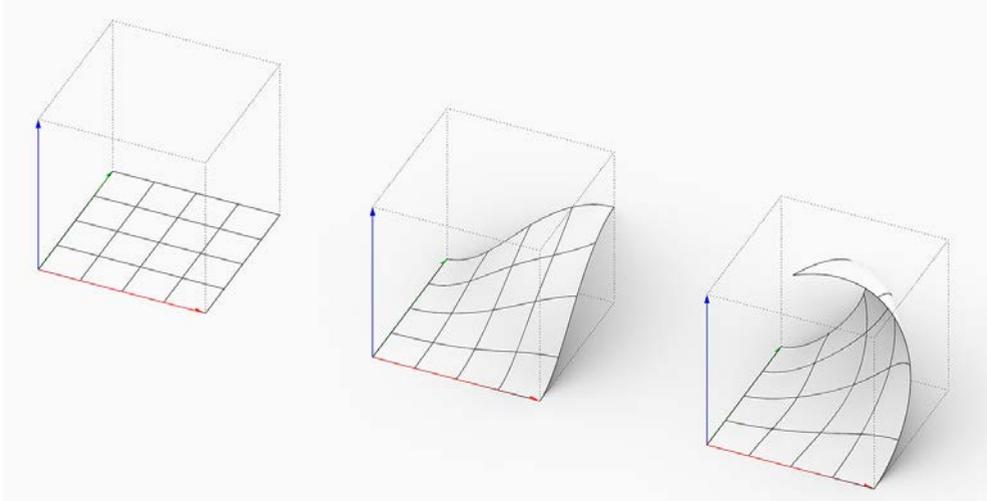


Fig.1/ Una superficie NURBS sottoposta a operazioni di deformazione resta smussata e continua.

Tale proprietà è sempre più sfruttata anche nel campo della progettazione architettonica dove la deformazione delle geometrie è diventata un'operazione compositiva che riflette nuovi atteggiamenti teorici<sup>3</sup>. Una delle protagoniste dell'introduzione in architettura di forme caratterizzate da continuità e smussatura è stata certamente Zaha Hadid (1950-2016) e proprio attraverso un suo progetto si intende esplorare il rapporto tra curve e superfici NURBS e le potenzialità offerte da queste geometrie sul versante della deformabilità.

Il progetto scelto è quello della Nordpark Cable Railway di Innsbruck (2004-2007), composto da 4 stazioni e un ponte sospeso sul fiume Inn, che collega la città alla frazione di Hungerburg da cui si può raggiungere la cima del monte Seegrube che domina la città. Le quattro stazioni del treno sono caratterizzate dal contrasto tra la struttura in cemento ancorata al terreno e le pensiline affusolate ispirate alle conformazioni dei ghiacci di alta montagna, realizzate in pannelli di vetro opaco a doppia curvatura (fig. 2).

Per la sperimentazione si è presa a riferimento la pensilina della prima stazione della Nordpark Cable

<sup>3</sup> Schumacher 2013, pp. 53-59.



Railway, la Congress Station. Non avendo a disposizione sufficienti disegni tecnici per poter ricostruire fedelmente la geometria della pensilina si farà riferimento alla vista planimetrica, desunta da immagini satellitari<sup>4</sup> (fig. 3) e ad alcune immagini, consultabili sul sito dello studio Zaha Hadid Architects<sup>5</sup>, per modellare una forma che abbia le stesse caratteristiche pur non avendo una diretta corrispondenza con quanto realizzato.

Per questa sperimentazione si è deciso di iniziare la modellazione a partire dall'immagine planimetrica. Una volta inserita questa immagine sul piano di co-

Fig.2/ Le stazioni della Nordpark Cable Railway di Innsbruck. Da sinistra verso destra: Congress station, Loewenhaus station, Alpenzoo station e Hungerburg station.

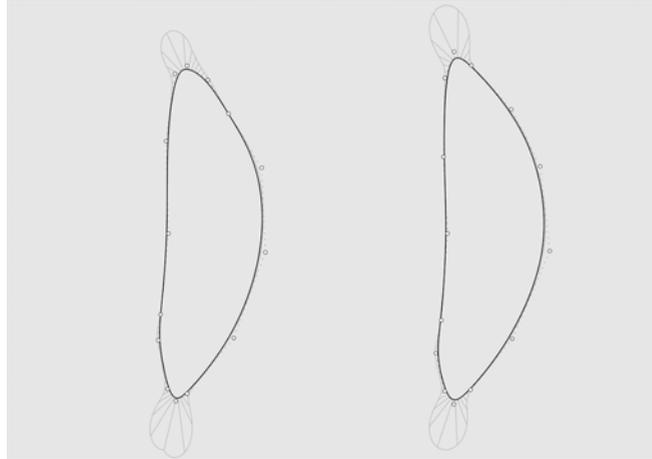
Fig.3/ Vista satellitare planimetrica della pensilina della Congress station.

<sup>4</sup> Google Earth, immagini satellitari acquisite in data 17/10/2017.

<sup>5</sup> <http://www.zaha-hadid.com/architecture/nordpark-railway-stations/>.

## Le linee curve per l'architettura e il design

Fig.4/ La linea contorno apparente della pensilina prima (a sinistra) e dopo l'operazione di ottimizzazione (a destra) eseguita con l'ausilio del grafico di curvatura.

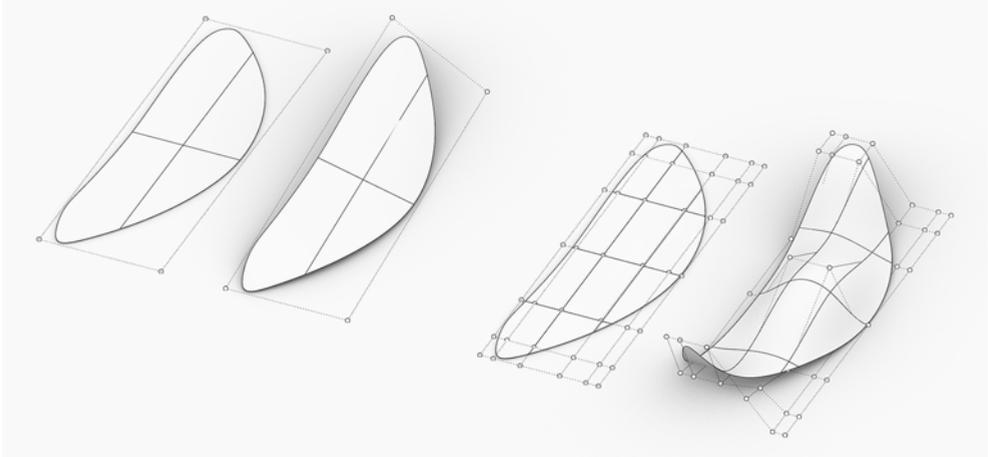


struzione  $xy$ , è opportuno ruotarla fintantoché le dimensioni principali della pensilina non siano approssimativamente parallele agli assi  $x$  ed  $y$  del sistema di riferimento. Questa operazione è importante poiché in questo modo le superfici che verranno successivamente create avranno anch'esse le isocurve  $u, v^6$  parallele agli assi cartesiani, facilitando le operazioni di modifica e deformazione.

La successiva operazione da compiere è il ridisegno del contorno apparente della pensilina. Per operazioni di questo tipo è sempre opportuno utilizzare una curva NURBS per punti di controllo poiché questa scelta porta ad un ridisegno mediato attraverso un minor numero di punti e, conseguentemente, ad una geometria più leggera da gestire nelle successive fasi. A questo primo ridisegno segue generalmente un'ottimizzazione della curva attuata tramite lo spostamento dei punti di controllo e controllata attraverso il grafico di curvatura, strumento che permette di gestire l'andamento della curva ottimizzando la variazione del valore di curvatura in ogni punto (fig. 4). Qualora i punti di controllo non fossero sufficienti è sempre possibile inserirne di nuovi o intervenire sul loro peso<sup>7</sup> per rifinire ulteriormente la forma della curva.

**6** Le isocurve di una superficie NURBS sono coordinate di superficie, sono cioè quelle linee caratteristiche che appartengono alla superficie e lungo le quali il valore dei parametri  $u$  e  $v$  è costante. Le due famiglie di linee costituiscono una maglia approssimativamente rettangolare sulla superficie.

**7** Con il termine "peso" si intende la capacità di ogni punto di controllo di attirare verso di sé la curva. Le modifiche indotte nella forma della curva dalla modifica del valore del "peso" non sono ottenibili attraverso il solo spostamento del punto di controllo stesso. Valenti 2008, 154.



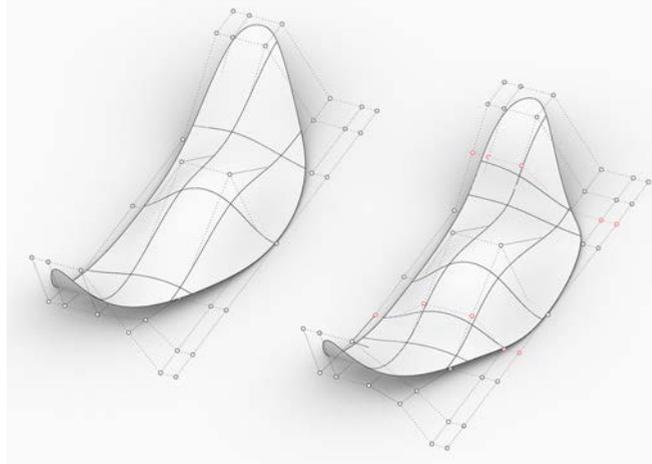
Definita in questo modo la linea curva contorno apparente della pensilina è possibile realizzare una superficie piana che, per costruzione, avrà il minor numero possibile di punti di controllo, ovvero 4. Tale condizione è particolarmente vincolante poiché consente la deformazione della superficie solo in corrispondenza di tali punti mentre, per avvicinarsi alla forma reale della pensilina, sono evidentemente necessari un maggior numero di punti di controllo. L'incremento dei punti di controllo, con il conseguente aumento delle possibilità di modifica locale della forma, può essere ottenuto su tutta la superficie attraverso un'operazione di ricostruzione topologica della superficie stessa. In questa operazione è possibile indicare il numero di punti di controllo che si vuole raggiungere. Conclusa l'operazione la differente distribuzione dei punti di controllo è evidente come lo è l'aumento delle opportunità di modifica della superficie (fig. 5).

Attraverso il poliedro di controllo è dunque possibile procedere, passando per successive approssimazioni, alla deformazione della superficie piana fino alla configurazione finale desiderata. Questa operazione di tipo quasi scultoreo mette bene in evidenza la proprietà delle geometrie NURBS di deformarsi

Fig.5/ La ritopologizzazione della superficie permette di aumentare il numero dei punti di controllo e di conseguenza la possibilità di modifica locale della forma. Da sinistra verso destra: la superficie originale con una sua deformazione; la superficie ritopologizzata con una sua deformazione.

## Le linee curve per l'architettura e il design

Fig.6/ Per intervenire localmente su una superficie NURBS è possibile inserire dei punti di controllo. L'operazione comporta la creazione di una nuova suddivisione della superficie. A destra, in rosso, i nuovi punti di controllo inseriti.



senza perdere mai la prerogativa dell'essere geometrie smussate, senza spigoli. Analogamente a quanto avviene per le curve, mentre si lavora su superfici NURBS è sempre possibile aggiungere punti di controllo. Questa operazione nel caso delle superfici comporta l'introduzione di una serie di punti di controllo collegati ad una nuova suddivisione della superficie (fig. 6), non è invece possibile aggiungere un singolo punto di controllo isolato poiché darebbe vita ad una singolarità topologica<sup>8</sup>. Un ulteriore strumento di ausilio alle modellazioni che comportano operazioni di deformazione è la possibilità di verificare in tempo reale la curvatura gaussiana della superficie attraverso una mappatura in falsi colori applicata alla superficie analizzata. La curvatura gaussiana di una superficie è definita come il prodotto delle due curvature principali misurate nel punto analizzato e può essere positiva, negativa o nulla a seconda che le curvature siano concordi, discordi o che una delle due sia nulla<sup>9</sup>. Questa opportunità, concettualmente analoga alla visualizzazione del grafico di curvatura per le linee, consente di controllare la forma della superficie verificando che le variazioni della curvatura siano il più possibile fluide e uniformi.

**8** Punti singolari che rompono la maglia quadrangolare di isocurve tipiche delle superfici NURBS e si connettono a più isocurve sono consentiti da altri algoritmi di modellazione come le superfici T-spline. Sederberg 2003, pp. 477-484.

**9** Migliari 2009b, pp. 148-149.

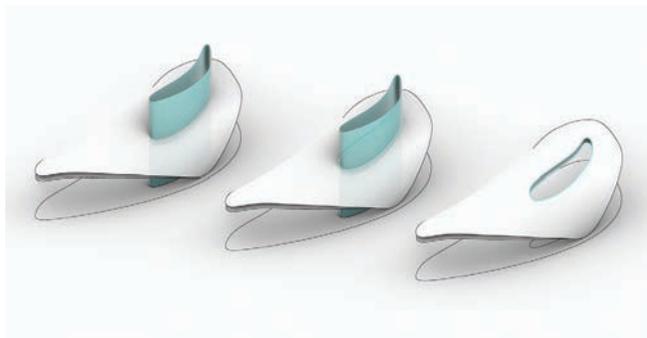


Fig.7/ Operazioni di proiezione e sezione applicate a superfici NURBS. Da sinistra a destra: proiezione di linee piane (in azzurro il cilindro proiettante) e creazione delle linee gobbe proiezione sulle superfici; sezione delle superfici attraverso le linee gobbe proiettate.

Una volta definita la superficie di estradosso della pensilina è possibile ottenere l'intradosso attraverso un'operazione di offset. Il risultato è una superficie che generalmente ha una distribuzione delle isocurve più densa e irregolare rispetto alla superficie di riferimento, perciò è sempre opportuno operare una ricostruzione della superficie di offset applicando parametri topologici analoghi a quelli della superficie di riferimento. Sulla superficie ritopologizzata è nuovamente possibile intervenire attraverso il poliedro di controllo per modificarne la forma rispetto a quella della superficie esterna.

La pensilina della Congress Station è inoltre caratterizzata dalla presenza di una apertura di forma allungata. Per realizzare tale apertura si può nuovamente ricorrere alle proprietà delle geometrie NURBS che consentono al progettista di eseguire operazioni tipiche della geometria descrittiva come quelle di proiezione e sezione. È infatti possibile ridisegnare il contorno apparente dell'apertura sul piano orizzontale di costruzione  $xy$  per poi proiettarla ortogonalmente su entrambe le superfici ed utilizzare le due curve gobbe così ottenute per tagliare le superfici stesse (fig. 7). Ottenute in questo modo le superfici di estradosso ed intradosso della pensilina si deve creare le superfici di raccordo tra le due. Trattandosi di superfici curve complesse l'operazione richiede la corretta gestione dei concetti di curvatura, cui abbiamo ac-

## Le linee curve per l'architettura e il design

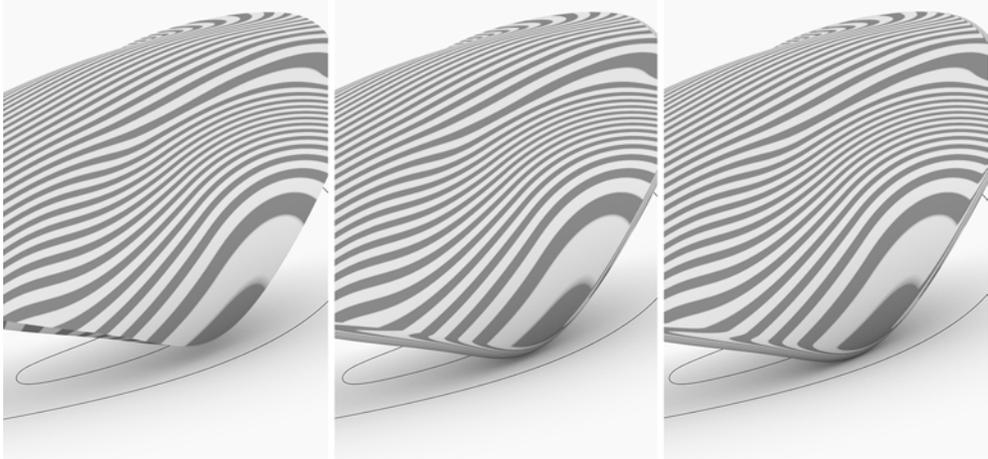


Fig.8/ Superfici di raccordo con diverse tipologie di continuità. Da sinistra a destra: continuità di posizione, le striature dell'analisi zebra sono spezzate e sfalsate tra le diverse superfici; continuità di tangenza, le striature dell'analisi zebra sono allineate tra le diverse superfici ma presentano dei punti di discontinuità; continuità di curvatura, le striature della zebra sono continue e allineate tra le diverse superfici.

