

## 5. I principi geometrici

Manca di mentalità matematica tanto chi non sa riconoscere rapidamente ciò che è evidente, quanto chi si attarda nei calcoli con una precisione superiore alla necessità.  
Carl Friedrich Gauss

### **La rivelazione delle superfici: dal dato al *pattern***

Per razionalizzare una superficie complessa è fondamentale procedere alla sistematizzazione dei principi geometrici elementari: è sulla regola geometrica che si fonda la sintassi del progetto, capace di legare forma, struttura e materiali.

A tal proposito, la geometria descrittiva rappresenta lo strumento principale attraverso cui l'architetto esercita in maniera consapevole tale controllo.

Da ciò deriva l'esigenza ed il tentativo di tradurre il linguaggio implicito della matematica e dell'informatica attraverso la descrizione grafica dei principi geometrici coinvolti nei processi. Favorire lo sviluppo di nuovi approcci per l'insegnamento della geometria descrittiva o della matematica applicata rappresenta dunque un obiettivo fondamentale

per l'individuazione di soluzioni innovative a partire dalla conoscenza dei principi di base.

Lo scopo è mirare all'applicazione e allo sviluppo di metodi efficaci, utilizzando in maniera innovativa gli strumenti più avanzati e attualmente disponibili.

La gestione grafica e la comunicazione visiva di informazioni favorisce la manipolazione dei dati derivanti da tali strumenti. Gli strumenti diagnostici forniti dai modellatori CAD, ad esempio, possono assumere il ruolo di veri e propri strumenti progettuali utili per generare risposte ottimali finalizzati alla gestione di oggetti apparentemente indecifrabili, ma strutturati su codici estremamente definiti. Nel campo della progettazione delle forme complesse, «la superficie è in grado di dettagliare le forme in maniera molto più raffinata rispetto alla modellazione solida»<sup>1</sup>.

La rigidità dei principi che regolano la distribuzione di un *pattern* geometrico regolare quasi sempre collide con la natura delle superfici *free form*.

Le esigenze di tipo strutturale e costruttivo a cui l'architettura è fondamentalmente legata, esigono un equilibrio geometrico che consenta la realizzazione fisica delle superfici o della superficie che sostanziano la forma dell'oggetto ideato.

Graficizzare una superficie attraverso una rete di curve equivale ad esplicitarne la natura geometrica e con essa le potenzialità, allo scopo di favorirne una manipolazione consapevole. Visualizzare tali informazioni è fondamentale per dimostrare l'esistenza o meno di una possibile condizione di equilibrio.

È importante riflettere sulla sottile differenza esistente tra *pattern* e *texture*. Data una superficie, un *pattern* è un veicolo che consente la comunicazione di informazioni. Il *pattern* rappresenta il codice, la serie di segni attraverso cui è possibile scomporre e comunicare un'informazione complessa in elementi più semplici e riconoscibili, mentre, più generalmente, la *texture* è caratterizzata da un gioco

<sup>1</sup> Ciarloni 2009, p.8.

infinito di linee che, intrecciandosi, formano una tessitura.

Una *texture* può derivare dal trattamento "casuale" di una superficie, mentre un *pattern* esplicita le relazioni poste alla base di un contenuto.

Le reti di curve "estratte" da una superficie rappresentano un pattern: infatti, le eventuali anomalie che rompono la regolarità di questa rete si trasformano in successive limitazioni in fase di discretizzazione.

Sensibilizzare una superficie significa favorire i fenomeni visivi di "rarefazione" e di "addensamento" che favoriscono la trasmissione di un messaggio. Significa tracciare un segno, delimitare un confine, imporre un'intenzione o lasciare un'impronta.

La sensibilizzazione di una superficie può nascere indipendentemente dalla comunicazione di una serie di informazioni di carattere scientifico o oggettivo. Esistono, infatti, approcci di sensibilizzazione soggettivi che alterano l'efficacia della comunicazione del messaggio.

«Un foglio di carta bianco presenta una superficie poco interessante se è liscia, più interessante se è rugosa, più interessante ancora se queste rugosità hanno un andamento strutturale riconoscibile [...]. Ogni cosa che l'occhio vede ha una sua struttura di superficie e ogni tipo di segno, di grana, di ziggrinatura, ha un suo significato ben chiaro<sup>2</sup>».

Queste riflessioni suggeriscono l'approfondimento dei processi e degli approcci che favoriscono la capacità comunicativa delle superfici.

Diversi artisti del secondo dopoguerra, seguaci di Lucio Fontana, hanno lavorato sulla sensibilizzazione di superfici monocromatiche utilizzando differenti materiali e generando suggestioni e libere interpretazioni. La loro arte sperimentale sulla percezione visiva viene sviluppata collettivamente attraverso la ricerca di nuovi mezzi espressivi che si basano sullo sviluppo di esperimenti non figurativi.

L'arte informale, attraverso i suoi tre filoni, "metrico", 2 Munari 1974, pp. 16-17.

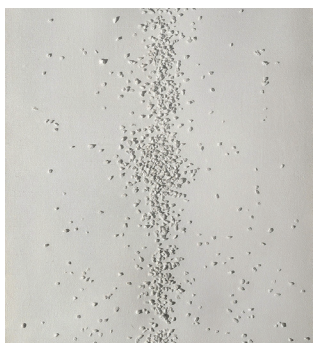
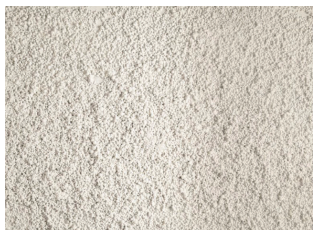


Fig. 1/ *Achrome*, P. Manzoni (1959)  
Caolino su tela grinzata.

Fig. 2/ *Achrome*, P. Manzoni (1962-63).  
Polisterolo espanso e caolino.

Fig. 3/ *Achrome*, P. Manzoni (1962)  
Ciottoli e caolino su tela.

“gestuale” e “segnico”, avvia un lavoro di triplice ricerca sul potere comunicativo della superficie intesa non più come oggetto su cui imprimere delle immagini ma come supporto utile per esprimere significati<sup>3</sup>. La ricerca di un linguaggio capace di comunicare fedelmente l'intimità di un messaggio comporta, talvolta, la perdita di oggettività e riconoscibilità, approdando all'astrazione.

È quindi necessario interpretare e, quando necessario, codificare i messaggi o le informazioni nascosti all'interno di qualsiasi esperimento visuale al fine di rivelarne, se esistente, il contenuto.

*Achrome* (1957-1963)<sup>4</sup>, dell'artista milanese Piero Manzoni, è una serie di superfici bianche di gesso o caolino, che «non manifestano alcun significato, né esibiscono una manipolazione della materia<sup>5</sup>».

La tela, imbevuta di caolino liquido e colla, viene lasciata asciugare affidando la trasformazione del materiale in opera ad un processo autosufficiente e spontaneo attraverso cui la superficie è attraversata da righe verticali o orizzontali, o da griglie<sup>6</sup>.

Se Piero Manzoni scelse come materiali il caolino e il cotone per le sue creazioni, artisti come Enrico Castellani e Agostino Bonalumi approfondirono le possibilità fornite dall'utilizzo di chiodi, centine e sagome di legno e metallo inserite dietro la tela per creare delle estroflessioni ritmiche, sensibilizzando le superfici attraverso un gioco di rilievi<sup>7</sup>.

Tra le opere degli artisti impegnati in questa ricerca e accomunati dalla stessa poetica è interessante citare gli esperimenti ottici e meccanici di Otto Piene, i lavori di metallo lucidato di Heinz Mack, gli strappi su carta di Oskar Holwek, le ricerche geometrico-percettive di Dadamaino, i fotogrammi di Kilian Breier, le sfumature, le gradazioni e le tinte uniche dei *Monochrome* di Yves Klein, i *pattern* di Almir Mavigner, o le astrazioni geometriche di François Morellet.

3 Demartini et al. 2011, p. 1371.

4 Museo del Novecento (Milano), sezione Piero Manzoni e Azimuth.

5 Pieromanzoni.org, p.2.

6 *Ibidem*.

7 [it.wikipedia.org/wiki/Enrico\\_Castellani](http://it.wikipedia.org/wiki/Enrico_Castellani)



A tali esperimenti artistici è possibile ricondurre i trattamenti di "sensibilizzazione" di superfici su cui le casseformi fabbricate per le finiture a faccia vista del calcestruzzo imprimevano e rilasciano tracce e *textures* in rilievo, oppure la fabbricazione digitale di prototipi derivanti dalla frestura di pannelli lisci o dall'utilizzo di stampi "texturizzati" per la realizzazione di superfici in gesso.