cennato in precedenza, e di continuità delle superfici. Nella modellazione NURBS i problemi legati alla curvatura e alla continuità di giunzione sono affrontati in maniera rigorosa e continua in ogni punto delle geometrie su cui si sta lavorando. In particolare è possibile imporre alle superfici di raccordo tre diverse condizioni di continuità in ragione del risultato formale che si vuole ottenere: una continuità di tipo  $G0$  (posizione) porta alla creazione di uno spigolo, quindi di una linea di discontinuità netta caratterizzata da un brusco cambiamento dei valori di curvatura della superficie; una continuità di tipo  $G1$  (tangenza) consente una transizione fluida tra le superfici iniziali e quella di raccordo e garantisce che i piani tangenti alle superfici lungo le linee di giunzione abbiano la stessa giacitura; infine una continuità di tipo  $G2$  (curvatura) permette una transizione ancora più fluida tra le superfici e la superficie di raccordo poiché assicura la continuità dei valori di curvatura. La creazione delle superfici di raccordo gode inoltre della possibilità di utilizzare sezioni guida e "maniglie" per regolare l'andamento della giunzione tra le superfici iniziali e quella di raccordo. I diversi tipi di continuità hanno conseguenze non solo formali. Attivando infatti la cosiddetta

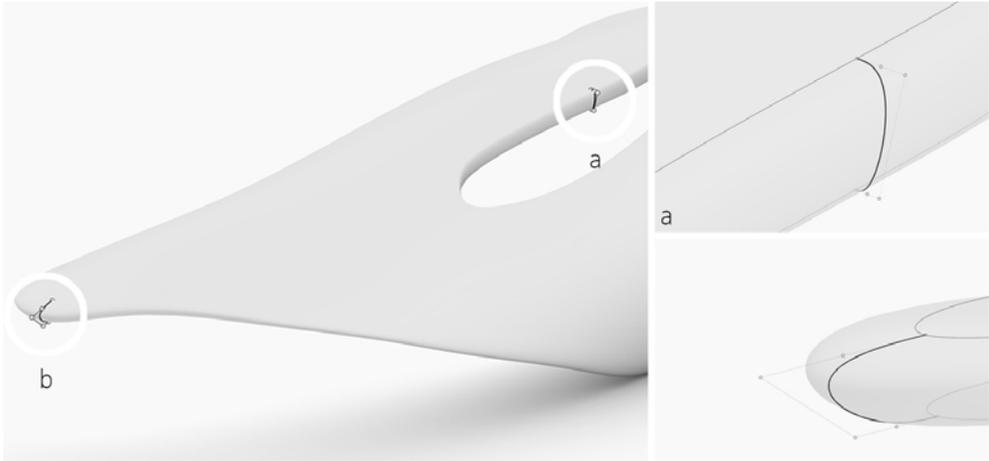


Fig.9/ Differenti regolazioni delle curve guida delle superfici di raccordo. In entrambi i casi è garantita la continuità di curvatura tra superfici ma con diversi esiti formali.

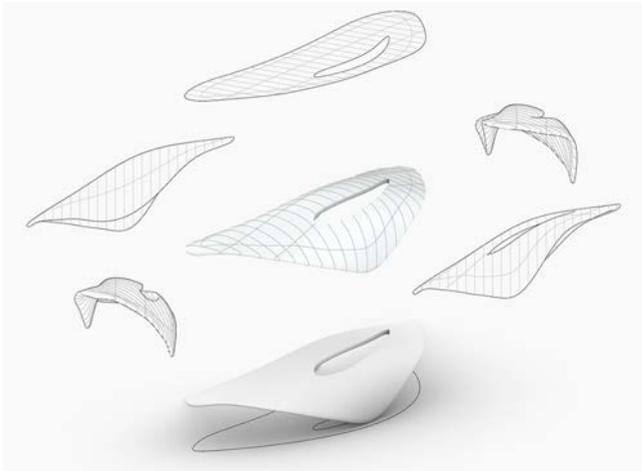


Fig.10/ Da un modello NURBS è possibile estrarre nuove linee attraverso operazioni di sezione o di proiezione del modello stesso.

“analisi zebra” è possibile valutare la qualità della giunzione e l’effetto del tipo di continuità scelta sui riflessi che si genererebbero sulla superficie se questa fossa realizzata in un materiale perfettamente riflettente (fig. 8). Nel caso di studio si è deciso di applicare una continuità di tipo  $G2$  (curvatura) e di imporre, attraverso la regolazione delle “maniglie”, una asimmetria nella superficie di raccordo lungo il bordo esterno, ottenendo così una sezione più dinamica e slanciata, e una soluzione simmetrica e più morbida per la superficie di raccordo in corrispondenza dell’apertura superiore della pensilina (fig. 9).

## Le linee curve per l'architettura e il design

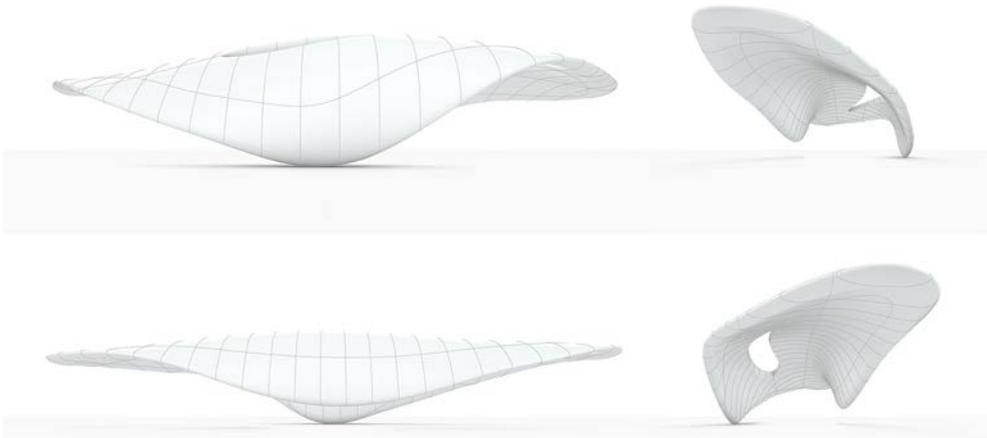


Fig.11/ Viste del modello ispirato alla pensilina della Congress station.

Infine, grazie allo stretto rapporto che intercorre tra curve e superfici nella modellazione NURBS, è possibile estrarre dal modello diverse serie di sezioni piane, proiettare sul modello altre linee visibili nella vista planimetrica e ancora estrarre elaborati vettoriali bidimensionali come piante, sezioni, alzati e viste assonometriche e prospettiche ottenendo così, oltre ai canonici disegni di progetto, un ulteriore livello di controllo sulla forma che si è appena modellata, facendo un passo verso la sua effettiva costruzione (figg. 10 e 11).

Questa sperimentazione dimostra come, nella modellazione NURBS, ci sia uno strettissimo legame tra le linee e le superfici e tra le proprietà delle une e delle altre. Proprio questo legame è alla base del largo uso che questo tipo di rappresentazione trova nei campi della progettazione architettonica e del design poiché qui, forse più che in altri settori, le linee possono essere considerate a tutti gli effetti l'ossatura delle superfici che definiscono le forme progettate.

# Traiettorie curvilinee tra architettura, teatro, cinema e design

di Massimo Zammerini

Nella natura la linea curva è immanente. Il sistema solare, i vegetali, gli animali, gli esseri umani, tutti noi siamo tenuti in vita da complessi sistemi governati anche da elementi curvilinei. La linea retta è una particolare condizione della linea curva. La forza di gravità agisce su di un asse rettilineo lungo il quale il centro della terra esercita la sua attrazione fino alla crosta terrestre e oltre, entro una certa distanza. Ciò permette ai corpi e agli oggetti di non disperdersi nello spazio infinito. La linea retta esprime forza. Per trattenere un oggetto con una fune tiriamo la fune, finché essa assume una connotazione rigida e rettilinea. La curva, per contro, sembrerebbe rimandare all'idea della morbidezza, ad una forma di "piegatura" che investe la materia, ad un'idea di diversa continuità, di crescita e di varietà delle forme, ma è essa stessa anche espressione di energia e di forza, come dimostra la scienza dell'architettura e dell'ingegneria e la storia dell'arte. Nel movimento artistico dell'*Art Nouveau*, solo per fare un esempio, "il

colpo di frusta" sintetizza la duplice valenza iconica della curva, capace di esprimere fundamentalmente un'energia di tipo muscolare, come nelle opere di Victor Horta o Henry van de Velde.

L'architettura è condizionata dalle leggi di gravità. Per sostenere il proprio peso un edificio deve far penetrare in profondità le fondamenta, e deve erigersi lungo direttrici perpendicolari al terreno per non crollare. La storia dell'architettura ci insegna come ogni epoca abbia espresso un'idea del rapporto tra il peso e la forma degli edifici, ma anche dei mobili e degli oggetti, fino alle forme aerodinamiche studiate per sfidare i vincoli del peso, come nelle automobili, negli aerei e nelle navi dove appunto la linea curva è matrice formale funzionale allo scopo. La ricerca di un affrancamento ideale dal peso e dalla gravità, o la sua enfaticizzazione, hanno sempre interessato gli artisti, gli ingegneri, gli architetti e i designers, con motivazioni differenti: nella scultura, nelle correzioni ottiche degli edifici classici, nelle membrature delle cattedrali dal Gotico al Rinascimento, nell'arte e nell'architettura barocca, nei riboboli del Barocchetto e, con rinnovato vigore, nelle Avanguardie del Novecento, fino, solo per fare pochi esempi, a Pierluigi Nervi, Riccardo Morandi e Sergio Musumeci. Parliamo in questi tre autori di un uso della linea curva in un contesto che agisce sulla costruzione, con modalità che accolgono o rifiutano i postulati cartesiani basati sulla separazione degli elementi. Nell'importante saggio sulla piega<sup>1</sup> Deleuze, in riferimento al Barocco, analizza la questione per noi centrale del rapporto tra materia organica e materia non organica, e le parole che ricorrono sono vita, fluidi, linea curva, molla. Ma dobbiamo sgombrare subito il campo da un equivoco: le forme dell'architettura sono altra cosa dalle forme naturali. L'elemento naturale è immanente poiché le forme dell'architettura sono pensate dagli uomini e vanno

<sup>1</sup> Deleuze 2004.

collocate in un contesto di natura, ma il tipo compositivo del sistema ordinatore è diverso. Tuttavia il superamento di una netta separazione tra organico e razionale permette di studiare l'opera di architettura come prodotto di sintesi tra risposte ad esigenze di tipo naturale e processi ideativi di tipo astratto. Inoltre, parlare di linea curva non significa escludere la linea retta, e i due elementi rappresentati dal piano e dal volume.

In un contesto così ampio, e sicuramente sfuggente, approfondiremo uno dei tanti aspetti che scaturiscono più dall'osservazione che da un rigoroso approccio scientifico, ovvero l'idea di uno spazio definito da "traiettorie", anche di tipo curvilineo, in alcuni campi inerenti l'architettura, partendo, non così stranamente, dal teatro, nella doppia accezione di edificio teatrale e di spazio scenico. Tra le discipline che hanno con l'architettura un legame strettissimo, la scenografia è una forma d'arte fortemente inclusiva che si confronta con la letteratura, con la musica, con le arti plastiche e le arti figurative, con la recitazione, con la danza, semplicemente perché non può farne a meno, poiché il suo compito è quello di costruire "con" queste discipline uno spazio che esprima fin dal suo essere pensato, e non ancora espresso, un elevato livello di complessità, direi omnicomprensivo, una "pratica" che rifugge ogni chiusura strettamente disciplinare.

Nella scenografia, che è una particolare forma di progetto dove il rapporto spazio/tempo è plasmato da istanze narrative, assistiamo ad una manipolazione molto complessa dell'uso della geometria, anche della geometria curvilinea. Nell'impostazione del teatro all'italiana la linea curva è strutturante, ha una funzione radunante che collega lo spazio della scena con quello del pubblico in un rituale che ha leggi proprie, e risolve le esigenze acustiche e di visibilità. In epoca barocca, grazie agli studi di Fer-

## Le linee curve per l'architettura e il design

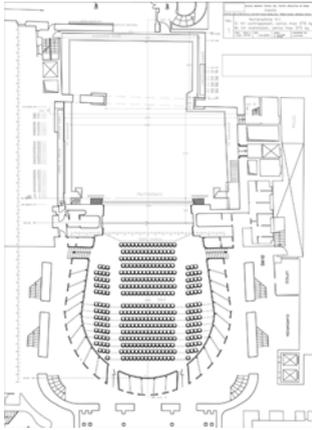


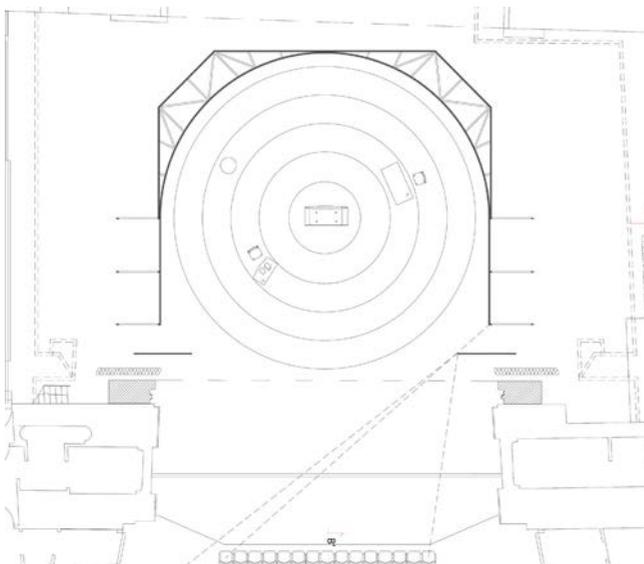
Fig. 1/ Pianta "a ferro di cavallo" del Teatro Argentina di Roma, progettato nel 1730 da Gerolamo Theodoli.

dinando Galli da Bibbiena, la pianta della sala presenta la forma "a campana" o "a ferro di cavallo", risultato di un lungo processo di affinamento teso a trovare la forma ideale dal punto di vista acustico e visivo che stabilisca delle convergenze tra scena e pubblico, particolarmente adatta al Teatro Lirico e anche al Teatro di Prosa (fig.1). Lo spazio del palcoscenico, pur presentando una pianta fondamentale rettangolare, viene utilizzato per la scenografia nella sua porzione centrale ed è nella sezione che si può sviluppare il tracciato della curva di visibilità. L'impianto scenico risulta poi inscritto in un cono tridimensionale dove tutti gli elementi della scena devono essere visibili, con maggiore o minore godibilità, da tutti i posti della sala, della platea, dei palchi e delle gallerie. La pianta e la sezione di un teatro, e il progetto della scenografia di ogni singolo spettacolo, sono assoggettate ad un sofisticato controllo dei cosiddetti "traguardi". Il traguardo, detto in gergo anche "sforo", viene controllato in pianta dalle due poltrone di platea poste nella prima fila all'estremità destra e sinistra, e individua graficamente, mediante delle rette, i "buchi" tra gli elementi che compongono la scenografia attraverso i quali lo spettatore rischia di vedere le parti di palcoscenico che dovrebbero rimanere celate alla vista, a meno che la regia non preveda un'esibizione a vista della macchina scenica e dei suoi trucchi (fig. 2). Il controllo dei traguardi in sezione avviene sempre dalle poltrone della prima fila e serve per individuare e risolvere le zone che rimangono scoperte e che rischiano di lasciare intravedere le parti tecniche come i proiettori delle luci, i tiri contrappesati, la graticcia e la struttura del palcoscenico (fig.3). Questo complesso sistema di controlli in pianta e sezione condiziona non poco il progetto scenico che deve permettere oltretutto agli attori di entrare agevolmente in scena dai lati, dal fondo e, quando possibile, dall'alto o dal



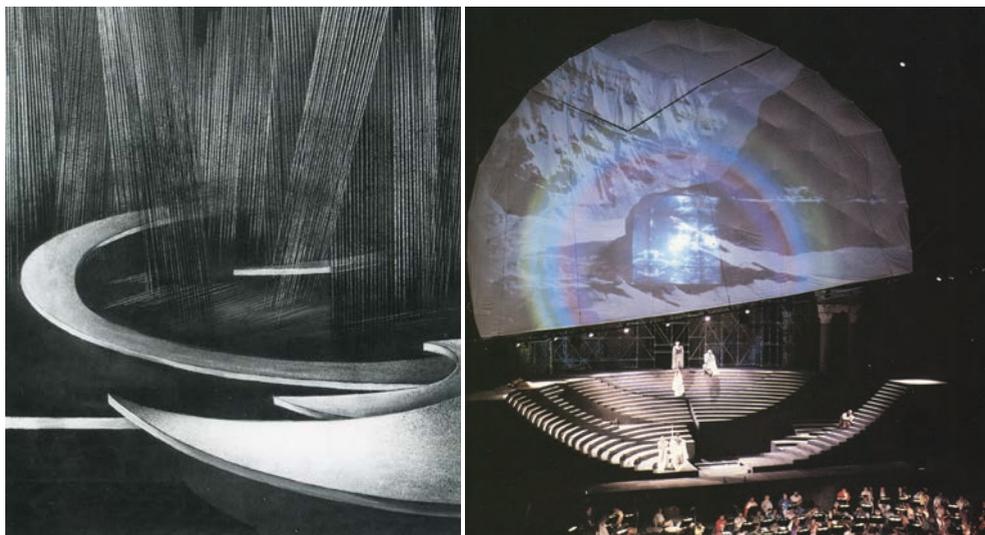
## Le linee curve per l'architettura e il design

Figg. 4, 5/ Scenografia con cambi di scena a vista su palcoscenico girevole per *Spettri* di Henrik Ibsen. I personaggi e gli elementi di arredo rimangono fissi ma sono mossi dalla rotazione degli anelli concentrici della pedana e appaiono e scompaiono con i puntamenti delle luci. Progetto di Michelle Paoli per il Corso di Scenografia diretto da Massimo Zammerini.



po a questa dimensione spazio/temporale complessa, talvolta imposta dalla drammaturgia, che può richiedere trasformazioni a vista della scena in relazione a spostamenti nel tempo e nello spazio sotto l'occhio dello spettatore. Un esempio importante, tra i tanti sistemi di cambi di scena a vista<sup>2</sup>, è l'adozione del "girevole" e del "doppio girevole", un'estensione rispetto al concetto ispiratore dei *periaktoy* di origine greca. Il girevole è una pedana di forma circolare con un perno centrale, talvolta integrata al piano di palcoscenico, divisa in settori concentrici, che permette la rotazione dei vari elementi

<sup>2</sup> Zammerini 2012.



che compongono la scenografia secondo traiettorie di tipo circolare. Una macchina scenica nella quale lo spettatore, che può vedere solo una porzione del girevole inquadrata dal boccascena, viene quasi risucchiato nella dimensione ciclica del tempo passato, presente e futuro, o nella simultaneità delle situazioni che si sovrappongono, in un tempo non più lineare, bensì appunto "circolare" e "ciclico". Quando il girevole è composto di più anelli concentrici che possono girare liberamente in versi paralleli o contrari, e anche a velocità differenti, le possibilità espressive sul piano cinetico si moltiplicano in modo esponenziale. Molti gli esempi, come la scenografia ideata da Luciano Damiani per *Macbeth* di Verdi, dove un gigantesco monolite di ferro scuro gira su sé stesso nel buio del palcoscenico, preparando colpi di scena magistrali come l'ingresso laterale del lungo tavolo del banchetto ricoperto di velluto rosso sangue che trapassa il monolite posto di taglio rispetto al proscenio come fosse un lungo coltello insanguinato, sequenza shock resa ancor più efficace dall'apparizione delle streghe. O nelle numerose opere del grande maestro Josef Svoboda<sup>3</sup> (figg.

Fig. 6/ Josef Svoboda, scenografia per *La storia di un uomo autentico* di Sergej S. Prokof'ev, Teatro Nazionale di Praga, 1961.

Fig. 7/ Josef Svoboda, scenografia per *L'anello del Nibelungo* di Richard Wagner, Théâtre Antique, Orange, 1988.

<sup>3</sup> Svoboda 1997; Carlucci, Soresi, Ursini Ursic 1984.



Fig. 8/ Josef Svoboda, scenografia per *Tosca* di Giacomo Puccini, Grande Opera del teatro del 5 Maggio, Praga, 1947.

6,7,8,9,10) dove la ricerca sui valori espressivi della forma circolare si associa ad un'immaginifica manipolazione della realtà supportata dai materiali più disparati come la garza, il cartone pressato, i velari di tulle, il metallo ecc. trovati e reinventati con una sensibilità che lo accomuna ai grandi artisti come Alberto Burri, con i celebri "sacchi" e i "cellotex", e Mario Ceroli, con l'uso magistrale dei profili lignei. Un'estetica dello spazio curvo connota anche molte trasfigurazioni scenografiche liberamente ispirate a celebri soluzioni architettoniche barocche (fig. 11), come le scene di Ezio Frigerio per la *Medea* di Gluck<sup>4</sup>, o la vasta, magistrale produzione di Pier Luigi Pizzi<sup>5</sup>. Alcune sperimentazioni sul tema della curva nella scenografia sono state per me oggetto d'interesse anche in ambito didattico. Tra le tante, ricordo le scene per *Didone abbandonata* di Pietro Metastasio per una Tesi di laurea in Scenografia<sup>6</sup> (figg. 12, 13), un progetto che ripropone il doppio girevole, sul quale si avvicendano e si sovrappongono quinte curvilinee che definiscono spazi concavo-convessi, e dove l'impianto scenico si mostra anche di taglio rispetto al pubblico, con i cambi di scena richiesti dal

<sup>4</sup> Ursini Ursic 2001.

<sup>5</sup> Arruga, Cella 2006.

<sup>6</sup> S. Miccoli, Tesi di laurea in Scenografia per *Didone abbandonata* di P. Metastasio, relatore M. Zammerini, correlatore C. Albarello in: Zammerini 2017a.

## Traiettorie curvilinee tra architettura, teatro, cinema e design



Fig. 9/ Josef Svoboda, scenografia per *Tristano e Isotta* di Richard Wagner, Hessisches Staatstheater, Wiesbaden, 1967.

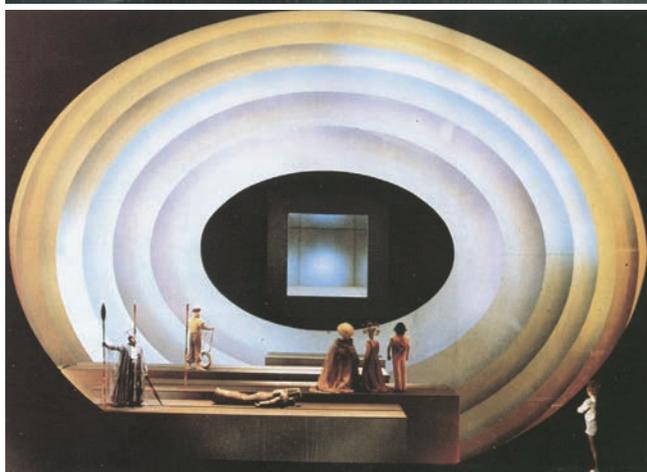


Fig. 10/ Josef Svoboda, scenografia per *Loro del Reno* di Richard Wagner, Grand Théâtre, Ginevra, 1976.

libretto. Il tempo circolare è interno al “viaggio nel tempo”, una costruzione letteraria alla quale dare spazio, forma e luce, sul quale anche la scienza si interroga, come nello spettacolo diretto nel 2002 da Luca Ronconi *Infinities* tratto dal lavoro del cosmologo e docente di matematica John David Barrow, ambientato alla Bovisa negli ex depositi di scene e costumi del Teatro alla Scala di Milano, oggi distrutti dalle fiamme.

Un altro elemento che sfrutta le proprietà intrinseche della forma curvilinea e perviene fino ai nostri giorni dalla scenotecnica dei teatri è il “panorama”, una struttura interna al palcoscenico, della quale si



Fig. 11/ Gian Lorenzo Bernini, particolare dell'abside della chiesa di S. Andrea al Quirinale a Roma, 1658-78, foto M. Zammerini.

dotavano i teatri di una certa importanza, la cui virtù è quella di offrire una sorta di immenso "foglio bianco", caratterizzato da una pianta stondata sugli angoli, ideale sfondo neutro da utilizzare con diverse finalità. Spesso sostituito, a causa degli alti costi di manutenzione, da un meno efficace sistema di fondali e quinte laterali, il concetto del panorama si evolve e si arricchisce nei primi anni del '900 grazie a Mariano Fortuny con l'ideazione della "Cupola Fortuny", una sorta di panorama tridimensionale in forma di semi calotta sferica retrattile, formata da due strati di tela gommata separati da un vuoto d'aria che permetteva di tenerla perfettamente tesa, una sorta di cielo infinito, all'interno del quale collocare intere scenografie ed "oggetti scenici" che sembrassero galleggiare in un fondo omogeneo<sup>7</sup>. La geometria curvilinea della semi-calotta sferica risultava ottimale perché non presentando né spigoli, né

<sup>7</sup> Mello 1987.



angoli, né variazioni chiaroscurali, offriva agli scenografi una base neutra tridimensionale equivalente ad un enorme abside, piegata però anche nella parte alta, capace dunque di risolvere in un colpo solo gran parte dei traguardi in pianta e in sezione. Una soluzione stupefacente, con armatura metallica e un diametro massimo del mezzo arco di 25 metri, che ha avuto vita breve per i costi altissimi di manu-

Figg. 12 e 13/ Progetto di Tesi di Laurea in Scenografia di Susanna Miccoli per *Didone abbandonata* di P. Metastasio, relatore M. Zammerini, correlatore C. Albarello, 2015. Cambi di scena a vista su pedana con doppio girevole.

## Le linee curve per l'architettura e il design



Fig. 14/ Oscar Schlemmer, coreografie per *Triadisches Ballet* su musiche di Paul Hindemith, 1922.



Fig. 15/ Marcel Breuer, Sedia Cesca a sbalzo realizzata con la tecnica della curvatura del tubolare in acciaio a sezione cava per la struttura portante e con la tecnica della curvatura a caldo del legno di faggio per la seduta e lo schienale impagliati a mano, 1927.

tenzione. Proprio la costrizione imposta dalla scatola scenica, che ha dimensioni limitate nella torre scenica in altezza, larghezza e profondità ha indotto gli scenografi a vere e proprie sfide verso il raggiungimento di effetti che potessero trascenderne i vincoli fisici, peraltro uno spazio completamente buio che si anima di sola luce artificiale, che deve essere ideata e controllata con enorme maestria, che ha radici e tradizioni molto lontane. Il trionfo dell'illusionismo perpetrato mediante artifici prospettici fin dal Quattrocento grazie alla scoperta delle regole della prospettiva, le alterazioni scalari, le sovrapposizioni tra la dimensione pittorica e quella di oggetti tridimensionali sono solo alcune delle molte tecniche e degli artifici dei quali il progetto scenico si è sempre servito. Se nelle scenografie per il teatro di prosa e per il teatro lirico lo spazio non è necessariamente caratterizzato da geometrie curvilinee, nella danza le coreografie hanno un considerevole impatto visivo, e sono impostate su una concertazione di movimenti che disegnano traiettorie fondamentalmente curvilinee e dinamiche: nel balletto classico, nella danza moderna, fino alle frontiere della danza contemporanea con le sperimentazioni sulla *motion capture*, dove i danzatori indossano dei sensori

che trasmettono la geometria del proprio movimento ad un software che riproduce le traiettorie dei movimenti sulla scena, una forma di sperimentazione che raccoglie l'eredità delle avanguardie. E come non ricordare il Triadisches Ballet del 1922 di Oscar Schlemmer su musiche di Paul Hindemith, dove le coreografie sono governate da una geometria di traiettorie fondamentalmente curvilinee, una sintesi "architettonica" sul tema dello spazio che introietta coreografia, costume, scenografia, arti figurative e arti plastiche e su tutto una partitura musicale sperimentale, un capolavoro che aveva indicato con chiarezza la strada di un nuovo linguaggio espressivo, nato in ambito Bauhaus (fig. 14). Sono gli stessi anni, non dimentichiamolo, delle sperimentazioni sulle proprietà della curvatura del tubolare in acciaio che troverà magistrali applicazioni nell'ideazione di molti modelli di sedie firmate prima da Mart Stam e poi da Marcel Breuer, Ludwig Mies van der Rohe, Le Corbusier, Eileen Gray<sup>8</sup> (fig. 15). In questi anni preziosi che vanno dal 1920 alla metà degli anni trenta, grazie ad uno speciale rapporto tra arte e industria, improntato ad una volontà di dare forme nuove per la vita della civiltà industrializzata, l'Europa fornisce un contributo importantissimo prima con le avanguardie e successivamente con quegli adattamenti, con quei perfezionamenti del "prodotto", che proprio l'industria richiede. Ecco quindi che le ricerche dei Costruttivisti russi sull'arte cinetica, e in particolare le opere di El Lissitzky e Vladimir Tatlin, avranno un'enorme influenza sulle nuove idee del Movimento Moderno, non sufficientemente sottolineate<sup>9</sup>. Le Corbusier con la Villa Savoye a Poissy del 1925 (fig. 16) e Berthold Lubetkin con la Penguin pool del 1933 per lo Zoo di Londra, inscenano delle vere e proprie regie del movimento, utilizzando la rampa come supporto ideale per movimenti lenti e fluidi che trasformano il fruitore in osservatore dinamico,



Fig. 16/ Le Corbusier, Villa Savoye a Poissy 1925-29, particolare della scala interna, foto M. Zammerini 1988.

<sup>8</sup> Cfr. Zammerini 2017b.

<sup>9</sup> Cfr. Quilici 1991.



Fig. 17/ Fotogramma da *Notorius* di Alfred Hitchcock, 1946. Particolare della scala a rampa curvilinea.



Fig. 18/ Fotogramma da *Sunset Boulevard* di Billy Wilder, 1950. Scena finale dell'arresto della protagonista ai piedi della scala curvilinea.

la condizione dell'uomo moderno nello spazio, che affrancandosi dalle visioni prospettiche rinascimentali viene traghettato nelle modalità proprie della rappresentazione che nasce con il secolo nuovo: il cinema. Nel cinema il movimento della telecamera è parte fondamentale del linguaggio espressivo del film, del quale sono artefici il regista e il direttore della fotografia. Non mancano esempi di virtuosismo dove lo spazio curvo viene esaltato dal movimento della telecamera. Caratteristiche in tal senso sono, per esempio, l'inseguimento in una rampa circolare di un parcheggio, le riprese dall'alto di una scala elicoidale, le iperboli compiute dagli aerei ecc., oppure immagini suggerite dalla moderna psicanalisi che trovano nel vortice, nel pendolo e nell'ingranaggio una forma analogica efficace per rappresentare incubi ed ossessioni. Frequenti le applicazioni in molti film di Alfred Hitchcock: in *Notorius* del 1946 le riprese lungo la scalinata curvilinea della casa vittoriana esprimono tensione e paura (fig. 17). Celebre la scena nella quale l'assassino sale lentamente la rampa portando in mano un bicchiere di latte avvelenato per la moglie: il regista mette una lampadina nel

bicchiere di latte<sup>10</sup>, un espediente che lo spettatore non coglie direttamente ma che lo aiuta a concentrarsi sul pericolo del veleno che avanza, in una sorta di empatia con i sensi alterati della protagonista che viene drogata ogni giorno di più secondo un piano criminale lento e inesorabile. La traiettoria curvilinea avvolgente simile alla morsa progressiva di un serpente velenoso necessita di un “supporto” scenografico congruente con l’ambiente alto borghese che fa da cornice alla spy story, deve essere cioè, credibile. La scalinata in curva è dunque un espediente perfetto, dinamico e vertiginoso, e si presta a diverse costruzioni di senso.

Di nuovo una scala curvilinea compare nel film che più di tutti costituisce una sorta di enciclopedia delle migliori soluzioni sceniche ad un copione pieno di significati allegorici che vanno molto oltre il ritratto delle nevrosi e delle manie che ossessionano il mondo del cinema: in *Sunset Boulevard* del 1950, diretto da Billy Wilder, nella scena finale Norma Desmond, la diva del muto sul viale del tramonto, scende la scala circondata da paparazzi, credendo di girare finalmente il film che segnerà il suo ritorno sul grande schermo, ma che in realtà sarà arrestata in stato di incoscienza per il delitto da poco commesso. In queste sequenze la scala curvilinea si carica di tutta la folle vertigine che dalla protagonista arriva allo spettatore, generando nel pubblico del set e nel pubblico in sala una commozione tanto inevitabile quanto magistralmente ricercata e ottenuta (fig.18). Il film è una riflessione sulla precarietà del successo, ma soprattutto sul bisogno di essere amati, considerati, ricordati e racconta il tema dell’incapacità e forse dell’impossibilità di accettare il declino della nostra vita. L’incapacità di vivere i cambiamenti ai quale ognuno di noi inevitabilmente è soggetto con il trascorrere del tempo è sintetizzato in una breve frase tanto assurda quanto spietata che l’attrice pronun-

**10** Le luci sono di Ted Tetzlaf.

cia in risposta al protagonista maschile, un William Holden giovane scrittore squattrinato: lui dice *"voi siete stata grande"*; lei risponde *"io sono grande, è il cinema che è diventato piccolo"*. La parabola di ascesa e declino della diva del cinema muto è legata in realtà alla tecnologia: Norma Desmond è un personaggio di importanza mondiale resa celebre dal cinema muto: con l'avvento del sonoro le strategie commerciali della Paramount impongono repentinamente volti nuovi da sostituire a quelli che di colpo appaiono come icone da superare. Il nuovo che avanza, come al solito, spazza via senza troppi complimenti segni e simboli di un recentissimo e pur glorioso passato.