Il ciclo delle plastiche di Burri, caratterizzato dall'uso di un materiale del tutto inusuale e da una scelta cromatica importante, risale ai primi anni '60. L'artista approdava ad immagini ottenute distruggendo ed aggredendo la superficie con la fiamma ossidrica. Egli applicò tale tecnica, definita dallo stesso "combustione", anche sul legno. Le deformazioni della plastica rappresentano il risultato dell'azione del calore sulla superficie. Nelle sue opere la liquefazione del materiale assume forme consequenziali che, pur nascendo da un fenomeno oggettivo, si prestano a differenti interpretazioni<sup>8</sup>. I tagli e le ferite ricordano le esperienze di Fontana, ma ne rappresentano la versione indotta da un fenomeno esterno e non derivante da un atto istintivo.

Alcuni esperimenti di carattere scientifico favoriscono la comprensione dei principi che differenziano il concetto di *texture* da quello di *pattern*.

La cimatica<sup>9</sup>, ad esempio, designa una teoria avanzata dal medico svizzero Hans Jenny che tentò di dimostrare l'effetto morfogenetico delle onde sonore attraverso lo studio del suono visibile e delle vibrazioni: negli esperimenti cimatici la superficie di una piastra viene fatta vibrare e le regioni di massimo e minimo spostamento sono rese visibili attraverso un sottile strato di particelle, pasta o liquido posti sulla piastra. Il termine deriva dal greco *kymatika* (κυματικά) che significa "studio riguardante le onde", da *kyma* (κύμα), che significa "onda, flutto"<sup>10</sup>. Esperimenti di questo tipo erano già stati

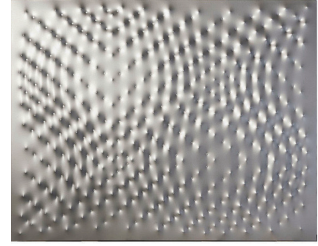


Fig. 4/ *Superficie argenta*, Castellani, 2008.

Fig. 5/ *Tirets 0 30 60 90*, F. Morellet, 1970.

<sup>8</sup> Demartini 2011, p. 1372.

<sup>9</sup> La parola cimatica deriva dal greco *Kuma*, il cui significato letterale è flutto, o onda, per descrivere gli effetti periodici che il suono e le vibrazioni hanno sulla materia, da: [testi-italiani.it/cymatics](http://testi-italiani.it/cymatics).

<sup>10</sup> [it.wikipedia.org/wiki/Cimatica](http://it.wikipedia.org/wiki/Cimatica)

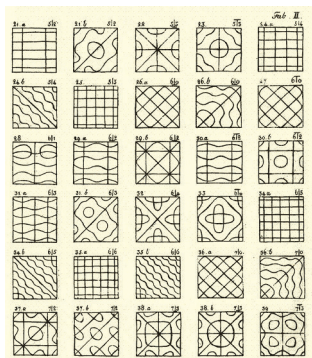


Fig. 6/ Piastra di Chladni quadrata. La figura rivela il *pattern* dovuto alla vibrazione di una superficie rigida (Fonte: *Wikimedia commons*).

Fig. 7/ Tabella rappresentante alcune figure di Chladni su piastre quadrate. (Fonte: Wikipedia).

eseguiti in precedenza da Galileo Galilei, intorno al 1630, e da Robert Hooke, nel 1680, e furono successivamente perfezionati da Chladni. Nel XVIII secolo, il musicista e fisico tedesco Ernst Chladni aveva osservato che le vibrazioni di una membrana o di una lastra possono essere visualizzati cospargendo della polvere sottile su una superficie vibrante (fig. 6): per effetto della vibrazione la polvere si accumula progressivamente nei punti della superficie in cui la vibrazione è nulla. A vibrazioni diverse corrispondono altrettanti *pattern* differenti (fig. 7): se, ad esempio, la vibrazione è stazionaria i punti formano un reticolo di linee, dette linee nodali. Il reticolo di linee nodali è influenzato dalla forma geometrica della superficie e dal modo in cui la superficie è vincolata<sup>11</sup>. Sollecitando in modi diversi la vibrazione della superficie si osservano, di volta in volta, solo alcuni degli infiniti reticoli nodali propri del corpo vibrante. Questi reticoli consentono di visualizzare la matrice geometrica che sottende alla forma (figg. 8-10).

Traendo ispirazione dalle esperienze di Chladni, nel 1967 Hans Jenny pubblicò il primo di due volumi intitolati *Kymatic*<sup>12</sup>, nel quale lo studioso sostenne l'esistenza di un potere attraverso cui il suono è in grado di strutturare la materia.

Come i suoi predecessori, nei suoi esperimenti egli poneva su un piatto metallico, collegato ad un oscillatore che produceva un ampio spettro di frequenze, sabbia, polvere e fluidi. La materia si riorganizzava generando diverse strutture la cui geometria era legata alla frequenza della vibrazione emessa dall'oscillatore. Secondo Jenny queste strutture, che ricordano i *mandala* ed altre forme ricorrenti in natura, sono in grado di manifestare visibilmente la forza invisibile del campo vibrazionale ed ogni forma contiene le informazioni sulle vibrazioni che l'hanno generata. I reticoli nodali derivanti dagli studi di cimatica hanno ispirato la realizzazione di opere nel

11 Munari 1974, p. 78.

12 Jenny 1967.

campo delle arti visive e della musica contemporanea. È interessante sottolineare le sorprendenti analogie tra gli esperimenti di sensibilizzazione sopra citati ed i *pattern* delle linee di curvatura che è possibile estrarre da una superficie. Tali *pattern* comunicano le informazioni relative alla natura geometrica delle superfici attraverso delle reti di curve la cui distribuzione è legata alle tecniche di modellazione digitale impiegate per la genesi della forma.

Per gestire queste informazioni è necessario utilizzare un codice che consenta la trasmissione del dato in maniera inequivocabile: pertanto, la conoscenza ed il controllo dei mezzi e dei sistemi grafici creati appositamente per tale scopo è fondamentale.

Un sistema visuale può diventare un mezzo utile, o alternativo, per la gestione di problemi di diversa natura: è importante sfruttare i diversi strumenti attraverso cui la tecnica ci consente di indagare e di visualizzare una stessa informazione estraendo più significati da un sistema iniziale. In ambito scientifico l'uso alternativo di strumenti di analisi basati sulla comunicazione visiva di dati può quindi rappresentare un approccio efficace per favorire processi innovativi<sup>13</sup>. Un *pattern* non rappresenta solo un semplice mezzo di comunicazione visuale ma può essere considerato anche uno strumento utile per la gestione di un problema concreto. Se è vero che, spesso, all'interno di una domanda è già contenuta la risposta, è nelle intime relazioni che strutturano la complessità stessa della forma che bisogna cercare la possibile soluzione per la sua ottimizzazione, necessaria per la gestione delle fasi di fabbricazione e costruzione. I *digital tools* ad oggi disponibili forniscono strumenti diagnostici che consentono il rilevamento e la comunicazione visuale di dati derivanti da indagini specifiche eseguite su un dato oggetto o fenomeno. Tali dati traducono le informazioni relative alla natura dell'oggetto, alle sue

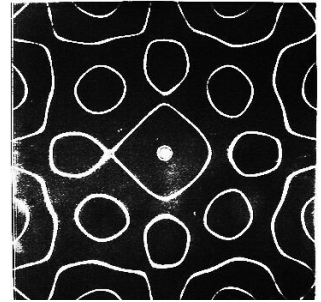


Fig. 8/ Square Chladni plate 1225.0 Hz. (Fonte: <https://www.flickr.com/>).

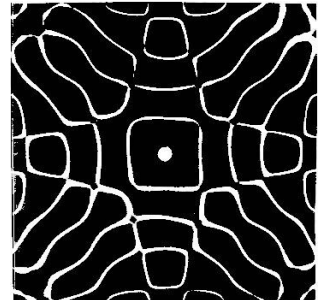


Fig. 9/ Square Chladni plate 1450.2 Hz. (Fonte: <https://www.flickr.com/>).

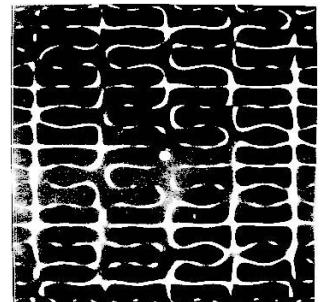


Fig. 10/ Square Chladni plate 3139.7 Hz. (Fonte: <https://www.flickr.com/>).

13 Cfr. cap. IV.

eventuali trasformazioni o ad una serie di fenomeni agenti su di esso e sono solitamente espressi attraverso dei valori numerici. Un gradiente cromatico visualizza la distribuzione di tali dati associando a ciascuna delle diverse aree colorate un significato differente, legato ad uno specifico dato numerico. Tra le varie tecniche diagnostiche esistenti, a titolo esemplificativo, è possibile citare la termografia, che si basa sull'acquisizione di immagini nell'infrarosso, il rilevamento degli stati tensionali, i rilevamenti della conducibilità elettrica, i diagrammi per la misurazione del pH, i diagrammi per la misurazione dell'azione e della distribuzione dei venti, etc. Nell'ambito dello studio delle superfici complesse, all'interno dei sistemi CAD sono stati sviluppati una serie di strumenti per l'analisi della qualità di tali superfici<sup>14</sup>.