# Linea, curva, taglio, cartamodello. Il disegno nel progetto anti-effimero della moda

di Massimiliano Ciammaichella

Le geometrie del corpo si aprono alle infinite traiettorie compositive dell'abito, degli accessori che lo rivestono e con i quali si relaziona. È sempre stato così, tanto che nel corso dei secoli per il sarto, il *créateur de mode*, il *couturier*, lo stilista, il *fashion designer* e l'attuale direttore creativo il rapporto fra corpo e abito è diventato inscindibile. L'uno detta le regole dell'altro nella costruzione di un immaginario capace di descrivere attraverso il disegno – per chi ancora ne fa uso – il racconto di una silhouette che si fa carico di esporre le linee vestimentarie utili a rintracciare le ragioni di un'identità specchiata, simulata e desiderata dal soggetto che le incorpora. Ma questo rapporto inscindibile fra corpo e capo di abbigliamento si fa ancora più stringente nell'esecuzione del prodotto finito, che nel mondo occidentale ha spesso affidato alla misurazione del corpo e al rigore geometrico del cartamodello la traduzione dello sviluppo piano degli elementi che compongono l'abito da realizzare. Del resto la storia della

moda si sviluppa a partire dalla nascita della figura del sarto<sup>1</sup>, che si colloca nel tardo Medioevo occidentale, in un momento storico nel quale la propria immagine, per la prima volta, si costruisce nella relazione diretta con l'abito, che appaga il bisogno di appartenenza a una specifica classe sociale o personifica il tratto distintivo del sé e del proprio gusto, fra accettazione del conformismo e imposizione della propria individualità.

Nel 1575 viene fondata a Roma l'Università dei Sartori, per volere di Papa Gregorio XIII, così lo studio della geometria e delle tecniche di taglio sartoriale cominciano ad essere documentate nella trattatistica di settore, come nel caso del matematico e sarto spagnolo Juan de Alcega che cinque anni dopo pubblica il *Libro de geometria Practica y Traça*<sup>2</sup>, un prezioso volume nel quale illustra i metodi di taglio necessari alla realizzazione dei cartamodelli di capi per uomo e per donna e i modi per assemblarli, seguendo un rigoroso schema alfabetico di codifica, che indica i rapporti di misura delle singole parti e gli assemblaggi (fig. 1). Lo stesso tipo di rappresentazione grafica si ritrova inoltre nelle xilografie di *Geometria, y traça perteneciente al oficio de sastres*<sup>3</sup>, pubblicato sempre in Spagna da Francisco de La Rocha Burguen nel 1618.

A fine secolo, in Francia, nasce la prima rivista di moda<sup>4</sup>, che si trasforma nel 1677 in *Nouveau Mercure Galant*, arricchendosi di figurini maschili e femminili adatti, molto più del linguaggio verbale scritto, a veicolare attraverso le immagini le tendenze dell'epoca. Sono illustrazioni che di sovente riprendono i soggetti in posa di tre quarti, senza mai localizzarli in uno specifico ambiente. La linea di terra è prossima a quella di orizzonte per innalzare le figure ritratte e questo artificio lascia molto spazio allo sfondo bianco che ospita le brevi descrizioni testuali dei singoli elementi che compongono l'*ensemble*,

<sup>1</sup> Cfr. Codeluppi 2003, pp. 11-21.

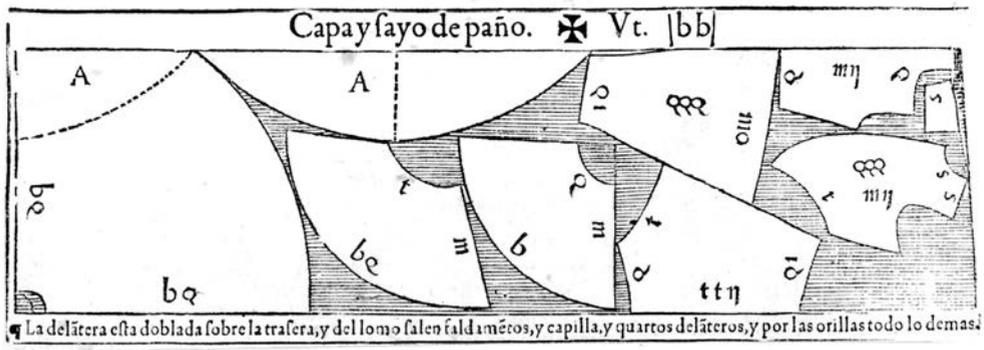
<sup>2</sup> De Alcega 1580.

<sup>3</sup> De La Rocha Burguen 1618.

<sup>4</sup> Cfr. De Vizé 1982.

**Declaracion de los quebrados de la vara de medir.**

Por vna vara.	b	Por tres quartas.	QQQ	Por tres baras.	bbb
Por vara y media.	bm	Por dos tercias.	tt	Por quatro baras.	bbbb
Por vara y tercia.	bt	Por cinco ochauas.	mo	Por cinco baras.	V
Por vara y quarta.	bQ	Por media vara.	m	Por feys baras.	Vb
Por vara y sefma.	bS	Por tres ochauas.	ooo	Por siete baras.	Vbb
Por vara y ochaua.	bo	Por vna tercia.	t	Por ocho baras.	Vbbb
Por vara y dozauo.	bd	Por vna quarta.	Q	Por nueue baras.	bx
Por vara y dos dedos.	bij	Por vna sefma.	S	Por diez baras.	x
Por vara menos dozauo.	db	Por vna ochaua.	o	Por onze baras.	xb
Por vara menos ochaua.	ob	Por vn dozauo.	d		
Por vara menos sefma.	Sb	Por dos baras.	bb		



forndo all'utente le corrette linee di stile da adottare negli abbinamenti. Si capisce che la moda sin dai suoi albori non può esimersi dalla ricerca visuale, in questo caso assecondata dall'illustrazione narrativa del soggetto vestito, alimentando il desiderio del pubblico al quale si rivolge<sup>5</sup>, e allo stesso tempo si confronta con il rigore scientifico del disegno geometrico per facilitare il lavoro di progettazione e costruzione dell'abito. Così in Francia, tra la fine del Seicento e per tutto il Settecento, si assiste a una fiorente proliferazione della letteratura tecnica, come nei casi di *Le Tailleur sincère*<sup>6</sup> oppure *Art du Tailleur*<sup>7</sup>. In quest'ultimo i cartamodelli si arricchiscono di informazioni grafiche sul loro assemblaggio tridimensionale (fig. 2) e appaiono alcune indicazioni sui rapporti di misura, ma non è chiaro come questi si relazionino a un modello di sviluppo piano del corpo poiché, all'epoca, il sarto utilizzava fettucce

Fig. 1/ Pagine estratte da De Alcega 1580.

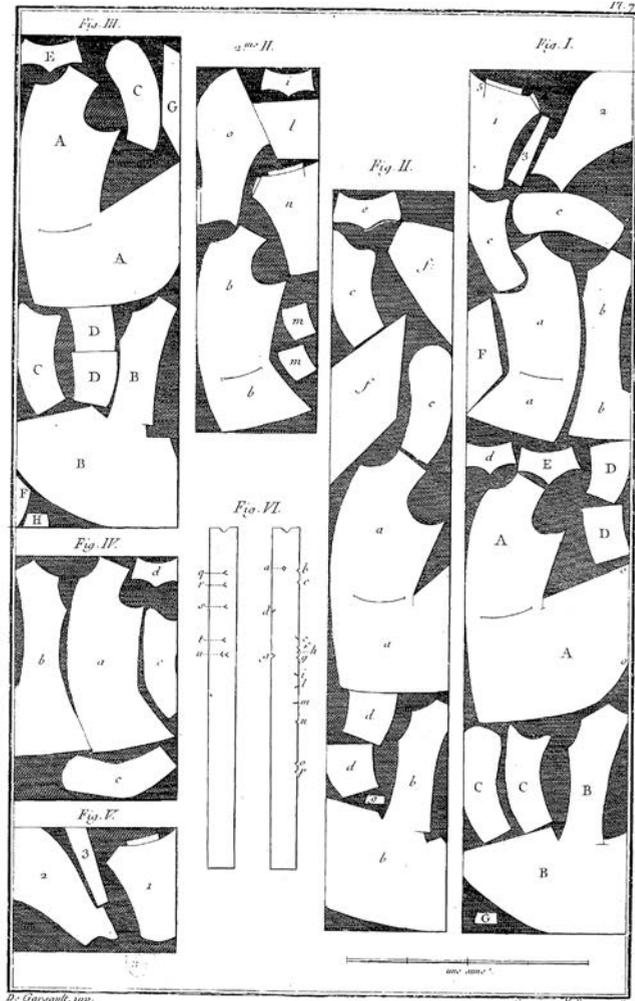
<sup>5</sup> Cfr. Ciammaichella 2011, pp. 20-46.

<sup>6</sup> Boullay 1671.

<sup>7</sup> De Gersault 1769.

## Le linee curve per l'architettura e il design

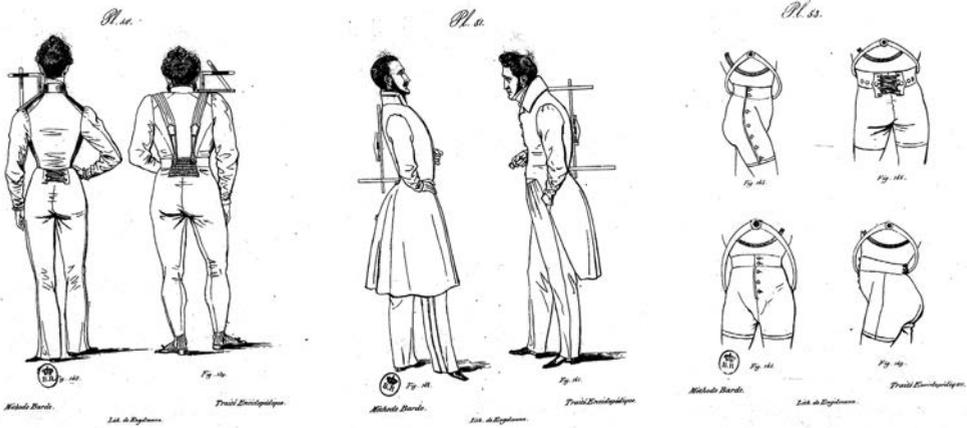
Fig. 2/ Pagina estratta da De Gersault 1769, Planche 7.



suddivise proporzionalmente e misurazioni dirette anche nel riadattare modelli già esistenti, secondo un sistema definibile come "chirografico": «quello usato empiricamente fino all'avvento del taglio geometrico. In esso le mani del sarto avevano un ruolo importantissimo perché assurgevano alla dignità di stampe universali»<sup>8</sup>.

Nell'Ottocento diversi autori sperimentano la misurazione diretta dei corpi con alcuni strumenti di invenzione, brevettandone l'utilizzo nello sviluppo

<sup>8</sup> Settimi 1970, p. 74.



dei cartamodelli che dovranno considerare le differenti conformazioni fisiche e le taglie. Il “metodo Barde”, ad esempio, utilizza quattro strumenti: «lo “spallimetro” per misurare l’inclinazione delle spalle, il “dorsometro” per la misurazione della schiena, il “triplo decimetro” che è un righello metrico diviso in sessanta semi centimetri, e il “corpometro” per misurare le parti inferiori del corpo»<sup>9</sup> (fig. 3).

Ciò diede il via alla produzione di una serie di strumenti di misurazione diretta e semidiretta, a imbragature e busti meccanici regolabili, come il *Somatomètre* di Georges Delas del 1839, o il *Moule* di François Pellissery del 1850<sup>10</sup>.

La moda in questo periodo attua una delle tante trasformazioni dei processi di produzione che la caratterizzano: da una parte l’invenzione dell’*haute couture*<sup>11</sup> guarda al lusso rilanciando il concetto di “fatto a mano e su misura”, dall’altra l’industria della confezione si rivolge alle masse e necessita di modelli di standardizzazione delle fisicità da vestire. Il corretto rilievo del corpo, quindi, diventa strumentale alla resa piana del capo e richiede metodi di misurazione avanzati, così anche in Italia diversi studiosi si cimentano nell’impresa e il sarto Domenico Caraceni<sup>12</sup> brevetta un dispositivo che «permette di ricavare direttamente il modello dell’abito dalle mi-

Fig. 3/ F.A. de Gersault, *Art du Tailleur, Epaulimètre, Dossimètre, Corpimètre*, pagine estratte da Barde 1834.

<sup>9</sup> Barde 1834, pp. 240-241, trad. it. dell’autore.

<sup>10</sup> Per approfondimenti cfr. Settimi 1970, pp. 74-81.

<sup>11</sup> Charles Frederick Worth nel 1858 aprì, al numero 7 di Rue de la Paix a Parigi, la casa di moda Worth et Bobergh. Per approfondimenti cfr. Morini 2006, pp. 91-112.

<sup>12</sup> Cfr. Caraceni 1933.

sure del corpo umano trasferite in piano attraverso un "quadrante graduato" e sagomato [da porre sotto l'ascella] dal quale partono, come in un sistema di coordinate cartesiane, un'asta verticale e una serie di nastri centimetrati orizzontali e flessibili»<sup>13</sup>.

Sul corpo si segnano dei punti di riferimento univoci, veri e propri capisaldi per la misurazione ma anche punti di incontro dei diversi pattern che compongono il capo di abbigliamento, perché la traduzione della superficie libera del corpo umano nel piano, per gli strumenti analogici del disegno, è un'operazione molto complessa e una soluzione possibile è offerta dalla tecnica di "taglio tridimensionale", secondo la quale il corpo è suddiviso da un sistema di superfici pseudo-triangolari dove le curve si trasformano in rette nello sviluppo piano.

Questo metodo è descritto da Bruno Settimi nel seguente esempio applicativo: «[...] Se noi in un soggetto dalle scapole forti [...], "prominenti sul punto E", effettuiamo la misurazione dei due triangoli *A-B-C* e *A-B-D*, che hanno in comune il lato *A-B*, quando andremo a riprodurli in piano avremo una maggiore estensione della linea *A-B* che sul soggetto "era curva" e sul piano del tracciato "diventa retta" [...]. Tale maggiore estensione porta come conseguenza uno spostamento delle intersezioni *C-D* costrette ad avvicinarsi e che a loro volta sposteranno gli altri punti del tracciato [...]. Ci sembra dunque che l'unico mezzo per risolvere il problema sia di fissare sul punto più saliente delle scapole il vertice dei diversi triangoli, ciò che si ottiene aggiungendo le misure *C-E* e *D-E* e sezionando *A-B* nei due tratti *A-E* *E-B* [...]. Copiati i triangoli uno accanto all'altro come si trovano sul corpo [...], troveremo il distacco *B-B'* che corrisponderà perfettamente all'entità della sporgenza del soggetto, culminante su *E*»<sup>14</sup> (fig. 4).

Il metodo della triangolazione per "punti salienti" consentiva di generare i cartamodelli di un completo

**13** Lupano, Vaccari 2009, p. 16.

**14** Settimi 1970, pp. 104-105.

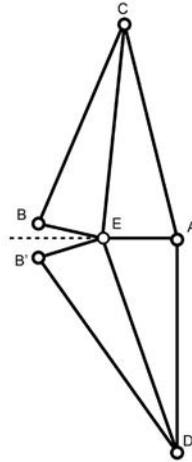
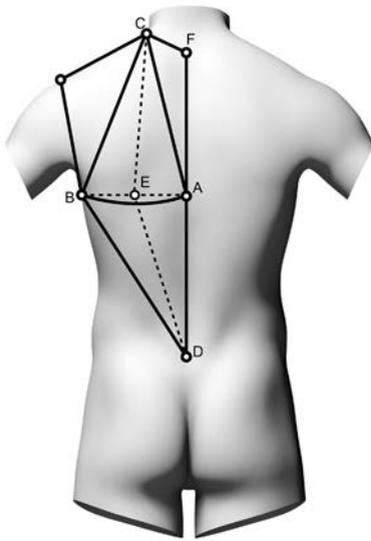


Fig. 4/ Ricostruzione del metodo di triangolazione per punti salienti, 2017, pubblicato in Settimi 1970.

maschile, compreso il soprabito, servendosi di sole otto misurazioni.

Le tecniche di taglio sartoriale sono pertanto note da tempo e oggi alcuni designer, abili conoscitori delle regole della modellistica, sperimentano nuove forme di vestibilità che ibridano le logiche di composizione dell'abito, a partire dalla superficie bidimensionale del cartamodello, con quelle del *moulage* che drappeggia il tessuto direttamente sul corpo o sul manichino, per costruire il capo tridimensionalmente e dedurre successivamente i pattern costruttivi.

In questa direzione si muove il lavoro di Shingo Sato: il designer giapponese utilizza la tecnica del *transformational reconstruction*<sup>15</sup>, per la quale il contatto diretto con il manichino è indispensabile alla costruzione di superfici e forme complesse da inserire come innesti architettonici che alterano, in aree specifiche, le regolari forme antropomorfe del manichino. Diversi esercizi applicativi di tale tecnica sono documentati da Tomoko Nakamichi<sup>16</sup> e adottano come base per la lavorazione un modello sartoriale semplificato (fig. 5), sul quale tracciare linee e curve per il taglio di inediti cartamodelli.