Tra gli strumenti rivolti alla diagnostica delle superfici è possibile citare *Analisi curvatura*, *Analisi Zebra* e *Mappa Ambiente*, utili per visualizzare la risposta della superficie in termini di comunicazione di contenuti legati esclusivamente alla sua natura o derivanti dall'interazione della stessa con l'ambiente circostante. Coerentemente con lo studio affrontato all'interno di questa trattazione risulta interessante indagare le potenzialità dello strumento diagnostico *Analisi curvatura*, il quale consente di visualizzare la curvatura gaussiana di una superficie: lo scopo è quello di gestire la forma durante la fase progettuale alla ricerca di soluzioni ottimali per la successiva fase di discretizzazione della superficie.

Georg Friedrich Bernhard Riemann ha introdotto i concetti di curvatura dello spazio e gli spazi di curvatura positiva e negativa: secondo questa teoria, una superficie piana occupa una posizione di mezzo tra le varie possibili<sup>15</sup>. Riemann abbandona la tradizionale concezione euclidea dello spazio (strettamente geometrica) e la integra con una visione più analitica basata sul calcolo<sup>16</sup>.

14 Ciarloni 2019, p. 34.

15 Kolarevic 2003.

16 *Ibidem*.

La sua teoria è di fondamentale importanza per il concetto di generalizzazione del piano e dello spazio cartesiano. Riemann utilizza come modello una superficie curva, da cui nasce l'esigenza di introdurre un valore di curvatura dello spazio. Secondo tale valore si possono distinguere tre tipi di curvature costanti<sup>17</sup> (fig. 11):

- curvatura negativa (geometria iperbolica);
- curvatura nulla (geometria euclidea);
- curvatura positiva (geometria ellittica).

Il caso di cui si occupa principalmente Riemann è quello della geometria ellittica, ed è fondato essenzialmente sull'ipotesi che la retta sia chiusa e finita, il piano sia costituito da una superficie chiusa, e per comodità, si potrebbe pensare ad una superficie sferica: i punti sono solo i punti distribuiti su di essa e le rette per due punti sono i cerchi massimi passanti per essi. È evidente che, secondo questo modello, non esistono rette parallele<sup>18</sup>.

Da tale teoria deriva che la geometria euclidea rappresenta quindi solo un particolare tipo di geometria: nella concezione spaziale di Riemann, le geometrie primitive e le forme complesse rappresentano dunque diversi *steps* individuabili sulla scala della complessità formale secondo cui le prime possono essere trasformate nelle seconde e viceversa.

L'attributo "gaussiana", accostato al sostantivo curvatura, deriva dal nome del matematico tedesco Carl Friedrich Gauss, i cui studi hanno contribuito in maniera sostanziale allo sviluppo di importanti teorie nel campo dell'analisi matematica, della geometria differenziale, della geodesia, del Magnetismo e dell'Ottica<sup>19</sup>. E proprio dalle ricerche condotte nell'ambito della Geodesia nasce il suo interesse per la geometria differenziale, grazie alla quale Gauss sviluppa il cosiddetto *Theorema egregium* (1827), pubblicato nelle *Disquisitiones generales circa superficies curvas*, enunciato nel seguente modo:

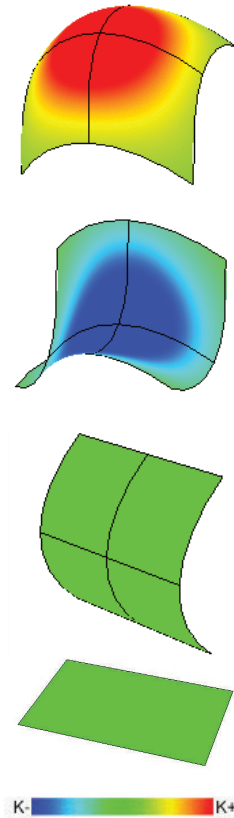


Fig.11/ Esempio di superficie convessa a curvatura gaussiana positiva, concava a curvatura negativa e piana a curvatura nulla. (Strumento *Analisi curvatura - Rhino, McNeel*).

<sup>17</sup> *Ibidem*.

<sup>18</sup> *Ibidem*.

<sup>19</sup> Dunnington 2003, pp.497-499.

«*Si superficies curva in quamcumque aliam superficiem explicatur, mensura curvaturae in singulis punctis invariata manet*»<sup>20</sup>. La denominazione *Theorema egregium* (o Teorema egregio) deriva dall'importanza del risultato: la curvatura gaussiana è "intrinseca" alla superficie ed è indipendente dallo spazio-ambiente in cui è immersa, nonostante sia definita come prodotto delle curvature principali (il cui valore dipende, invece, da come la superficie è immersa nello spazio che la contiene). Questo risultato, unitamente al fatto che le superfici con differente curvatura gaussiana non possono essere fra loro isometriche, o sovrapponibili, è estremamente utile per la ricerca di metodi che favoriscono la discretizzazione di una superficie complessa mediante la computazione di modelli semidiscreti o di porzioni di superficie a singola o doppia curvatura rigati da sovrapporre o sostituire alla superficie a doppia curvatura generica (non rigata) di riferimento.

Ad esempio, una sfera (che ha curvatura gaussiana costante e positiva in ogni punto) non può essere isometrica al piano (che ha curvatura gaussiana nulla): è questo il motivo per cui, ad esempio, i planisferi presentano sempre delle distorsioni. Queste osservazioni, oltre a dimostrare la tendenza progettuale di questa grandezza matematico-geometrica, rappresentano una delle principali fonti di ispirazione per gli esperimenti condotti e mostrati all'interno dei capitoli successivi di questa trattazione. L'analisi delle curvature gaussiana e mediana è importante per visualizzare in maniera diretta l'esistenza di anomalie: i cambiamenti bruschi della curvatura, quali rilievi, dentellature, o increspature devono essere rilevati e corretti per ottimizzare le successive operazioni da compiere sulla superficie.

Questo strumento info-grafico associa il colore rosso a valori positivi, il colore verde ad un valore nullo ed il colore blu a valori negativi di curvatura.

20 Gauss 1923.



I punti sulla superficie in corrispondenza dei quali il valore numerico di curvatura è al di sotto del valore limite positivo dell'intervallo saranno rossi, mentre i punti con un valore numerico di curvatura è al di sotto del valore limite negativo dell'intervallo saranno blu: questo significa che il *software* utilizza, come valori estremi della scala cromatica, dei valori numerici arbitrari e modificabili: è possibile inserire manualmente un range all'interno del quale valutare la variazione di curvatura della superficie (fig. 12). Una superficie a curvatura gaussiana positiva corrisponde ad una superficie convessa, o sinclastica (cioè curvata dalla stessa parte in tutte le direzioni: un esempio sono la sfera, o l'ellissoide); al contrario, se tali valori sono negativi la superficie è concava, o anticlastica<sup>21</sup>. Un valore di curvatura gaussiana pari a zero significa che la superficie è piana in almeno una delle due direzioni principali (sono esempio di tale condizione il cilindro, il cono e le superfici sviluppabili in genere). Il comando *Analisi Curvatura* genera una mesh invisibile dalle superfici oggetto di analisi: tale mesh è necessaria per la distribuzione dei differenti colori. Per analizzare in modo appropriato una superficie NURBS è necessario che tale mesh sia opportunamente dettagliata: lo strumento consente di scegliere il grado di tassellatura più appropriato. Anche lo strumento *Analisi Zebra* (fig. 13) è particolarmente utile per il controllo e la verifica delle superfici architettoniche. Tale strumento si basa sul concetto di isòfote che, come il termine stesso indica, sono "curve a uguale illuminazione". Queste curve sono definite come "il luogo dei punti in cui una luce direzionale forma lo stesso angolo con la normale locale alla superficie"<sup>22</sup>. Le curve isòfote possono essere visualizzate attraverso l'alternarsi di una serie di strisce bianche e nere: da ciò deriva il nome "curve zebra"<sup>23</sup>. Un'altra tipologia di curve utili per l'analisi di una superficie è quella delle curve di riflessione: esse sono

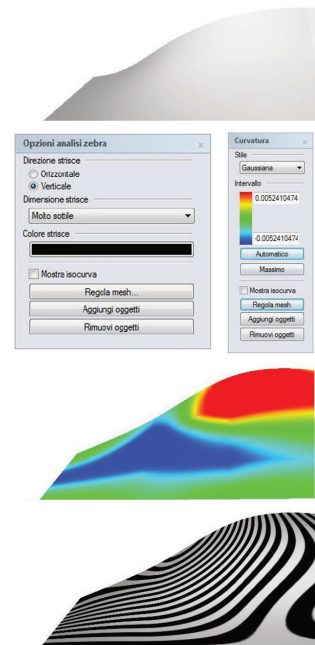


Fig.12/ Strumento *Analisi curvatura* (Rhinoceros, McNeel). (Figura dell'autore)

Fig.13/ Strumento *Analisi zebra* (Rhinoceros) di una superficie NURBS e della *triangular mesh* corrispondente. (Figura dell'autore).

21 Gottfried 2003, p. 210.

22 Cfr. Ciarloni 2009, pp. 35.

23 *Ibidem*, pp. 36.

generate in funzione della capacità riflettente della superficie stessa che si ipotizza renderizzata con un materiale perfettamente lucido e capace di riflettere l'ambiente circostante. A differenza delle curve isòfote, le curve di riflessione cambiano rispetto alla posizione del punto di vista<sup>24</sup>.

Le tipologie di curva sopra descritte sono utili per visualizzare e, dunque, verificare la continuità delle superfici. Il problema della discretizzazione di superfici *free form* è, talvolta, strettamente legato alla qualità riflettente delle superfici: una superficie tassellata non permette di ottenere curve di riflessione continue, e questo spesso non incontra la volontà estetica ed espressiva dell'architetto o del *designer*.

### **Cenni di geometria differenziale: la curvatura delle superfici**

La natura di una forma complessa è strettamente legata alle caratteristiche geometriche dell'insieme di punti o di curve che ne determinano la struttura della/delle superfici che la compongono.

Le superfici *free form* sfuggono alle rigide regole su cui si basa la genesi delle superfici analitiche o specializzate<sup>25</sup> e non possono quindi essere semplicemente definite come luogo geometrico.

Con il termine "analitiche" si intendono tutte le superfici per le quali le regole poste alla base della genesi geometrica sono "note", tra cui il piano, le superfici cilindriche, coniche, le quadriche, etc., mentre con il termine *free form*, o complesse, si intendono tutte le altre<sup>26</sup>.

È necessario indagare i metodi di discretizzazione capaci di assecondare la natura delle forme libere al fine di gestirne in maniera consapevole la progettazione e la realizzazione. L'obiettivo di questo capitolo è richiamare e dimostrare i contenuti geometrico-matematici necessari per la comprensione delle applicazioni trattate e spe-

24 Cfr. *Idem*.

25 Cfr. Ciaroni 2009, p. 22.

26 Cfr. *Ibidem*, pp. 42-43.



rimentate nei capitoli successivi. Nell'ambito di una ricerca che intende contribuire al processo di rinnovamento della geometria descrittiva è pertanto utile richiamare «i metodi applicati alla costruzione e allo studio di forme che ricorrono nel progetto dell'architettura e del prodotto industriale<sup>27</sup>».

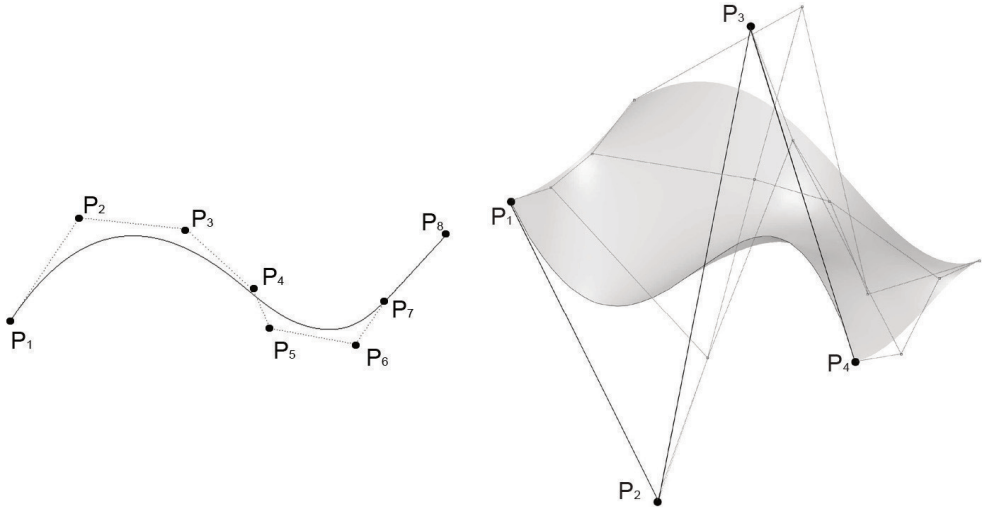
Ciò consente di potenziare il rapporto tra le “speculazioni geometriche” ed il progetto della forma. Queste riflessioni hanno consentito notevoli avanzamenti nelle applicazioni della geometria descrittiva e della geometria differenziale, generando avanzamenti nel campo di ricerca dell'*Architectural Geometry*. Per comprendere a pieno l'identità di una superficie è necessario indagare la natura geometrica delle curve: esse rappresentano, infatti, gli elementi che definiscono le molteplici strutture di base esistenti per una superficie.

Pertanto, tutte le operazioni e le speculazioni che è possibile applicare ad una superficie sono influenzate dalle proprietà geometrico-matematiche dei suoi punti e delle sue curve.

È noto che una curva può essere rappresentata in forma grafica o in forma analitica attraverso tre differenti modalità: forma implicita, esplicita o parametrica. I sistemi CAD si avvalgono della rappresentazione parametrica perché capace di descrivere le variazioni di un qualsiasi ente in funzione dei valori assunti volta per volta dai parametri in gioco.

Le geometrie NURBS, risalenti agli anni '50, grazie alla flessibile struttura geometrica che le contraddistingue, rappresentano oggi gli strumenti ampiamente utilizzati per la gestione delle forme complesse continue<sup>28</sup>. Le curve e le superfici, attraverso questo tipo di rappresentazione, vengono quindi definite come “interpolazione” rispettivamente di punti e/o di curve: traslando, ruotando o modificando tali enti discreti è possibile modificare le curve o le superfici di partenza (fig. 14). Una superficie  $S$  è

27 Migliari 2007, p. XI.  
28 He 2014, p.4.



costituita da un insieme di punti tale che:

$$S = S(u, v)$$

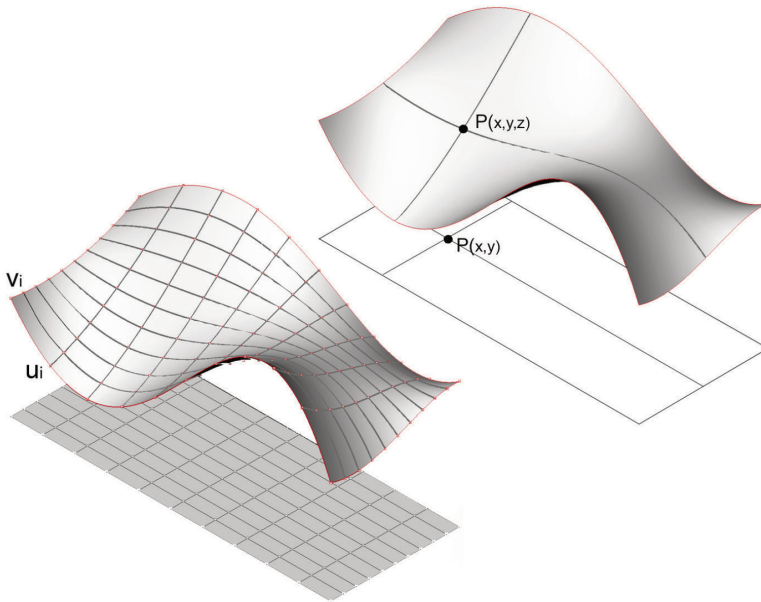
in cui  $u$  e  $v$  sono due parametri. Variando questi due parametri all'interno di un intervallo di definizione è possibile individuare tutti i punti di una superficie. In una superficie parametrica di tipo NURBS, definita quindi da una rete di curve NURBS, i due parametri,  $u$  e  $v$ , generano un dominio rettangolare piano (2D), rappresentato dall'individuazione di due direzioni: a ciascuna coppia di coordinate  $u$  e  $v$  corrisponde un punto nello spazio, avente una specifica quota ed appartenente ad una superficie curva. L'espressione parametrica completa di una superficie è:

$$s(u, v) = [x(u, v), y(u, v), z(u, v)]$$

Fig. 14/ Curve e superfici, attraverso la rappresentazione parametrica, sono definite come interpolazione di punti e curve. (Figura dell'autore).

I parametri  $u$  e  $v$ , definiti all'interno di due intervalli distinti, mappano una regione bidimensionale.

Ciascuna curva, definita in funzione di uno dei due para-



metri, è quindi nota con il nome di curva iso-parametrica. La curva definita in funzione del parametro  $u$  si muove nello spazio seguendo la traiettoria definita dalla variazione del parametro  $v$ . (fig. 15)

L'analisi e la gestione della natura e della qualità delle superfici richiamano i principi della geometria differenziale, tra cui le definizioni di curvatura di una curva e di curvatura gaussiana di una superficie, la quale rappresenta il dato più importante per la ricerca di soluzioni progettuali ottimizzate.