<sup>15</sup> Sato 2016.

<sup>16</sup> Nakamichi 2012.

Il cosiddetto "capo basico", quindi, viene assunto come seconda pelle da scomporre, alterare, trasformare, sviluppare e assemblare nuovamente, in analogia con le pratiche architettoniche votate alla forma libera e alla "decostruzione".

Nel racconto della moda, quest'ultimo termine è stato più volte utilizzato dalle riviste di settore per descrivere il lavoro di importanti designer, come ad esempio Rei Kawakubo, Martin Margiela e Dries Van Noten<sup>17</sup>, ma il problema per entrambe le discipline risiede nelle regole tettoniche da seguire nell'edificazione del manufatto e nella confezione dell'abito. Per Brooke Hodge, recentemente le forme geometriche rigide appaiono sempre meno spesso e questa è una sorta di controtendenza rispetto «agli indumenti convenzionali composti da diversi pezzi di tessuto, tagliati e assemblati per conformarsi alla forma del corpo. [In questo caso] *folding* e *pleating* possono diventare le strategie tettoniche»<sup>18</sup>, oltre a costituire le parole chiave di specifiche pratiche dell'architettura e della moda.

Per quanto riguarda la prima, la progettazione della forma libera si affida ai software di modellazione matematica e questi utilizzano algoritmi di tipo NURBS<sup>19</sup> nella generazione di superfici che, di sovente, presentano una doppia curvatura e pertanto non possono essere sviluppate sul piano. Ma nell'ultimo decennio diversi studiosi, come ad esempio Helmut Pottmann<sup>20</sup>, si sono occupati di perfezionare modelli di discretizzazione delle superfici matematiche in numeriche, di tipo *mesh*, per suddividere le regioni curve in sequenze di facce piane quadrilatere sviluppabili<sup>21</sup>.

Così i "cartamodelli" di architettura diventano funzionali alla determinazione di insiemi di pannelli standardizzati, che oltre a ridurre i costi di costruzione si adattano alla geometria curva di partenza. Le strategie per produrli sono variabili e nella moda di-

**17** Cfr. Gill 1998, pp. 25-50.

**18** Hodge 2007, pp. 18-19, trad. it. dell'autore.

**19** NURBS: acronimo di Non Uniform Rational B-spline; l'algoritmo descrive curve e superfici spline che hanno una distribuzione dei punti di controllo e peso degli attrattori variabile.

**20** Cfr. Pottmann et al. 2007; Ceccato et al. 2010; Pottmann et al. 2008b, pp. 15-28; Pottmann et al. 2008b, pp. 1-10.

**21** Per approfondimenti cfr. Ciammaichella 2013, pp. 187-195.

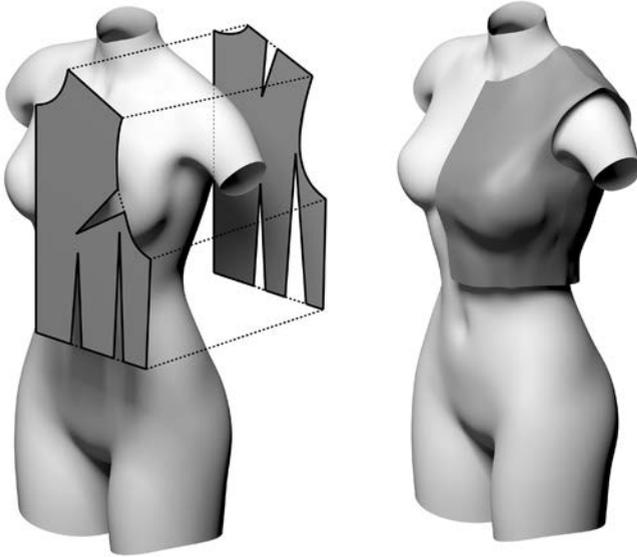


Fig. 5/ Ricostruzione dei cartamodelli pubblicati in: T. Nakamichi, *Pattern Magic*, 2012 e *Simulazione della vestibilità*, 2017.

pendono dalle modalità con le quali i designer, sperimentatori di forme indossabili, si confrontano con le geometrie del corpo o del manichino sul quale “sculpture” l’architettura che lo riveste.

In tal senso, gli attuali strumenti di rappresentazione digitale potrebbero aiutare il progettista nelle fasi di modellazione 3D e sviluppo, per giungere fino alla confezione del capo. Tuttavia, la maggior parte dei software dedicati alla filiera<sup>22</sup> si indirizza alla progettazione e produzione su larga scala ed è decisamente orientata al settore del *fast fashion*, dove i tempi di lavoro sono assai ridotti e necessitano di specifici pacchetti applicativi, capaci di gestire simultaneamente: la modellistica nel disegno del cartamodello, il riadattamento dello stesso nello sviluppo delle taglie, il piazzamento, la simulazione della vestibilità e l’intero ciclo di vita del prodotto.

In genere le interfacce utente consentono di disegnare con precisione le geometrie dei cartamodelli e di archivarle in una libreria digitale: saranno profili lineari o curvi, modificabili nei punti di interpolazione per indicare le corrette corrispondenze delle linee

**22** Cfr. ad esempio: Browzwear 3D (<http://browzwear.com>), EFI Optitex (<http://optitex.com>), Marvelous Designer ([www.marvelousdesigner.com](http://www.marvelousdesigner.com)), Tuka3D ([www.tukatech.com](http://www.tukatech.com)).

di cucitura dei singoli elementi, per poi apprezzarne gli effetti di vestibilità su avatar 3D personalizzabili nelle silhouette e nelle taglie (fig. 6).

La *clothing simulation*, infatti, riadatta i diversi pattern alle conformazioni dei cloni digitali dei corpi, secondo algoritmi in grado di mimare la fisica dei diversi tessuti, la loro elasticità, il peso e la caduta nella simulazione della vestibilità. Ma i modelli di partenza sono convertiti in superfici *mesh*, così i vertici delle facce che compongono i diversi pattern seguiranno le traiettorie di vettori forza, in una simulazione dinamica atta a farli collidere con i vertici del poliedro che descrive l'avatar 3D<sup>23</sup>.

Nelle diverse fasi di progettazione e verifica dei risultati, il passaggio dalle due dimensioni del piano alla tridimensionalità dello spazio è immediato: ciò consente di generare realistici prototipi digitali dei capi di abbigliamento<sup>24</sup> (fig. 7).

Per quanto riguarda le procedure inverse, invece, la possibilità di ottenere i cartamodelli da una digitalizzazione 3D del capo su manichino è stata oggetto di diversi studi, che coinvolgono l'utilizzo di scanner laser 3D nell'acquisizione di nuvole di punti da convertire in superfici *mesh*.

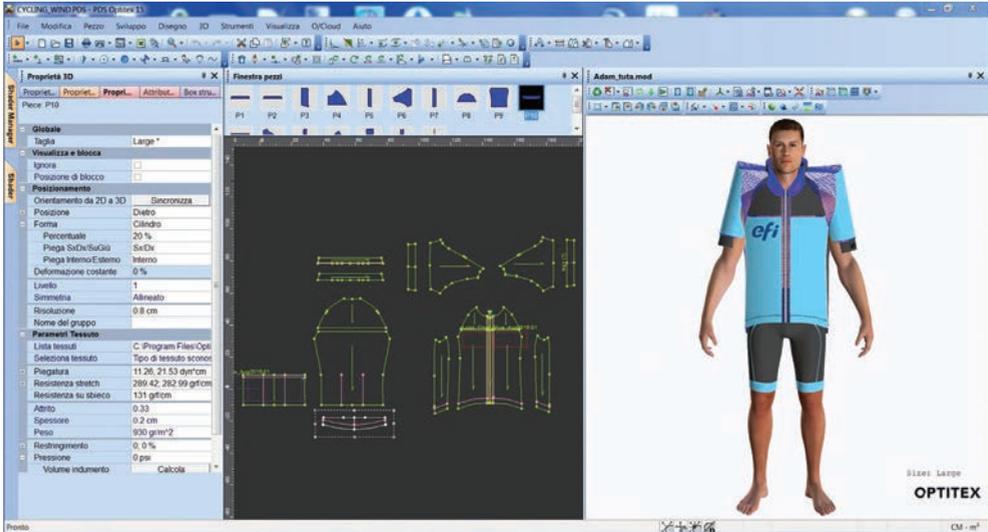
Alcuni ricercatori giapponesi hanno verificato le corrette corrispondenze fra lo sviluppo piano delle superfici digitali acquisite e il cartamodello originario di una camicia, aiutati dalle linee di taglio opportunamente riprodotte sul manichino<sup>25</sup>. Ma il continuo aggiornamento delle tecniche di scansione, con l'introduzione dei *body scanner* nel settore moda, permette di generare modelli parametrici classificabili secondo le caratteristiche misurazioni delle matrici sartoriali. Per ricavarle è sufficiente sezionare gli avatar 3D con dei piani di profilo, così da ottenere una segmentazione del clone digitale<sup>26</sup>, suddiviso in curve che potrebbero essere interpolate da superfici rigate a curvatura costante, e pertanto sviluppabili.

**23** Cfr. Volino, Magnenat-Thalmann 2000.

**24** Si vedano ad esempio: O/DEV Pattern Making Suite, O/DEV 3D Sampling Suite di EFI Optitex (<http://optitex.com>).

**25** Cfr. Cho et al. 2003, pp. 1-8.

**26** Cfr. Liu et al. 2010, pp. 576-593.



In questo modo si potrebbe modellare il capo direttamente sul manichino, ricavandone i cartamodelli. Tuttavia la prototipazione degli artefatti riguarda i modelli numerici e allo stato attuale i metodi di sviluppo delle superfici *mesh* «tendono a non considerare le proprietà dei materiali. Giustificato dalle regole matematiche delle superfici sviluppabili, l'appiattimento delle superfici *free-form* di solito riduce alcune misure nella distorsione della forma primitiva della superficie»<sup>27</sup>. Un vero problema per quei designer che, pur sfruttando le innovazioni tecnologiche, si svincolano dagli standard tradizionali della modellistica e sperimentano diversi trattamenti di piega dei tessuti. Issey Miyake nel 1993 ha inaugurato la linea indi-

Fig. 6/ Disegno dei cartamodelli di una tuta e fitting su avatar 3D, © EFI Optitex, 2017.

Fig. 7/ Modello 3D e rendering, © EFI Optitex, 2017.

<sup>27</sup> Liu et al. 2010, pp. 588-589, trad. it. dell'autore.

pendente *Pleats Please*, fatta di capi che reinterpretano la plissettatura su tessuti in poliestere filati a fusione che triplicano le taglie in termini di superficie utilizzata, ma occupano il minimo spazio e mantengono inalterata la loro conformazione<sup>28</sup>. Inoltre il designer giapponese nel 2000 ha realizzato la collezione A-POC<sup>29</sup>, servendosi di computer e macchine a controllo numerico per la produzione di abiti e accessori impressi su una superficie tubolare da tagliare secondo sagome prestabilite, che il cliente può comunque personalizzare a seconda del suo gusto<sup>30</sup>.

È evidente come i designer, in quanto tali, sperimentino vie alternative ai consolidati schemi sartoriali. In Italia il fondamentale contributo di Nanni Strada, abile conoscitrice delle geometrie del corpo, dimostra come il vestito non necessariamente debba ricalcare le fattezze anatomiche di chi lo indossa. In una sua importante lezione afferma che l'abito etnico non è «quasi mai anatomico e questo ci dice subito che esso è il risultato di una ricerca di standard vestimentario: la configurazione antropomorfa della tunica rappresenta una figura a braccia aperte, ma la forma è lineare, sempre a linee rette e le misure dell'indumento sono standardizzate. [...] Ma ciò che a noi interessa è la ricerca geometrica nei suoi aspetti più astratti e nelle coincidenze tra forma dell'indumento e movimento del corpo»<sup>31</sup>. Il lavoro si svolge a partire dalla vestibilità di figure piane regolari, ma sono architetture che si costruiscono su un corpo vivo in movimento. Su premesse analoghe si concentra il lavoro di Rickard Lindqvist<sup>32</sup> sulla sperimentazione di modelli alternativi di costruzione del capo, che si svincolano dalle regole tradizionali della modellistica sartoriale. Al centro del progetto vi è un corpo vivo che accoglie e trattiene, con i suoi movimenti, un tessuto di forma rettangolare che lo avvolge e si piega di continuo, fino a raggiungere la silhouette desiderata. L'operazione di taglio avviene solo alla conclusione

**28** Cfr. Miyake, Kitamura 2012.

**29** A-POC: acronimo di A Piece Of Cloth.

**30** Cfr. Debo 2003, pp. 10-11.

**31** Strada 2013, p. 72.

**32** Cfr. Lindqvist 2013.

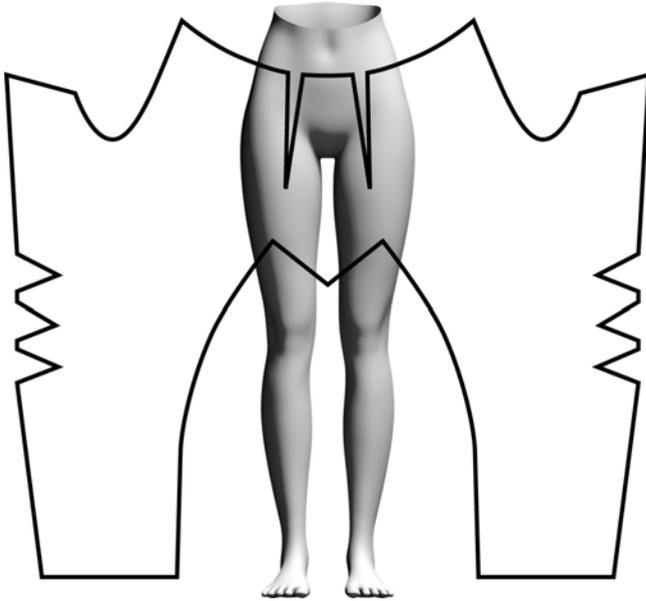


Fig. 8/ Ricostruzione del cartamodello, su manichino 3D, di un pantalone progettato da Geneviève Sevin-Doering, 2017.

del processo di modellazione e questa pratica riprende una tecnica sviluppata dalla costumista francese Geneviève Sevin-Doering<sup>33</sup>, che scolpisce il capo sul corpo e ne ricava un solo cartamodello (fig. 8).

Da tutto ciò si evince che il complesso universo della moda attua un progetto scritto sul corpo sottoponendolo a mutevoli proposte di vestibilità, che ne evidenziano le fattezze oppure le negano, in una continua sperimentazione delle geometrie e processi di astrazione della forma.

Storicamente si è visto come l'approccio alla costruzione dell'abito tenda ad originarsi nel disegno piano dei cartamodelli; al contrario, il *moulage* drappeggia il tessuto direttamente sul manichino e diversi designer ibridano liberamente le tecniche compositive aiutati anche da strumenti di rappresentazione digitale, ma diversamente da altre discipline del progetto la moda non potrà mai rinunciare al contatto diretto con il corpo, con i tessuti e con gli strumenti analogici del disegno.