La geometria differenziale «studia gli oggetti geometrici utilizzando gli strumenti del calcolo differenziale e integrale, ed è possibile affermare che i suoi concetti distintivi sono quelli che abbracciano la natura geometrica della derivata seconda che descrive i molteplici aspetti della curvatura»<sup>29</sup>. Inoltre, «la classificazione differenziale considera le superfici come classi bidimensionali dei punti nello spazio che soddisfano determinate condizioni locali. In questo caso le superfici si possono classificare in funzione della curvatura gaussiana, che può assumere valori negativi, nul-

Fig. 15/ I parametri  $u$  e  $v$  mappano una regione bidimensionale. Le curve definite ciascuna in funzione di uno dei due parametri è detta curva iso-parametrica. (Figura dell'autore).

li o positivi, senza escludere la compresenza, sulla medesima superficie, di punti con valori di curvatura diversi»<sup>30</sup>. Talvolta accade di avere a che fare con curve di cui si ignora la natura: tali curve sono denominate dalla geometria classica come curve grafiche o linee grafiche, cioè traiettorie tracciate arbitrariamente<sup>31</sup>. È il caso delle curve coinvolte nella genesi di superfici di tipo *free form*. È noto che, data una curva, di ogni suo punto è possibile definire la tangente, la curvatura e la torsione<sup>32</sup>.

Tangenza, curvatura e torsione descrivono la continuità di una curva: tali condizioni vengono estese alla definizione di continuità geometrica G per una superficie. Una linea è tanto più curva quanto più rapidamente si allontana dalla direzione rettilinea, cioè dalla retta tangente<sup>33</sup>. La curvatura  $k$  di una curva in un punto P è l'inverso del raggio R della circonferenza passante per tre punti, infinitamente vicini, della curva stessa:

$$k = 1/R$$

Il punto P occupa la posizione intermedia tra i tre punti individuati: tale circonferenza prende il nome di cerchio osculatore, ed il suo raggio varia lungo la curva<sup>34</sup>. È chiaro che per i punti di una retta il cerchio osculatore sarà infinito: i tre punti per cui passa tale cerchio sono allineati, quindi  $k$  è uguale a zero (figg. 16-18).

Date due curve consecutive, consideriamo un punto comune ad entrambe (fig. 19):

- se le due tangenti alle curve nel punto considerato sono allineate o sovrapposte, abbiamo una continuità di ordine 1 o continuità in tangenza – G1;
- se i cerchi osculatori nel punto considerato coincidono, abbiamo una continuità di ordine 2 o continuità in curvatura – G2<sup>35</sup>.

Esprimendo lo stesso principio dal punto di vista matematico e traducendo, quindi, il concetto di tangenza con la derivata prima di una curva, è possibile parla-

30 Migliari 2009, p. 144.

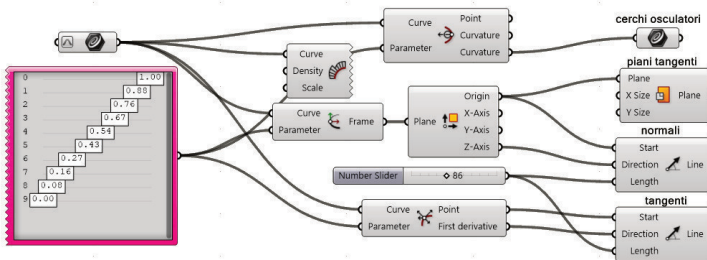
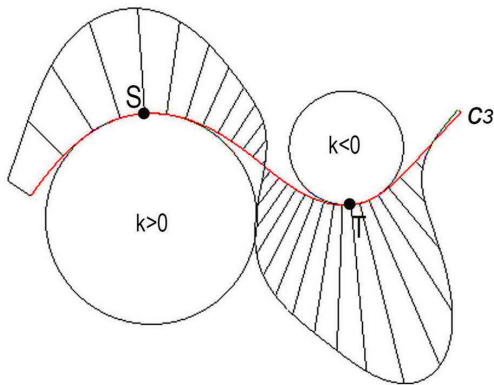
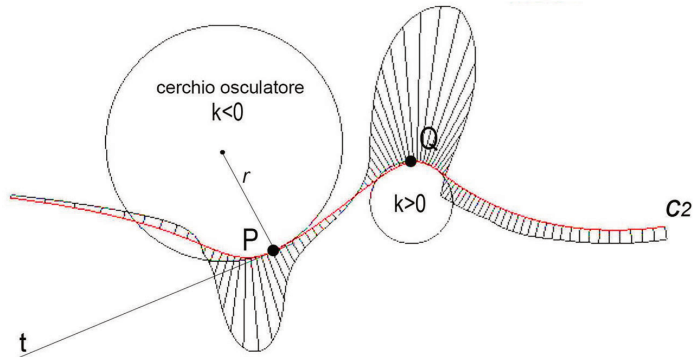
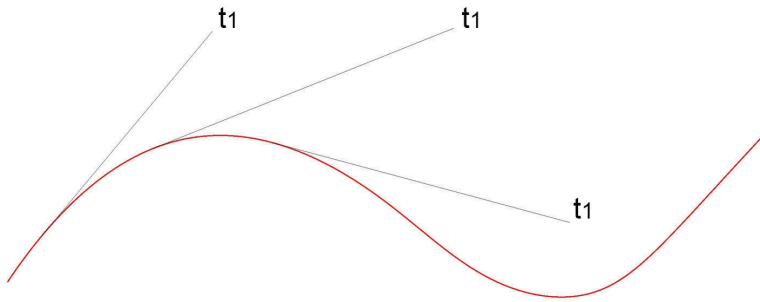
31 De Carlo 2009, p. 100.

32 Ciarloni 2009, p. 29.

33 De Carlo 2009, p. 102.

34 *Ibidem*, p.103.

35 Ciarloni 2009, p.32.



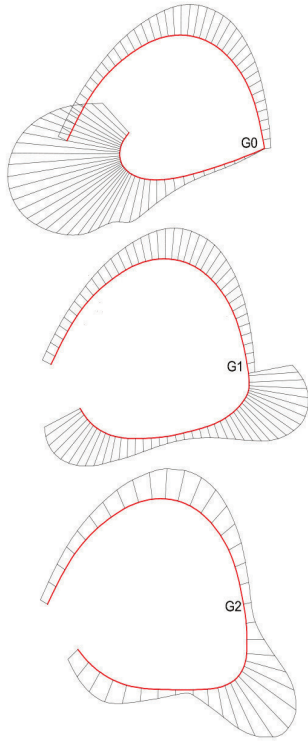


Fig. 16/ A pagina precedente: successive tangenti di una curva generica. (Figura dell'autore).

Figg. 17, 18/ A pagina precedente: Grafici di curvatura e cerchi osculatori di una curva generica. (Figura dell'autore).

Fig. 19/ I grafici della curvatura mostrano il grado di continuità tra le curve considerate. (Rielaborazione dell'autore).

36 *Ibidem*.

37 *Ibidem*, p. 31.

38 *Ibidem*, p. 43.

39 *Ibidem*, p.33.

40 *Ibidem*.

re di continuità parametrica: se questa condizione è soddisfatta, allora sarà soddisfatta anche la corrispondente continuità di tipo geometrico<sup>36</sup>.

Il grafico di curvatura (fig.19) è uno strumento utile per valutare la qualità delle curve, visualizzando gli eventuali punti di flesso, quindi i cambi di concavità, e la continuità tra curve adiacenti, verificando la presenza di eventuali salti<sup>37</sup>.

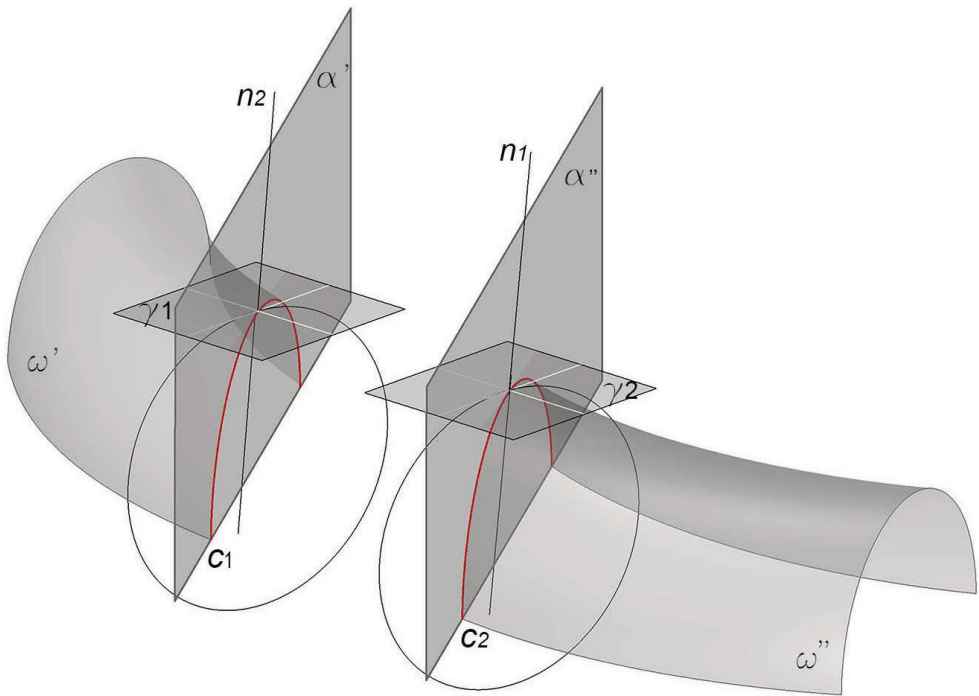
Ai fini di una corretta genesi formale è importante sottolineare che tentare di descrivere una forma, caratterizzata dalla distribuzione di aree di natura morfologicamente diversa, con un'unica superficie NURBS, talvolta non genera risultati soddisfacenti. In alcuni casi, è preferibile optare per l'unione di più superfici, le quali potranno essere di tipo procedurale, capaci di approssimare la complessità originaria, oppure diverse *patch free form*<sup>38</sup>.

Considerando gli stessi principi di continuità validi per una curva, si ha che, date due superfici consecutive, per ogni curva di bordo in comune si ottiene:

- una continuità di tipo C1 se la giacitura dei piani tangenti alle due superfici coincide;

- una continuità di tipo C2, se si verifica la coincidenza tra i due cerchi osculatori contenuti sul piano perpendicolare ai due piani tangenti, individuati e coincidenti in quel punto, e appartenenti alle due superfici adiacenti<sup>39</sup> (fig.20).

Per il teorema di Dupin: se due superfici sono continue in curvatura rispetto solo a tre piani, allora sono continue anche rispetto a tutti gli altri piani<sup>40</sup>. Ciò è dovuto al fatto che lo spazio ha tre dimensioni, quindi la superficie non può curvarsi in più di tre direzioni. Lo scopo principale di questo studio è quello di rivelare la natura delle superfici complesse attraverso i possibili *pattern* di graficizzazione della curvatura gaussiana. Data una superficie generica a doppia curvatura  $\omega$ , si consideri che per ogni punto ad essa appartenente passa un insieme infinito di curve: ciascuna di esse avrà



una tangente ed un proprio cerchio osculatore in quel punto, differenti da quello delle altre curve.

Dato un punto  $P$  appartenente a  $\omega$  è possibile individuare un piano  $\alpha$ , tangente a  $\omega$  in  $P$  e la normale  $n^{A1}$  (fig. 21). L'intersezione tra il fascio di piani passanti per  $n$  ed il piano tangente  $\alpha$  è rappresentata dal fascio di rette tangenti alla superficie e ad esso appartenenti. Tra tutti i piani perpendicolari ad  $\alpha$  ne esistono solo due,  $\gamma$  e  $\beta$  a loro volta mutuamente perpendicolari, che tagliano la superficie individuando due curve,  $c_1$  e  $c_2$ , o sezioni normali, i cui raggi di curvatura in quel punto, cioè i raggi dei relativi cerchi osculatori, assumono valore massimo e valore minimo. Tali curvature ( $k = 1/R$ , con  $R$  che assume il valore più grande e più piccolo possibili per la superficie in quel punto) sono definite rispettivamente curvatura mini-

Fig. 20/ Continuità tra superfici: le normali, i cerchi osculatori e i piani tangenti coincidono. (Figura dell'autore).

41 Migliari 2009, p. 148.

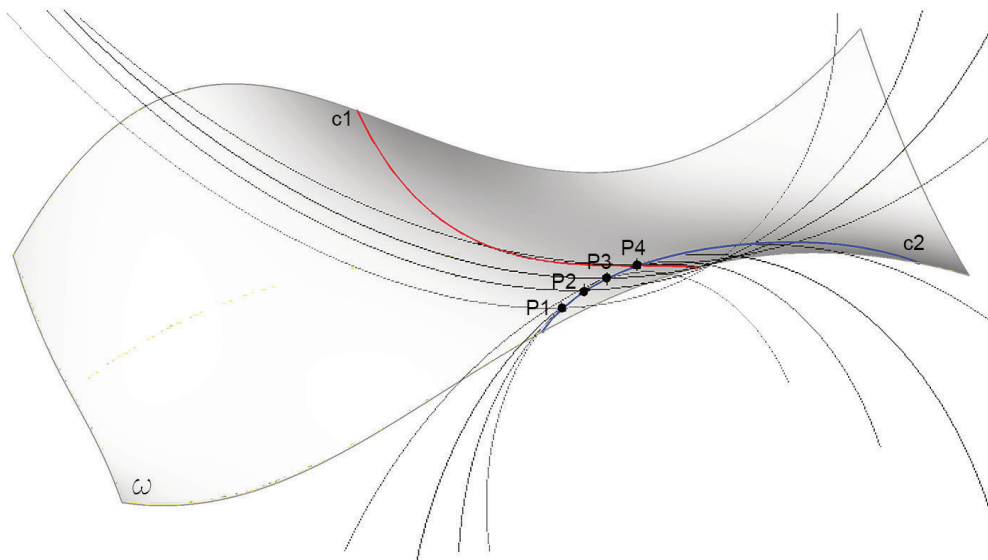


Fig. 21/ Per rappresentare una linea di curvatura principale è necessario individuare una delle due tangenti principali in un dato punto  $P_n$  della superficie e tracciare la curva seguendo la nuova direzione principale volta per volta individuata dalle tangenti successive. (Figura dell'autore).

Fig. 22/ A pagina successiva: individuazione del piano tangente ad una superficie in un punto P ad essa appartenente e rappresentazione dei cerchi osculatori che definiscono la curvatura di una superficie in un punto P. (Figura dell'autore).

ma e massima, o curvatures principali della superficie: le due curve vengono, quindi, definite linee di curvatura principale, ed in particolare linee di curvatura massima (in rosso) e linee di curvatura minima (in blu). Il prodotto delle due curvatures principali definisce la curvatura gaussiana  $K$  della superficie in quel punto<sup>42</sup>:

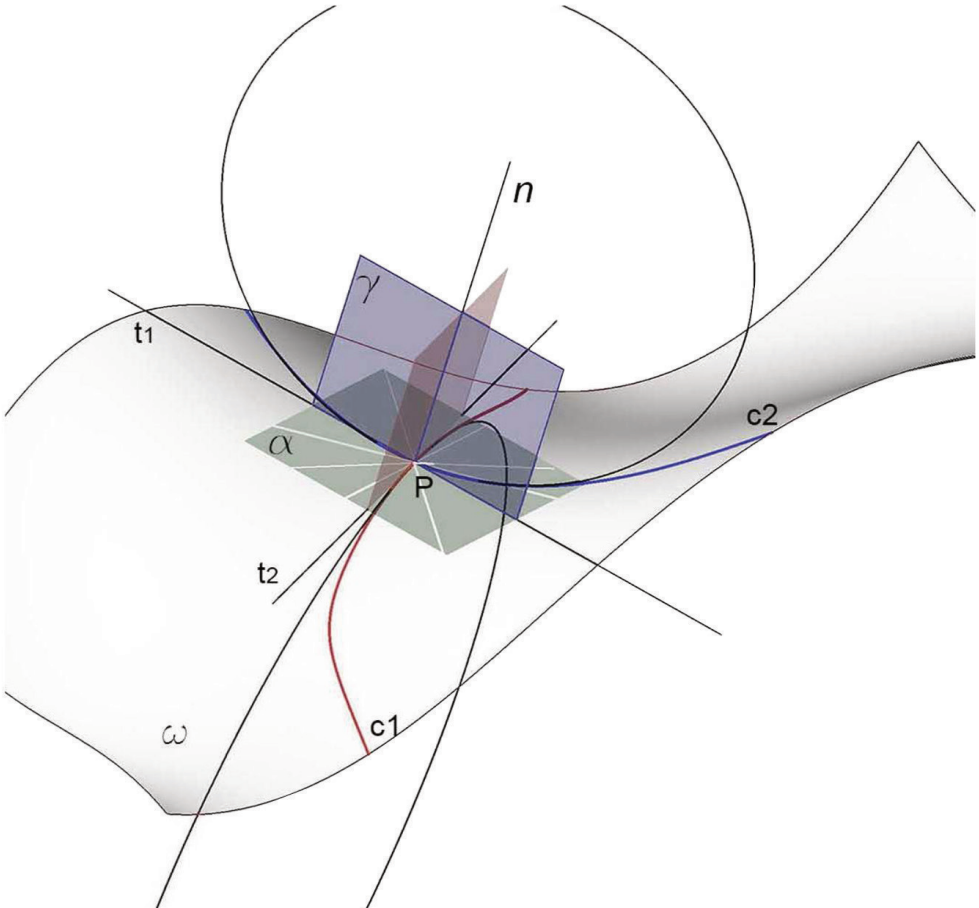
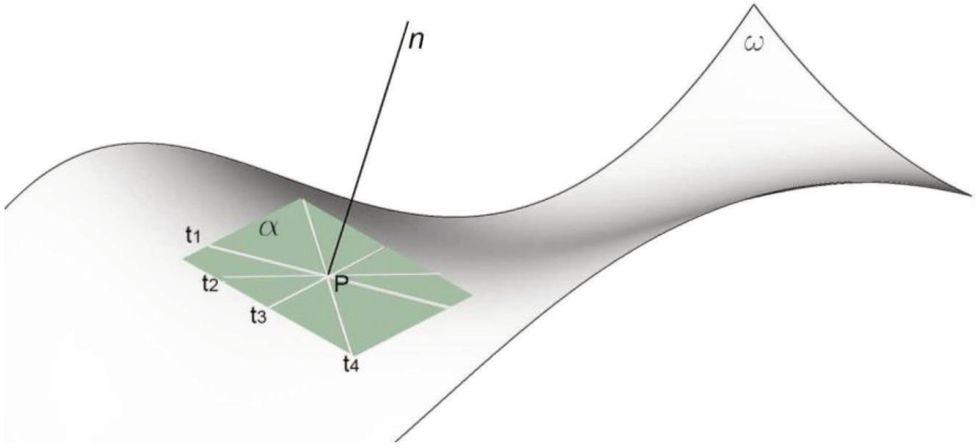
$$K = k_1 * k_2 = 1/r_{\min} * 1/r_{\max}$$