<sup>33</sup> Cfr. Laplaiche 2002



## First part

### **The curved lines in the the geometric thought evolution during the classical period**

Leonardo Paris

*The history of the geometric thought evolution derives only in small part from direct written sources. A lot of news has come down to us for successive transcriptions, often reworked, or for random discoveries of autograph texts whose existence was unknown. Many recent studies have shown that in the pre-Hellenistic period the knowledge of geometry was certainly greater than imagined until a few decades ago. Geometry was one of the main components of a multidisciplinary knowledge that also included arithmetic, music and astronomy, as well as grammar, rhetoric and dialectics.*

*For a long period, at least until the fifth century AD, there have been studies and discoveries that constitute, even today, the foundation of this scientific discipline and of mathematical knowledge in general.*

*In the spirit of research, summarized in this volume, here we want to retrace this wonderful journey studded with scientific discoveries with a specific focus on curved lines. A parallel analysis is also proposed in the practical application of architecture (necessarily limited to a few but significant examples). If in fact, as mentioned, the written sources are few and often difficult to attribute, a significant help to the understanding of the geometric thought evolution can undoubtedly arrive analyzing the innumerable traces that architects and engineers of the time have left us in their formidable works.*

### **Curved lines between geometry and analysis in the mathematical Renaissance**

Laura De Carlo

*A perfect theory of curved lines and their properties is defined only when, mainly in the Sixteenth century in France, the French reassess the glorious Greek legacy permitting entry into the world of analytical geometry and modern analysis, concentrating their studies in a limited temporal period justly termed a mathematical Renaissance.*

*In little more than a century, beginning, in fact, with the study of curved lines, new theories are developed that emanate from diverse motivations that deal with a vast area of applications in the most varied sectors from the mechanic to the ballistic, from geodesics to navigation, from astronomy to different technological problems; principally convinced that the study of the physical world seemed to need quantitative instruments, essentially those of geometry.*

*Thus, the method of coordinates, the infinitesimal calculation and application of this last to geometrical problems proved to be the fundamental instruments that permitted not only a great increase in the number of curves known up till then, but also to define important geometrical and mechanical properties of curves till then unknown, thus opening new areas of research.*

*During the next century, with an extension into differential geometry, the theory of curves can be considered delineated in its essential aspects and defined substantially in this way just as we use it today.*

*If geometrical construction was of an iconic type new methods provide an autonomous symbolic language, the opposition between analytical geometry and synthetic geometry which signals the birth of a new science that, while diverting the majority of mathematicians from pure geometry, is in fact characterized by the relationship between symbolic algorithmic methods and geometrical methods.*

### **Geometry of curved lines for the genesis of shape**

Marta Salvatore

*Knowledge of the geometry of curves assumed and still today assumes a leading role in the design of shape. The arts and applied sciences use this theory for the construction of products that require a certain level of geometric accuracy. In general terms, we can affirm that the quality of the surfaces composing an architectural or designed shape depends on the quality of the lines to which these surfaces belong. Thus, the theory of lines, and therefore knowledge of their properties, becomes crucial for a correct design of shape, both through analogical as well as digital drawing.*

*In the history of the architecture and design project, some remarkable properties of lines and surfaces strongly conditioned their success.*

*Thus, particular classes of lines and surfaces affirmed themselves in the practice of design; in fact, some of their properties made them particularly suitable to be controlled through the drawing, in the design phase, and to be reproduced on site, in the construction phase.*

*This short essay aims to explain the relationships between these properties and the design of shape. The properties that directly influence the geometric control of designed surfaces are analyzed, illustrating, finally, the application of some notable classes of curves, selected as they all belong to recurrent surfaces in architecture and design.*

## **Digital representation of the curved lines**

Matteo Flavio Mancini

*The essay concerns the mathematical representation of curved lines in digital applications dedicated to architecture and product design. Once the historical evolution that brought from the analogical drawing tools to the development of the digital ones has been presented, the theme of parametric representation of the curved lines is approached through the NURBS mathematics.*

*The theoretical principles and their implications in the practice of digital representation, the properties of the NURBS curves and the tools available to the designer to control these properties and the quality of the shapes are also presented. A particular attention is given to the differential properties of the curved lines – tangency, flexion and torsion – and their geometric meaning. Furthermore, a possible synthetic representation of the torsion value is proposed through the adoption of circumferences belonging to the normal plane of the curved line.*

*Through the concept of continuity, the analogies between curves and surfaces made possible by the NURBS mathematics are revealed and the design process which, starting from a set of curves, leads to the modelling of a design object that exemplifies the typical geometric-formals properties of this kind of modelling is illustrated.*

*The purpose of the contribution is to bring designers closer to the theoretical and practical concepts of NURBS modelling since mastering these concepts allows to design better and more controlled forms.*

## **Second part**

### **Cilindrical helicoid in the renaissance and baroque staircases**

Leonardo Paris

*The helicoid staircases are often used in the architecture since the ancient age. In the medieval period this type of stair is used into towers, fortifications or bell towers with a main functional value. Starting from renaissance the architects thought to give them also an high architectural value.*

*The first was Bramante in Vatican (1507), then Vignola in Caprarola (1559), Mascarino in the Quirinale palace (1585) and Borromini in the Barberni Palace (1633).*

*The architecture treatises had an important role about the diffusion of the helicoid staircases. In I Quattro libri Palladio describes several types, with circular and oval plant.*

*The comparison of this four work of art, also thanks to recent digital surveys of three of these stairs, allowed us to highlight the relationship between the geometric matrix of the projects and their built.*

*Each realization is an expression of own time in a long evolution of a same idea based on the helix application. In each realization there are different technical problem about the slope, the shape of the step and the way to develop the trabeation and, in general, the architectural order.*

### **The space of the line. The tiburio of Sant'Andrea delle Fratte**

Giovanna Spadafora

*In this essay we examine the theme of the curved line in Francesco Borromini's drawings, highlighting how a sequence of lines manages to determine a complex geometry.*

*We analyzed the drawing AzRom 108, plan of the tiburium of Sant'Andrea delle Fratte, in Rome, constructed between 1652 and 1665.*

*The analysis of the curves shows how the tiburium takes shape via a sequence of lines lying on overlapping horizontal planes, within a geometric construction conceived in space, but which governs them all onto a single plane. Borromini then traces a synoptic plan, thus creating three-dimensional reasoning within two dimensions.*

*The drawing, omitting the overlapping partial drawing referring to a lantern that had been envisaged but not realized, describes the plan elevation cutting through the four windows, evidenced with slanted hatching, also representing the projection of the cornice over the columns and the outer cornice with a continuous line. However, in this drawing the base with its continuous concave-convex profile on the four sides within the corner contraforts – of the type that forms the lower part of the San Carlino façade – is not shown.*

*The analysis of the drawn curves, therefore, is followed by a reasoning on those curves actually realized, derived from the three-dimensional model obtained with the 3D survey, and the verification of the relationship between the sinusoidal curve of the base and the ragged line of the dado stacked above the pylons of the crossing.*

*The essay concludes with considerations on the figurative continuity which, in Borromini's work, binds the constituent parts of the whole to the elements of detail. In fact, he attributes the same formal value to the line, a one-dimensional geometric entity by definition, whether it carves out the minute space in a sequence of moldings or models the interior or exterior of an architectural enclosure.*

### **The technological generating lines**

Maria Laura Rossi

*The industrial revolution in Europe brought a profound innovation in the building field thanks to the development of new materials that allowed experimenting with new construction types and new calculation models, marking the end of masonry hegemony. The new structural elements, lighter and cheaper, are charged with formal as well as functional value. These years, at the turn of the nineteenth and twentieth centuries, are on the one hand a period of relative peace between the European powers - the so-called Belle Epoque - on the other they are characterized by a general crisis of the artists who wonder how to respond to the era of technological progress in constant and rapid evolution. From the new possibilities in the artistic and architectural field granted by iron, cast iron and curved wood, and the need to overcome the classicism of the Beaux Arts, a movement called Art Nouveau develops, which from Belgium expands throughout Europe. In the new production system, including the use of traditional materials such as wood, the rules of productive and economic organization of the steel industry are imposed, starting mechanization processes across the board. With the production of Thonet furnishing elements, for the first time we witness the industrialization of crafts and the creation of a mass market able to identify with the values of a renewed bourgeoisie. The new style soon gains an unprecedented geographical spread thanks*

to the universal exhibitions but, above all, thanks to art magazines and furnishing catalogs, which opened the doors to the most varied sectors, from architecture and design to graphics and objects of common use, with the intent to raise workers' souls, crushed by the mechanization of the industrialized society.

### **The rule of the generative curves in the nautic design**

Michele Russo

*In the Industrial Design field, the translation and interpretation of an idea in its realization may be represented by its shape research and analysis, which can be considered a complex mediation process between tradition and innovation, between significance and meaning, between design freedom and material constraint, all merged towards a synthesis project. In this iterative refining process towards the geometrical shape construction, curves represent the generative starting point for the construction of complex, liquid surfaces which tend to remove from geometric construction rules towards new formal solution and free-form shape. A significant role in this field is held by nautical design, a complex discipline in which the geometric construction and representation activity assumes a key role in the graphic restitution process of complex spatial shapes, designed and developed according to curves networks, which define the main skeleton of the object. The following discussion intends to analyse the role of the curve in the Nautical Design; starting from the constructive and formal genesis of the boats, it deepens curve typologies and their geometry evolution in the Industrial Design, exploring the curve representation using the traditional Construction Plan method. At the end, starting from the dichotomy between new project and real object, the contribution intends to highlight and compare the use of project curves versus sections extracted from three-dimensional models obtained at the end of a Reverse Modeling process, trying to emphasize pro and cons of each single constructive passage of both methods. Besides, some case studies representative of a different evolution of the boat 3D models from a constructive and material point of view are presented and discussed, to support the discussion and anticipate the final conclusions.*

### **The conjugated lines**

Leonardo Paris

*The study of the gears is based on the conjugated geometries according to which two curves or two surfaces in mutual movement maintain in constant contact. The geometric theory of the gears until the end of the nineteenth century was one of many branches of the applications of descriptive geometry. The study is based on knowledge of the main properties of plane curves and humps and their derivatives. The specificity of the theme is that these geometries when have to relate with their conjugated, must meet the constraints that would otherwise not have. Through the analysis of some case this essay aims to highlight the role of descriptive geometry from theory to practise, applying methods and procedures of investigation often forgotten.*

*Some types of gears were known since the ancient age. Erone of Alessadria for example described an "odometro", a length counter device done with wheels, levers and pulleys. The "renaissance engineers" like Leonardo da Vinci designed several gears but without developing a real theory.*

*The first treaties, in which the geometric theory of the gears is developed, were pu-*

## Le linee curve per l'architettura e il design

*blished at the end of '600th by Philippe de la Hire and then Charles Etienne Louis Camus. Treaties whole dedicated to this topic were Théorie géométrique des engranages by Oliver in 1842 and, immediately after, La Teoria geometrica degli Ingranaggi by Cozzazza in 1854.*

*Nowaday the possibilities of 3d digital modeling and 3d print allow us to study this topic with a renovated enthusiasm making experiment on new solutions and applications. A gear is a rotating machine part that is comprised of a set of toothed wheels, with the purpose of transmitting power from one part of a machine to another. The shape of the tooth and of the nucleus is based on the conjugated geometries. In a classic gear, done from two toothed wheels, the line of the single tooth is based on the evolving of the circumference. This curved line is defined by a point P of a straight line that roll, without slipping, along a circumference. In a bevel gear the profile of the tooth is based on a spherical epicycloid, a curved line defined by a point of a circumference that roll around another no coplanar one. 3D parametric modelling allow us to create dynamic models through which it is possible verify in real time their correctness and effectiveness.*

### **From curved lines to free surface and reverse in the digital model of the architecture**

Matteo Flavio Mancini

*This paper intends to present an experiment concerning the modelling of free-forms through NURBS geometries in the architectural field. In particular, it intends to present some applicative repercussions of the properties of NURBS curves and surfaces: the possibility of performing geometric operations, such as projection and section, in a rigorous manner and the ability of these geometries to be deformed without ever losing their prerogative of continuity.*

*The experimentation, conducted on the Congress Station shelter of the Nordpark Cable Railway in Innsbruck (2004-2007) designed by Zaha Hadid Architects, highlights the close connection between lines and surfaces in the NURBS modelling. The lines are in fact the backbone of the surfaces and from the latter it is always possible to extract new lines both for design purposes and for realization.*

### **Curvilinear paths between architecture, theatre, cinema and design**

Massimo Zammerini

*In nature the curved line is immanent. The solar system, the plants, the animals, the human beings, all of us are kept alive by complex systems governed also by curvilinear elements. The straight line is a particular condition of the curved line. The curve would seem to refer to the idea of softness, to a form of "folding" that invests matter, to an idea of different continuity, of growth and of variety of forms, but it is also itself an expression of energy and strength, as demonstrated by the science of architecture and engineering and the history of art. The architecture history teaches us how each era has expressed an idea of the relationship between the weight and shape of buildings, but also of furniture and objects, up to the aerodynamic shapes designed to challenge weight constraints, where the curved line is sovereign. The research for an ideal liberation from weight and gravity, or its emphasis, has always interested artists, engineers, architects and designers, with different aims. The use of the curved line is observed in this essay in a context that acts on the construction, with modalities that welcome or reject*

*the Cartesian postulates based on the separation of the elements and where the forms produced by human artifice are something other than natural forms.*

*However, we are convinced that overcoming a clear separation between organic and rational allows us to study the architecture works as a synthesis product between answers to natural needs and abstract ideational processes. Furthermore, speaking of a curved line does not mean excluding the straight line and the two elements represented by plane and volume.*

*In such a broad and certainly elusive context, we observe the idea of a space defined by trajectories, also of a curvilinear type, in some fields inherent to architecture, such as theater that recalls the theme of visible scene changes, cinema with the innovation of moving camera shots and design with the involvement of ergonomics and bending techniques of natural and industrial materials.*

**Line, curve, cut, pattern.**

**The drawing in anti-ephemeral design of fashion**

Massimiliano Ciammaichella

*This essay focuses on the theories and the techniques of construction and representation of garments, starting from a historical research which aims at individuating specific operational modes that, across history, apparently never quit measuring the human body in order to define those geometrical rules that are able to control the free forms in motion of the subjects and of the garments that dress them.*

*Designers choose every time if it is the geometry of the human body, or that of the clothing, which dictates the design strategies. Thus, between the two-dimensional design of the paper pattern and the planar development of the surfaces of an outfit sculpted upon the body, the answers to the intersections can be found in the digital representation methods.*



## Bibliografia

### Prima parte

- AA.VV., 1999. Il Colosseo Studi e Ricerche. *Disegnare Idee Immagini*, 18/19.
- Adam Jean-Pierre, 1988. *L'arte di costruire presso i Romani*. Milano: Longanesi & C.
- Arnheim Rudolph, 1977. *La dinamica della forma architettonica*. Milano: Feltrinelli.
- Baglioni Leonardo, 2007. Il contributo del modellatore informatico nello studio di lossodromie, eliche e spirali. In De Carlo Laura (a cura di). *Informatica e fondamenti scientifici della rappresentazione*. Roma: Gangemi, pp. 93-102.
- Bianchi Luigi, 1894. *Lezioni di geometria differenziale*. Pisa: Enrico Spoerri.
- Bianchi Bandinelli Ranuccio, 2005. *Roma: l'arte al centro del potere (dalle origini al II secolo d.C.)*. Milano: RCS Corriere della Sera, vol. 1.
- Boyer Carl B., 1976. *Storia della matematica*. Milano: Mondadori, 1976. Traduzione di Carugo Adriano. Ed. orig. *A History of mathematics*.
- Burali Forti Cesare, 1912. *Corso di geometria analitico-proiettiva per gli allievi della R. Accademia Militare*. Torino: G. B. Petrini di Giovanni Gallizio.
- Ciarloni Roberto, 2008. La logica delle forme. In Carlevaris Laura, De Carlo Laura, Migliari Riccardo (a cura di). *Attualità della geometria descrittiva*. Roma: Gangemi, pp. 267-282.
- Ciarloni Roberto, 2009. Teorie e tecniche della rappresentazione matematica. In Migliari Riccardo. *Geometria descrittiva. Tecniche ed applicazioni*. Novara: CittàStudi, pp. 5-59, vol. 2.
- Cresci Luciano, 1998. *Le curve celebri*. Padova: Franco Muzio.
- Cresci Luciano, 2005. *Le curve matematiche. Tra curiosità e divertimento*. Milano: Hoepli.
- D'Ocagne Maurice, 1896. *Cours de géométrie descriptive et de géométrie infinitésimale*. Paris: Gauthier-Villars.

## Le linee curve per l'architettura e il design

- De Carlo Laura, 2009. Le linee curve. In Migliari Riccardo. *Geometria descrittiva. Tecniche ed applicazioni*. Novara: CittàStudi, pp.97-129, vol. 2.
- De Rubertis Roberto, 1999. Un enigma avvincente: il tracciato planimetrico ellittico del Colosseo. *Disegnare Idee Immagini*, 18/19, pp. 99-106.
- Docci Mario, 1999. La forma del Colosseo: dieci anni di ricerche. Il dialogo con i gromatici romani. *Disegnare Idee Immagini*, 18/19, pp. 23-32.
- Dupin Charles, 1829. *Geometria e meccanica delle arti, dei mestieri, delle belle arti*. Firenze: Stamperia di Guglielmo Piatti.
- Eulero Leonard, 1767. Recherches sur la courbure des surfaces. *Memoires de l'academie des sciences de Berlin*, 16, pp. 119-143.
- Fallavollita Federico, Salvatore Marta, 2012a. Geometria e costruzione. La teoria delle linee di curvatura nella stereotomia della pietra. *Disegnarecon*, n. 9, pp. 125-134, vol. 5.
- Fallavollita Federico, Salvatore Marta, 2012b. The ruled surfaces in stone architecture. In Gambardella Carmine (a cura di). *Le vie dei mercanti - Less More*. Napoli: La scuola di Pitagora, pp. 261-269.
- Fiedler Wilhelm, 1873. *Trattato di geometria descrittiva*. Firenze: Le Monnier.
- Freguglia Paolo, 1999. *La geometria fra tradizione e innovazione*. Torino: Bollati Boringhieri.
- Frère Gabriel Marie (Edmond Brunhes), 1893. *Élément de Géométrie Descriptive*. Tours: Alfred Mame et fils; Paris: Charles Poussielgue. Riproduzione anastatica. F.G.-M. 1996. *Géométrie descriptive, tome I, Éléments*. Mayenne: Jacques Gabay.
- Frère Gabriel Marie (Edmond Brunhes), 1920. *Exercices de Géométrie Descriptive*. Tours: Alfred Mame et fils; Paris: J. De Gigord. Riproduzione anastatica. F.G.-M. 1996. *Géométrie descriptive, tome II, Exercices*. Mayenne: Jacques Gabay.
- Gay Fabrizio, 2016. Verso una morfologia degli artefatti: da Monge a Petitot, la geometria descrittiva dopo la geometria descrittiva. In Di Luggo Antonella (a cura di). *Territori e frontiere della rappresentazione*. Roma: Gangemi, pp. 59-66.
- Giordano Andrea, 1999. *Cupole volte e altre superfici*. Torino: Utet.
- Giusti Enrico, 2007. *Piccola storia del calcolo infinitesimale dall'antichità al Novecento*. Pisa: Istituti editoriali e poligraci internazionali.
- Hachette Jean Nicolas Pierre, 1813. *Correspondance sur l'École Royale Polytechnique, Vol. II, n. 4, 1812*. Paris: Chez J. Klostermann, Libraire de l'Ecole Impériale Polytechnique.
- Hilbert David, Cohn-Vossen Stefan, 1932. *Geometria intuitiva*. Torino: Bollati Boringhieri.
- Inglese Carlo, 2017. Dalla pratica alla trattazione teorica: le incisioni delle volute ioniche. *Disegnare Idee Immagini*, 55, pp. 42-51.
- Kline Morris, 1991. *Storia del pensiero matematico, Vol. I, Dall'antichità al Settecento*. Torino: Einaudi. Traduzione di Conte Alberto (a cura di). Ed. orig. *Mathematical Thought From Ancient to Modern Times*. Oxford: University press, 1972.
- Lambert Johannes Heinrich, 1760. *Photometria, sive mensura et gradibus luminis, coloribus et umbrae*. Augustae vindelicorum: Sumptibus viduae Eberhardi Klett, Typis Christophori Petri Detleffsen.
- Leroy Charles François Antoine, 1838. *Trattato di geometria descrittiva. Prima versione dal francese con note di Salvatore D'Ayala e Paolo Tucci*. Napoli: Reale tipografia della guerra.
- Leroy Charles François Antoine, 1862. *Traité de stéréotomie*. Paris: Mallet-Bachelier.
- Loria Gino, 1912. *Poliedri, curve e superficie*. Milano: Hoepli.