Per rappresentare una linea di curvatura principale è necessario individuare una delle due tangenti principali in un dato punto  $P_n$  della superficie e tracciare la curva seguendo la nuova direzione principale, volta per volta, individuata dalle tangenti successive (fig. 21). Tuttavia, tale metodo fornisce risultati approssimativi<sup>43</sup>. Gli attuali strumenti digitali automatici consentono l'estrazione delle linee di curvatura principale di una superficie: ciò rende possibile la verifica o la manipolazione di una superficie già durante la fase

42 Schiffner 2007, p.12.

43 Migliari 2009, p. 151.





embrionale del progetto, dunque di genesi formale. Questo favorisce lo sviluppo di un approccio alla progettazione sicuramente più ragionato e consapevole, senza limitarne la libertà formale o espressiva. La curvatura mediana  $K_m$  rappresenta la media calcolata tra le due curvatures principali<sup>44</sup>:

$$K_m = \frac{k_1 * k_2}{2}$$

La rete di curve individuate dalle linee di curvatura principale, a cui appartengono anche le reti composte dalle generatrici e direttrici delle superfici analitiche, viene anche definita rete di curve coniugate.

Queste si definiscono come coppie di famiglie di linee di una superficie, tali che per ogni punto della superficie passino una sola curva della prima famiglia e una sola curva della seconda in maniera tale che le due direzioni tangenti alle due curve siano coniugate<sup>45</sup> (figg. 23, 24). Per comprendere meglio il significato del termine coniugate, è utile richiamare il concetto di tangenti coniugate. Si consideri un punto  $P$ , appartenente ad una superficie  $\omega$  e una tangente  $t$  alla superficie uscente da esso. Si stacchi su  $t$  un punto  $Q$  e si tracci su  $\omega$  il contorno apparente  $c$  proiettando la superficie dal punto  $Q$ , in modo da definire un cono proiettivo di cui  $t$  costituisce una delle generatrici: la direzione  $t_2$  tangente al contorno apparente  $c$  nel punto  $P$  si dice coniugata alla direzione  $t \equiv t_1$ . Eseguendo più volte tale procedura è possibile estrapolare una rete di curve coniugate dalla superficie<sup>46</sup> (fig. 25). I matematici che hanno indagato questi principi hanno indicato e dimostrato diverse procedure per estrarre da una superficie le reti composte da coppie di famiglie di curve coniugate<sup>47</sup>.

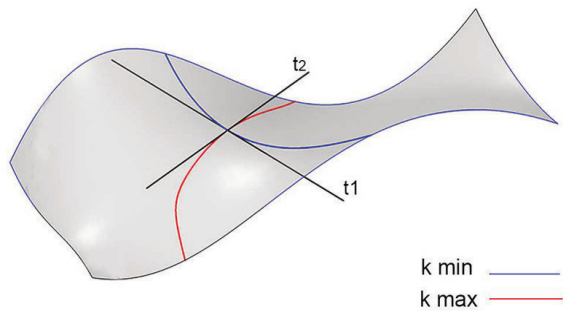
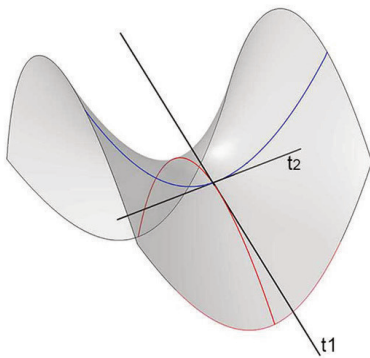
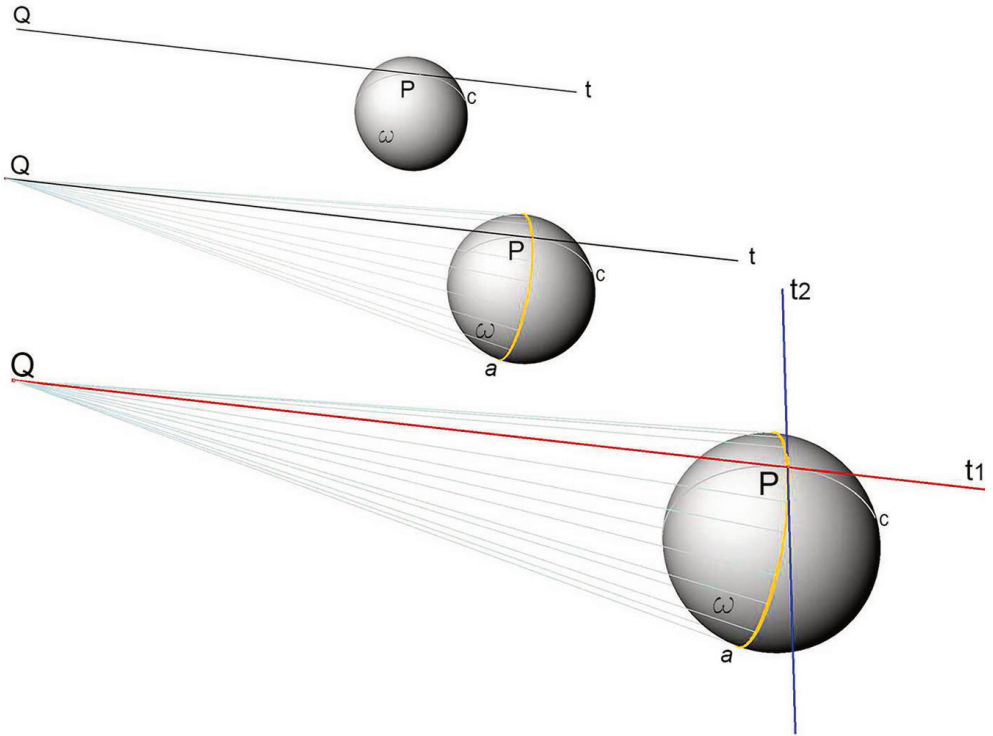
Oltre a consentire l'estrazione automatica delle linee di curvatura principale (*et\_Extract principal curvature lines*) (fig. 26), il *plug-in Evolute Tools Pro (Rhino)*

44 *Ibidem*.

45 Baglioni 2012, p. 272.

46 *Ibidem*, pp. 272, 273

47 Liu 2006, p. 3



k min — blue  
k max — red

consente, attraverso l'uso del comando *et\_Extract conjugate lines* di estrarre automaticamente una rete di curve coniugate computata a partire da un direzione assegnata. Per ottimizzare i processi di discretizzazione di una superficie complessa è necessario che la rete composta dalle linee di curvatura sia il più possibile regolare: in fase progettuale sarà necessario tendere il più possibile a tale condizione di regolarità. A tal proposito è importante definire i punti rispetto ai quali queste reti di curve mostrano delle irregolarità, cioè i punti ombelicali, o anche punti di singolarità, per le conseguenze che questi determinano in fase di tassellazione piana o curva delle superfici. Un sottoinsieme di una superficie che contiene solo punti ombelicali si chiama zona ombelicale. In corrispondenza di un punto non ombelicale è possibile distinguere due vettori ortogonali tangenti alle linee di curvatura che si intersecano nel punto stesso. I punti ombelicali giocano un ruolo significativo nella qualità delle reti composte dalle linee di curvatura principale.