- Loria Gino, 1914. *Le scienze esatte nell'antica Grecia, Libro I -[II]*. Milano: U. Hoepli.
- Loria Gino, 1925a. *Curve sghembe speciali algebriche e trascendenti. Curve algebriche*. Bologna: Zanichelli, vol. 1.
- Loria Gino, 1925b. *Curve sghembe speciali algebriche e trascendenti. Curve sferiche - curve definite da una reazione tra flessione e torsione - curve particolari situate sopra superficie assegnate*. Bologna: Zanichelli, vol. 2.
- Loria Gino, 1930a. *Curve piane, speciali, algebriche e trascendenti. Curve algebriche*. Milano: Hoepli, vol. 1.
- Loria Gino, 1930b. *Curve piane, speciali, algebriche e trascendenti. Curve trascendenti - Curve dedotte da altre*. Milano: Hoepli, vol. 2.
- Loria Gino, 1931. *Il passato e il presente delle principali teorie geometriche*. Padova: Cedam.
- Loria Gino, 1935. *Metodi matematici*. Milano: Hoepli.
- Losito Maria, 1993. La ricostruzione della voluta ionica vitruviana nei trattati del rinascimento. *Mélanges de l'école française de Rome*, 105-1, pp. 133-175.
- Martines Gianciacomo, 1983. La struttura della Colonna Traiana: un'esercitazione di meccanica alessandrina. *Prospettiva*, 32, pp. 60-71.
- Migliari Riccardo, 1999. Principi teorici e prime acquisizioni nel rilievo del Colosseo. *Disegnare Idee Immagini*, 18/19, pp. 33-50.
- Migliari Riccardo, 2009a. *Geometria Descrittiva. Metodi e costruzioni*. Novara: CittàStudi, vol. 1.
- Migliari Riccardo, 2009b. *Geometria Descrittiva. Tecniche ed applicazioni*. Novara: CittàStudi, vol. 2.
- Monge Gaspard, 1796. Analyse appliquée à la géométrie. *Journal de l'École polytechnique, chaier II*.
- Monge Gaspard, 1798. *Géométrie descriptive*. Paris: Baudouin.
- Palladio Andrea, 1570. *I quattro libri dell'architettura*. Venezia, appresso Dominico de' Franceschi. Ristampa. Milano: Hoepli, 1945.
- Paris Leonardo, 2008. Conseguenze informatiche nella rappresentazione. Disegno e modello del capitello ionico. *Disegnare Idee Immagini*, 36, pp. 82-92.
- Paris Leonardo, 2012. Teoria geometrica degli ingranaggi. In Casale Andrea (a cura di). *Geometria descrittiva e rappresentazione digitale. Memoria e innovazione*. Roma: Kappa, pp. 63-84, vol. 2.
- Peano Giuseppe, 1887. *Applicazioni geometriche del calcolo infinitesimale*. Torino: Bocca.
- Pintore Angela, Salvatore Marta, 2007. Shape from points. Morfogenesi e modellazione matematica. In De Carlo Laura (a cura di). *Informatica e fondamenti scientifici della rappresentazione*. Roma: Gangemi, pp. 161-174.
- Rogers David F., 2000. *An Introduction to NURBS: With Historical Perspective*. Burlington: Morgan Kaufmann - Elsevier.
- Russo Lucio, 1996. *La rivoluzione dimentica*. Milano: Feltrinelli.
- Sala Nicoletta, Sala Massimo, 2013. *Geometrie del design. Forme e materiali per il progetto*. Milano: FrancoAngeli.
- Salvatore Marta, 2009a. Intersezioni piane tra superfici quadriche. In Migliari Riccardo. *Geometria descrittiva. Tecniche ed applicazioni*. Novara: CittàStudi, pp. 280-295, vol. 2.
- Salvatore Marta, 2009b. La stereotomia. In Migliari Riccardo. *Geometria descrittiva. Tecniche ed applicazioni*. Novara: CittàStudi, pp. 485-561, vol.2.

## Le linee curve per l'architettura e il design

- Salvatore Marta, 2011. Modelli litici di scale elicoidali. In Gambardella Carmine (a cura di). *Le vie dei Mercanti, S.A.V.E. Heritage*. Napoli: La scuola di Pitagora, pp. 1-12.
- Salvatore Marta, 2012. *La stereotomia scientifica in Amedée François Frézier. Prodromi della geometria descrittiva nella scienza del taglio delle pietre*. Firenze: University Press.
- Sereni Carlo, 1826. *Trattato di geometria descrittiva*. Roma: Stamperia di Filippo e Nicola De Romanis.
- Sereni Carlo, 1845. *Geometria descrittiva*. Roma: Tipografia Salviucci.
- Townsend Alastair, 2014. On the Spline: A Brief History of the Computational Curve. *International Journal of Interior Architecture + Spatial Design: Applied Geometries*, pp. 48-59, vol. 3.
- Valenti Graziano Mario, 2008. *De.form.are – De.form.ing*. Roma: Rdesignpress.
- Villa Mario, 1960. Sulla definizione della torsione di una curva sghemba. *Bollettino dell'Unione Matematica Italiana*, Serie 3, 1, pp. 47-54, vol. 15.
- Vitruvio Pollione Marco, *De Architectura*, 27 a.C. Interpretazione di Florian Giovanni. *Dell'architettura*. Pisa: Giardini.

## Seconda parte

- Angelini Beatrice, 1999. Metodologia per lo studio del rilievo e della rappresentazione delle superfici rototraslate. La coclide di Bramante al Belvedere Vaticano. In AA.VV. *Geometria e Architettura, Strumenti del Dottorato di Ricerca in Rilievo e Rappresentazione dell'Architettura e dell'Ambiente*. Roma: Gangemi, pp. 63-85, vol. 1.
- Argan Giulio Carlo (a cura di), 1952. *Borromini*. Milano: Mondadori.
- Arruga Lorenzo, Cella Franca (a cura di), 2006. *Pier Luigi Pizzi Inventore di teatro*. Torino: Umberto Allemandi & C.
- Barde F.A., 1834. *Traité Encyclopédique de l'Art du Tailleur*. Paris: Hippolyte Tiliard, 1834.
- Bellini Federico, 2004. *Le cupole di Borromini*. Milano: Electa.
- Bézier Pierre Etienne, 1971. Example of an Existing System in the Motor Industry: The Unisurf System. *Proceedings of the Royal Society of London*. 1545, vol. 321, pp. 207-218.
- Blunt Anthony, 1983. *Vita e opere di Borromini*. Roma: Laterza.
- Bösel Richard, Frommel Christoph Luitpold (a cura di), 2000. *Borromini e l'universo barocco*. Milano: Electa.
- Boullay Benoit, 1671. *Le Tailleur Sincère, contenant ce qu'il faut observer pour bien tracer, couper & assembler toutes les principales pieces qui se font dans la profession de Tailleur*. Paris: Antoine de Rafflé.
- Brandi Cesare, 1974. *Struttura e architettura*. Torino: Einaudi, 1974. Ed. orig. Torino: Einaudi.
- Brevi Fausto, 2004. *Il design delle superfici. I modelli digitali per il disegno industriale*. Milano: PoliDesign.
- Bruschi Arnaldo, 1978. *Borromini, manierismo spaziale oltre il barocco*. Bari: Dedalo libri.
- Cambridge Nicolas Adam, 2013. Homo (wo)mensura: unpicking the flat pattern-cutting regimes of sartorial culture. *International Journal of Fashion Design. Technology and Education*, 2, pp. 121-129, vol. 6.

- Canciani Marco, 2016. Drawing, Geometry and Construction: The Dome of San Carlino Alle Quattro Fontane (1634-1675) by Francesco Borromini. In Amoroso Giuseppe (a cura di). *Visual Computing and Emerging Geometrical Design Tools*. Hershey PA: IGI Global, pp. 608-641, vol. 2.
- Caraceni Domenico, 1933. *Orientamenti nuovi nella tecnica e nell'arte del sarto*. Roma: D. Squarci e Figli.
- Carlevaris Laura, De Carlo Laura, Migliari Riccardo (a cura di), 2012. *Attualità della Geometria descrittiva*. Roma: Gangemi.
- Carlucci Simona, Soresi Giovanni, Ursini Ursic Giorgio (a cura di), 1984. *Josef Svoboda*. Milano: Studio i.
- Casson Lionel, 2004. *Navi e marinai dell'antichità*. Milano: Mursia Editore.
- Ceccarelli Marco, Cigola Michela, 2009. Descriptive Geometry and the Theory of Mechanisms in XIX century Italian Engineering: similarities and interrelationships. *Disegnare Idee Immagini*, 39, pp. 12-25.
- Ceccato Cristiano, Lars Hesselgren, Mark Pauly, Helmutt Pottmann, Johannes Wallner, 2010. *Advances in Architectural Geometry 2010*. Wien: Springer-Verlag.
- Cho Youngsook, Park Hyejun, Takatera Masayuki, Kamijo Masayoshi, Hosoya Satoshi, Shimizu Yoshio, 2003. Pattern Remaking System of Dress Shirt Using 3D Shape Measurement. *Journal of the Asian Design International Conference*, 1, pp. 1-8.
- Ciammaichella Massimiliano, 2007. *La pelle dell'architettura contemporanea*. Roma: Aracne.
- Ciammaichella Massimiliano, 2011. *Disegno digitale per la moda. Dal figurino all'avatar*. Roma: Aracne.
- Ciammaichella Massimiliano, 2013. Processi di sviluppo delle superfici. Architettura e moda a confronto. In Casale Andrea (a cura di). *Geometria Descrittiva e Rappresentazione Digitale. Memoria e innovazione*. Roma: Kappa, pp. 187-195, vol. 2.
- Carlioni Roberto, 2009. Le teorie e le tecniche della rappresentazione matematica. In Migliari Riccardo. *Geometria Descrittiva. Tecniche ed applicazioni*. Novara: CittàStudi, pp. 5-59, vol.2.
- Cigola Michela, Ceccarelli Marco, 2016. Machine Designs and Drawings in Renaissance Editions of de Architectura by Marcus Vitruvius Pollio. In Sorge Francesco, Genghi Giuseppe (a cura di). *Essays on the History of Mechanical Engineering. History of Mechanism and Machine Science*. Cham: Springer, pp. 1-5, vol. 31.
- Codazza Giovanni, 1854. *Teoria geometrica degli ingranaggi*. Milano: Giuseppe Bernardoni.
- Codeluppi Vanni, 2003. *Che cos'è la moda*. Roma: Carocci.
- Connors Joseph (a cura di), 1998. *Francesco Borromini. Opus architectonicum*. Milano: Il Polifilo.
- Curtis William J., 2016. *L'architettura moderna dal 1900*. London: Phaidon.
- D'amato Gabriella, 2001. *L'arte di arredare. La storia di un millennio attraverso gusti, ambienti, atmosfere*. Milano: Mondadori.
- De Alcega Juan, 1580. *Libro de Geometría, Prática, Y Traça, el cual trata de lo tocante al officio de sastrre, para saber pedir el paño, seda, o otra tela que sera menester para mucho genero de vestidos, ansi de hombres, como de mujeres, y para saber como se an de cortar los tales vestidos, con otros secretos; y curiosidades tocantes a este arte...* Madrid: Guillermo Drouy.
- De Boor Carl R., 1978. *A practical guide to splines*. New York: Springer-Verlag.

## Le linee curve per l'architettura e il design

- De Carlo Laura, Baglioni Leonardo, 2009. Le linee curve. In Migliari Riccardo. *Geometria descrittiva*. Novara: CittàStudi, pp.97-143, vol. 2.
- De Casteljou Paul, 1959. *Courbes à pôles*. INPI.
- De Fusco Renato, 2003. *Storia del design*. Bari: Laterza.
- De Gersault Francoise Alexandre Pierre, 1769. *Art du Tailleur, contenant Le Tailleur d'habits d'hommes; les Culottes de Peau; le Tailleur de Corps de Femmes & Enfants: la Couturiere; & la Marchande de Modes*. Paris: M. de Gersault.
- De La Rocha Burguen Francisco, 1618. *Geometria, y traça perteneciente al oficio de sastres. Donde se contiene el modo y orden de cortar todo genero de vestidos Españoles, y algunos Franceses, y Turcos...* Valencia: Pedro Patricio Mey.
- De Luca Mauro, Sorella Pietra Fratello Ferro, 2017. *Un percorso nella cultura tecnologica del progetto*. Firenze: AltraLinea.
- De Vizè Donneau, 1982. *Mercurie Galant. 1672-1674*. Genève-Paris: Slatkine.
- Debo Kaat (a cura di), 2003. *Patronen/Patterns, MoMu Mode Museum, catalogo della mostra, 24 aprile-10 agosto 2003*. Ghent: Ludion.
- Deleuze Gilles, 2004. *La piega, Leibniz e il Barocco*. Milano: Einaudi.
- Ferrara Marinella, 2004. *Materiali e innovazioni nel design: meccanismi di innovazione*. Roma: Gangemi.
- Focillon Henri, 1987. *Vita delle forme*. Torino: Einaudi. Traduzione di Bettini Sergio.
- Frampton Kennet, 2008. *Storia dell'architettura moderna*. Bologna: Zanichelli.
- Gaiani Marco (a cura di), 2006. *La rappresentazione riconfigurata. Un viaggio lungo il processo di produzione del progetto di disegno industriale*. Milano: PoliDesign.
- Gaiani Marco, Guidi Gabriele, Micoli Laura, Musio Sale Massimo, Russo Michele, 2006. Reverse modeling per la nautica: rilievo dello scafo di un gommone con sistemi di scansione 3D a basso costo. *Disegnare Idee Immagini*, 31, 82-93.
- Gill Alison, 1998. Fashion: The Making of Unfinished, Decomposing and Re-Assembled Clothes. *Fashion Theory*, 1, pp. 25-50, vol. 2.
- Guidi Gabriele, Micoli Laura Loredana, Russo Michele, 2005. Boat's hull modeling with low cost triangulation scanners. *Proceedings of the Videometrics VIII, part of the IS&T/SPIE Symposium Electronic Imaging*, pp. 28-39, Vol. 5665.
- Guidi Gabriele, Russo Michele, Beraldin Jean-Angelo, 2010. *Acquisizione e modellazione poligonale*. Milano: McGraw Hill.
- Hempel Eberhard, 1924. *Francesco Borromini*. Wien: A. Schroll & Co., 1924. Edizione italiana. Milano: Società editrice d'arte illustrata.
- Hodge Brooke, 2007. *Skin + Bones. Parallel Practices in Fashion and Architecture*. London: Thames & Hudson.
- Laplaiche Virginie, 2002. *Geneviève Sevin-Doering: costumes*. Paris: Ecole du Louvre.
- Leroy Charles Francoise Antoine, 1872. *Traité de géométrie descriptive; suivi de la méthode des plans cotes et de la théorie des engrenages cylindriques et coniques: avec une collection d'epures composee de 69 planches*. Parigi: Bachelier.
- Liming Roy A., 1944. *Practical Analytic Geometry with Applications to Aircraft*. USA: The Macmillan Company.
- Lindqvist Rickard, 2013. On The Logic of Pattern Cutting. Foundational Cuts and Approximations of the Body. *Artistic Research*, 3.

- Liu Yong-Jin, Zhang Dong-Liang, Yuen Matthew, 2010. A survey on CAD methods in 3D garment design. *Computer in Industry*, 61, pp. 576-593.
- Loria Gino, 1921. *Storia della Geometria Descrittiva dalle origini sino ai giorni nostri*. Milano: Hoepli.
- Lupano Mario, Vaccari Alessandra (a cura di), 2009. *Una giornata moderna. Moda e stili nell'Italia fascista*. Bologna: Damiani.
- Marzari Mario (a cura di), 1998. *Navi di legno. Evoluzioni tecnica e sviluppo della cantieristica nel Mediterraneo dal XVI secolo ad oggi*. Trieste: LINT.
- Masini Lara Vinca, 2009. *Liberty. Art Nouveau*. Milano: Giunti.
- Massobrio Giovanna, Portoghesi Paolo, 1976. *La seggiola di Vienna: storia dei mobili in legno curvato*. Torino: Martano.
- Massobrio Giovanna, Portoghesi Paolo, 1992. *Casa Thonet. Storia dei mobili in legno curvato*. Bari: Laterza.
- Mello Bruno, 1987. *Trattato di scenotecnica*. Novara: Gorlich.
- Migliari Riccardo, 2009a. *Geometria Descrittiva. Metodi e costruzioni*. Novara: CittàStudi, vol. 1.
- Migliari Riccardo, 2009b. *Geometria Descrittiva. Tecniche ed applicazioni*. Novara: CittàStudi, vol. 2.
- Miyake Issey, Kitamura Midori, 2012. *Pleats Please*. Koln: Taschen.
- Morini Enrica, 2006. *Storia della moda. XVIII-XX secolo*. Milano: Skira.
- Musio Sale Massimo (a cura di), 2009. *Yacht Design: dal concept alla rappresentazione*. Milano: Tecniche Nuove.
- Nakamichi Tomoko, 2012. *Pattern Magic, 3 voll.* London: Laurence King.
- Oestergard Derek E., 1987. *Bentwood and metal furniture: 1850-1946*. Washington: University of Washington Press.
- Olivier Théodore, 1844. *Théorie géométrique des engrenages*. Paris: Bachelier.
- Paris Ivan, 2006. *Oggetti cuciti. L'abbigliamento pronto in Italia dal primo dopoguerra agli anni Settanta*. Milano: FrancoAngeli.
- Paris Leonardo, 2012a. Geometrie coniugate. *Disegnarecon*, 9, pp. 235-244, vol. 5.
- Paris Leonardo, 2012b. Teoria geometrica degli ingranaggi. In Casale Andrea (a cura di). *Geometria descrittiva e rappresentazione digitale. Memoria e innovazione*. Roma: Kappa, pp. 63-84, vol. 2.
- Paris Leonardo, 2015. Shape and Geometry in the Integrated Digital Survey. In Brusaporci Steafano (a cura di). *Handbook of Research on Emerging Digital Tools for Architectural Surveying, Modeling, and Representation*. London: ICI Global, pp. 214-238.
- Paris Leonardo, 2016. La scala elicoidale a Caprarola di Jacopo Barozzi da Vignola. Innovazione formale tra teoria e prassi. In Bini Marco, Berocci Stefano (a cura di). *Le ragioni del Disegno*. Roma: Gangemi, pp. 523-530.
- Paris Leonardo, Ricci Maurizio, 2014. Osservazioni su un disegno prospettico attribuito a Ottaviano Mascarino. *Disegnare Idee Immagini*, 48, pp. 22-33.
- Paris Leonardo, Ricci Maurizio, Roca De Amicis Augusto, 2016. *Con più difficoltà. La scala ovale di Ottaviano Mascarino nel palazzo del Quirinale*. Roma: Campisano editore.
- Paris Leonardo, Valenti Graziano Mario, 2015. La scala elicoidale del Borromini a Palazzo Barberini: rilievo scan laser modellazione parametrica. *Disegnarecon*, 15, pp. 11.1-11.11., vol. 8.

## Le linee curve per l'architettura e il design

- Piegl Les., Tiller Wayne, 1995. *The NURBS Book*. Switzerland AG: Springer-Verlag.
- Portoghesi Paolo, 1964. Thonet e la produzione di serie. *La botte e il violino*, 1.
- Portoghesi Paolo, 1984. *Francesco Borromini*. Milano: Electa.
- Portoghesi Paolo, 2014. La biblioteca di Francesco Borromini. In Cazzato Vincenzo, Roberto Sebastiano, Bevilacqua Mario (a cura di). *La Festa delle Arti*. Roma: Gangemi, pp. 358-365.
- Portoghesi Paolo, 2015. Concordia Discors: L'architettura barocca a Roma. In Fagiolo Marcello (a cura di). *Roma Barocca. I protagonisti, gli spazi urbani, i grandi temi*. Roma: De Luca Editori d'Arte, pp. 25-59.
- Pottmann Helmut, Asperl Andreas, Hofer Michael, Kilian Axel, 2007. *Architectural Geometry*. Exton: Bentley Institute Press.
- Pottmann Helmut, Schiftner Alexander, Bo Pengbo, Schmiedhofer Heinz, Wang Wenping, Baldassini Niccolo, Wallner Johannes, 2008a. Freeform surfaces from single curved panels. *ACM Transactions on Graphics - Proceedings of ACM SIGGRAPH*, 3, article n. 76, vol. 27.
- Pottmann Helmut, Schiftner Alexander, Wallner Johannes, 2008b. Geometry of Architectural Freeform Structures. *ACM Symposium on Solid and Physical Modeling*, 209, pp. 15-28.
- Prokopios Kantas, 2015. *Teoria geometrica degli ingranaggi. Tesi di dottorato XXVIII ciclo in Scienze della Rappresentazione e del Rilievo*. Roma.
- Quilici Vieri, 1991. *Il Costruttivismo*. Bari: Laterza.
- Raspe Martin, 2000. Borromini e la cultura antiquaria. In Bösel Richard, Frommel Christoph Luitpold (a cura di). *Borromini e l'universo barocco*. Milano: Electa, pp.83-93, vol. 1.
- Remondino Fabio, El-Hakim S.F., 2006. Image-Based 3D Modeling: A review. *The Photogrammetric Record Journal*, 115, pp. 269-291, vol. 21.
- Ricci Maurizio (a cura di), 2016. *Mascariniana. Studi e ricerche sulla vita e le opere di Ottaviano Mascarino*. Roma: Campisano.
- Rogers David F., 2000. *An Introduction to NURBS: With Historical Perspective*. Burlington: Morgan Kaufmann - Elsevier.
- Sala Nicoletta, Sala Massimo, 2013. *Geometrie del design. Forme e materiali per il progetto*. Milano: FrancoAngeli.
- Sato Shingo, 2016. *Transformational Reconstruction, 3 voll.* Saint Helena: Antiquity Press.
- Schumacher Patrik, 2013. Parametric Semiology: the design of information-rich environments. In Eiroa Pablo Lorenzo, Sprecher Aaron (a cura di). *Architecture In Formation. On the nature of information in digital architecture*. Abingdon: Routledge, pp. 53-59.
- Sederberg Thomas W., 2012. *Computer aided geometric design*. Provo: BYU.
- Sederberg Thomas W., Zheng Jianmin, Bakenov Almaz, Nasri Ahmad, 2003. T-splines and T-NURCCS. *ACM Transactions on Graphics*, 22 (3), pp. 477-484.
- Sedlmayr Hans, 1996. *L'architettura di Borromini*. Milano: Electa.
- Sembach Klaus Jorgen, 2016. *Art Nouveau*. Koln: Taschen.
- Serafini Giuliano, 2003. *Le arti decorative alle origini del moderno*. Milano: Giunti.
- Settimi Bruno, 1970. *Enciclopedia. La Moda maschile per il sarto, il modellista industriale ed il tecnico della confezione in serie, XX ed.* Milano: La Moda Maschile.
- Spadafora Giovanna, 2015. Nelle pieghe del dettaglio. Riflessioni sulla forma nell'opera di Francesco Borromini. *L'architettura delle città - The Journal of the Scientific Society Ludovico Quaroni*, 7, pp. 11-24, vol. 4.
- Spadafora Giovanna, 2016. Geometry and drama in Borromini's architectural details. Moldings

- in Palazzo Falconieri. In Amoruso Giuseppe (a cura di). *Visual Computing and Emerging Geometrical Design Tools*. Hershey PA: IGI Global, pp. 666-693, vol. 2.
- Spanabel Emery Joy, 2015. *A History of the paper pattern industry. The home dressmaking fashion revolution*. London-New York: Bloomsbury.
- Strada Nanni, 2013. *Lezioni. Moda-Design e Cultura del Progetto*. Milano: Lupetti.
- Svoboda Josef, 1997. *I segreti dello Spazio Teatrale*. Milano: Ubulibri.
- Tessari Domenico, 1902. *La costruzione degli ingranaggi: ad uso delle scuole degli ingegneri e dei meccanici*. Torino: Fratelli Bocca.
- Townsend Alastair, 2014. On the Spline: A Brief History of the Computational Curve. *International Journal of Interior Architecture + Spatial Design: Applied Geometries*, pp. 48-59, vol. 3.
- Ursini Ursic Giorgio (a cura di), 2001. *Ezio Frigerio*. S.l.l.
- Valenti Graziano Mario, 2008. *De.form.are – De.form.ing*. Roma: Rdesignpress.
- Villani Marcello, 2008. *La più nobile parte. L'architettura delle cupole a Roma 1580-1670*. Roma: Gangemi.
- Volino Pascal, Magnenat-Thalmann Nadia, 2000. *Virtual Clothing. Theory and Practice*. Berlin: Springer.
- Watkin David, 2010. *Storia dell'architettura occidentale*. Bologna: Zanichelli.
- Zammerini Massimo, 2012. *Cambio di scena. La scenografia teatrale tra realismo e astrazione*. Roma: Kappa.
- Zammerini Massimo, 2017a. Architettura e scenografia nella Roma del Settecento. In Alfonsetti Beatrice (a cura di). *Settecento romano. Reti del classicismo arcadico*. Roma: Viella, pp. 221-232.
- Zammerini Massimo, 2017b. Luce e cromatura. L'introduzione dell'acciaio cromato nell'architettura e nel design del Modernismo. In Veronica Marchiafava, Francesca Valan (a cura di). *Colore e Colorimetria. Contributi Multidisciplinari, vol. XIII A*. Milano: Associazione Italiana Colore, pp. 158-166.
- Zanchettin Vitale, 1997. Il tiburio di Sant'Andrea alle Fratte: propositi e condizionamenti nel testo borrominiano. *Annali di Architettura*, 9, pp. 112-135.
- Zanchettin Vitale, 2000. Il disegno Albertina, AZ.Rom 106 per Sant'Andrea delle Fratte: modello antico e problemi contingenti nella progettazione del tiburio. In Frommel Christoph Luitpold, Sladek Elisabeth (a cura di). *Francesco Borromini, Atti del convegno internazionale, 13-15 gennaio 2000*. Milano: Electa, pp. 166-170.



## Gli autori

### **Massimiliano Ciammaichella**

Architetto, professore associato in Disegno, è stato direttore del corso di laurea magistrale in Scienze e Tecniche del Teatro presso l'Università Iuav di Venezia (2016/2018), dove tiene i corsi di *Disegno, animazione e scena digitale* e *Laboratorio di Disegno e modellistica*.

### **Laura De Carlo**

Architetto, già professore ordinario di Disegno della Sapienza Università di Roma. Ha rivolto i suoi prevalenti interessi ai fondamenti scientifici e alla storia della rappresentazione nonché alle nuove strumentazioni per l'analisi e la comunicazione della forma in architettura.

### **Matteo Flavio Mancini**

Architetto, PhD in Scienze della Rappresentazione e del Rilievo presso la Sapienza Università di Roma, si occupa di geometria descrittiva e modellazione digitale. Dal 2015 svolge attività didattica e di ricerca presso il Dipartimento di Architettura dell'Università degli Studi Roma Tre.

### **Leonardo Paris**

Architetto, professore associato in Disegno della Sapienza di Roma, insegna *Geometria Descrittiva* e *Rilievo* ad Ingegneria e ad Architettura. La sua attività di ricerca è incentrata sullo studio della forma e della geometria nell'architettura, nell'ingegneria e nel design. Si occupa da anni di rilievo digitale e modellazione.

Le linee curve per l'architettura e il design

**Maria Laura Rossi**

Ingegnere edile-architetto, PhD in Storia, Disegno e Restauro dell'Architettura, docente a contratto della Sapienza Università di Roma, sede di Rieti, facoltà di Ingegneria. Svolge attività di ricerca nell'ambito del rilievo digitale integrato e della modellazione digitale parametrica HBIM.

**Michele Russo**

Architetto, PhD, ricercatore senior in Disegno presso il Dipartimento di Storia, Disegno e Restauro dell'Architettura della Sapienza Università di Roma, da quindici anni si occupa di rilievo e modellazione tridimensionale nell'ambito dei Beni Culturali e del Design.

**Marta Salvatore**

Architetto, PhD, ricercatore presso il Dipartimento di Storia, Disegno e Restauro dell'Architettura della Sapienza Università di Roma. Indirizza la propria attività di ricerca alla geometria descrittiva, al suo sviluppo storico e alle sue più recenti applicazioni attraverso i metodi digitali della rappresentazione.

**Giovanna Spadafora**

Architetto, professore associato in Disegno della Facoltà di Architettura dell'Università Roma Tre, dove insegna *Fondamenti e Applicazioni di Geometria Descrittiva e Rilievo*. Si occupa da molti anni di rilevamento e di rappresentazione architettonica e archeologica.

**Massimo Zammerini**

Architetto, professore associato in Composizione Architettonica alla Sapienza Università di Roma, insegna *Laboratorio di Progettazione III e Scenografia*. Dirige il Master in *Scenografia Teatrale e Televisiva*, svolge attività di sperimentazione progettuale nel campo dell'architettura e dell'interior design.

---

*Forme del disegno*  
diretta da E. Ippoliti, M. Rossi, E. Dotto

---

*Ultimi volumi pubblicati:*

ANDREA CASALE, *Forme della percezione*. Dal pensiero all'immagine (disponibile anche in e-book).

Il volume raccoglie studi che indagano sul ruolo delle linee quale matrice formale dell'architettura e del design. Considerando la geometria al centro sia del processo creativo della progettazione che della concretizzazione della forma nella costruzione vera e propria, lo studio della geometria solida delinea un settore di ricerca attualmente emergente al confine tra geometria applicata e architettura, specie in un momento in cui l'analisi e la produzione si manifestano attraverso forme sempre più complesse. La geometria costruttiva contemporanea trova nella *architectural geometry* un grande potenziale che dimostra come le conoscenze geometriche possano essere alla base di un uso creativo del digitale. Le linee curve sono le figure geometriche che più frequentemente si incontrano nella teoria e nella pratica e lo studio delle teorie ad esse associate risulta indispensabile dal momento che la soluzione di ogni problema di costruzione della forma ha come momento iniziatico il tracciamento di una o più linee e la ricerca degli elementi ad esse comuni. Lo studio delle proprietà e della delimitazione di queste figure geometriche risulta fondamentale in tutto lo sviluppo storico della geometria a partire dall'antichità fino alle più recenti elaborazioni digitali come la costruzione di modelli tridimensionali virtuali di rappresentazione che permettono di rivisitare le teorie classiche nella loro evoluzione storica esplicitando, attraverso idonee visualizzazioni, moltissime proprietà geometriche molto spesso relegate nell'alveo dell'analisi matematica e delle sue espressioni più astratte. Nella prima parte del volume si è voluto delineare un quadro generale sulle origini delle teorie matematiche alla base della conoscenza delle proprietà di questi enti geometrici e sulla loro ricaduta nella progettazione della forma, sia in chiave storica che analizzando i più recenti strumenti digitali oggi a disposizione. La seconda parte raccoglie alcuni saggi attraverso i quali emerge l'ampio spettro di possibili applicazioni sull'uso della linea curva nel processo progettuale: dall'architettura al design; dalla nautica al mondo della moda; dalle teorie geometriche degli ingranaggi alle freeform dell'architettura contemporanea.

*Laura De Carlo*, già professore ordinario di Disegno della Sapienza Università di Roma, dipartimento di Storia, Disegno e Restauro dell'Architettura, insegna Geometria descrittiva ad Architettura ed è autore di numerose pubblicazioni e articoli su riviste specializzate incentrate sui fondamenti scientifici e sulla storia della rappresentazione nonché sulle nuove strumentazioni per l'analisi e la comunicazione della forma in architettura.

*Leonardo Paris*, professore di Disegno della Sapienza Università di Roma, dipartimento di Storia, Disegno e Restauro dell'Architettura, insegna ad Architettura e Ingegneria Civile e Industriale ed è autore di numerosi saggi pubblicati in volumi e riviste di settore. Si occupa di geometria descrittiva e modellazione 3D. È responsabile scientifico di numerosi rilievi eseguiti con innovative tecniche di acquisizione digitale.