Dato un punto P appartenente ad una superficie, se:

$$k_1 = k_2$$

le due curvature principali coincidono, allora P è un punto ombelicale ( $k_1$  e  $k_2$  sono le due curvature principali). Un punto è definito ombelicale, o di singolarità, quando le due direzioni principali coincidono o non sono definite in modo univoco.

La sfera, ad esempio, è l'unica superficie a curvatura costante per cui ogni punto è un punto ombelicale. Considerato un punto ad essa appartenente, essendo il raggio costante, tutti i cerchi osculatori, e quindi le rispettive curvature, saranno uguali.

Pertanto, per la geometria differenziale, un punto ombelicale è anche detto punto sferico: in tali punti la curvatura della superficie è uguale in tutte le di-

Fig. 25/ A pagina precedente:  
Individuazione di due direzioni coniugate.  
(Rielaborazione dell'autore).

Fig. 26/ A pagina precedente:  
La rete delle linee di curvatura principale  
è composta da due famiglie di curve  
coniugate. (Figura dell'autore).

rezioni e quindi le curvatures principali coincidono. Generalmente, i punti ombelicali si manifestano come punti isolati posti in una regione ellittica della superficie in cui la curvatura gaussiana è positiva. Se si considera un ellissoide, superficie analitica a curvatura gaussiana positiva, ci saranno almeno quattro punti ombelicali<sup>48</sup> (fig. 27).

I punti ombelicali possono anche essere individuati e classificati in base al *pattern* che individua le direzioni principali in quel punto. I tre *pattern* possibili sono: *star* (o stella), *lemon* (o limone), e *lemonstar* (o *monstar*, configurazione che nasce come combinazione delle altre due)<sup>49</sup> (fig. 28).

I punti ombelicali ellittici e parabolici si manifestano sempre attraverso il *pattern* a stella, mentre quelli iperbolici possono manifestarsi come stelle, limoni, o *monstar*. Questa classificazione è dovuta a Darboux, mentre i nomi attribuiti alle configurazioni dei *pattern* sono stati stabiliti da Hannay<sup>50</sup>.

Ai fini della classificazione delle superfici è importante definire il segno della curvatura gaussiana. Si consideri un vettore normale ad una superficie in punto:

- se la superficie ha curvatura gaussiana positiva, i vettori distribuiti lungo le due curve punteranno verso una direzione differente rispetto a quella del vettore iniziale;
- se la superficie ha curvatura gaussiana negativa, i vettori distribuiti lungo la curva blu punteranno in direzione del vettore iniziale, mentre i vettori distribuiti lungo la curva rossa punteranno verso una direzione differente rispetto a quella del vettore iniziale;
- se la superficie ha curvatura gaussiana nulla, l'orientamento dei vettori lungo la curva blu non cambia, mentre i vettori distribuiti lungo la curva rossa punteranno verso una direzione differente rispetto a quella del vettore iniziale<sup>51</sup>.

Il segno della curvatura gaussiana  $K$  di una superficie è positivo o negativo in base all'esistenza e al segno di entrambe le curvatures principali, quindi in base alla

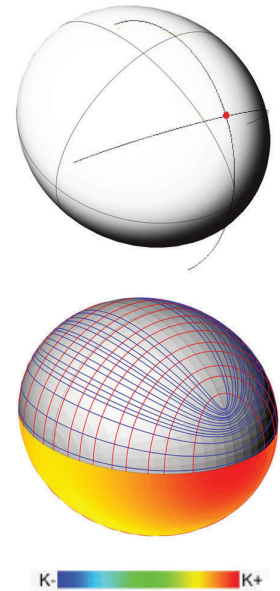


Fig. 27/ In un ellissoide, superficie a curvatura gaussiana positiva, esistono almeno quattro punti ombelicali e simmetrici. (Figura dell'autore).

48 In un ellissoide sono presenti 4 punti di singolarità distribuiti in maniera simmetrica sulla superficie

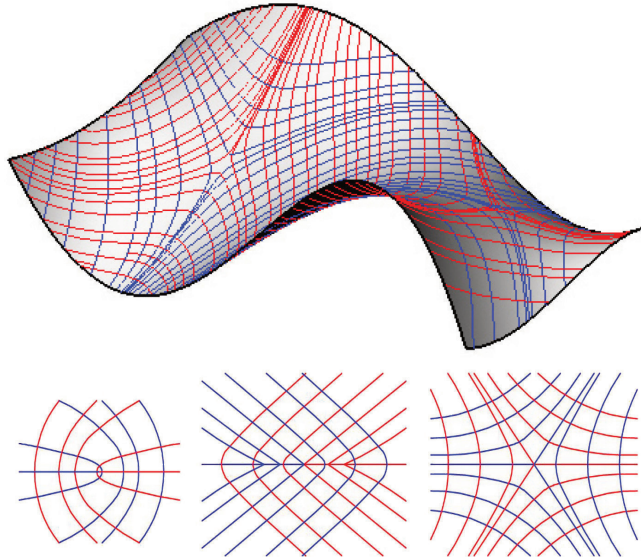
49 Berry 1977, p. 1810

50 *Ibidem*, p. 1811.

51 Types of Riemann/Gauss Curvature, 2013, pp. 6-8.

thephysicsmill.com/2013/03/17/for-there-we-are-captured-the-geometry-of-spacetime/

Fig. 28/ Punti di singolarità di una superficie complessa. Le tre tipologie di punti di singolarità sono: *Lemon*, *Lemonstar* e *Star*. (Figura dell'autore).



posizione dei due cerchi osculatori (figg. 34-35):

- se  $K$  è positiva, il punto si definisce ellittico, e la superficie, nell'intorno del punto, presenta un andamento convesso: in tale punto il piano tangente la superficie non interseca la superficie stessa. Le curvature principali possono essere entrambe positive o entrambe negative, il loro prodotto sarà infatti sempre positivo (fig. 29);
- se  $K$  è negativa, il punto si definisce iperbolico, e la superficie, nell'intorno del punto, presenta un andamento né concavo, né convesso: in tale punto il piano tangente la superficie interseca la superficie stessa (fig. 30). In questo caso le curvature principali sono opposte, il loro prodotto sarà infatti sempre negativo. Alcune superfici a curvatura gaussiana negativa sono anche superfici rigate, determinate cioè da una schiera di generatrici rettilinee ma, proprio in conseguenza del valore di curvatura, non sono sviluppabili;
- se, infine,  $K$  è uguale a zero, il punto si definisce parabolico, e la superficie è rappresentata da un piano, oppure, è una superficie rigata e sviluppabile.<sup>52</sup> Ciò si verifica se entrambe le curve sono due rette,

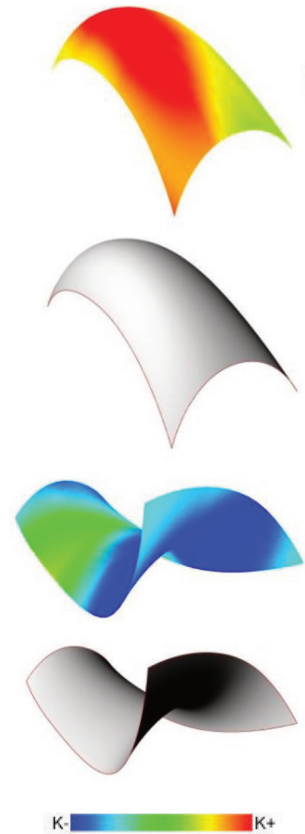
oppure, se una delle due curve è una retta, e quindi uno dei raggi del cerchio osculatore è infinito.

Le superfici a doppia curvatura si distinguono in superfici sinclastiche, la cui curvatura è sempre dello stesso segno per entrambe le direzioni principali, e in superfici anticlastiche (o a sella), per le quali in ciascun punto si ha curvatura positiva in una direzione e negativa nell'altra<sup>53</sup> oppure entrambe le condizioni.

Attraverso l'indicatrice di Dupin è possibile stabilire se i punti di una superficie sono di tipo ellittico, parabolico o iperbolico<sup>54</sup>. All'indicatrice di Dupin è legata l'individuazione della direzione delle tangenti asintotiche di una superficie. Per visualizzare e comprendere meglio il concetto di direzioni asintotiche, consideriamo un punto appartenente ad una superficie  $w$ : il piano tangente alla superficie in quel punto può intersecare o meno, in base alla curvatura, la superficie stessa. Considerato un piano tangente  $\alpha$  in un qualsiasi punto  $P$  di una superficie  $\omega$  a curvatura gaussiana positiva, tale piano interseca la superficie solo in corrispondenza del punto stesso (fig. 32), mentre un piano tangente una superficie con curvatura gaussiana negativa interseca la superficie individuando due curve<sup>55</sup> (fig. 33). Le tangenti alle linee di intersezione  $i1$  e  $i2$  tra la superficie ed un suo piano tangente individuano le direzioni asintotiche.

Si definisce linea asintotica una curva le cui tangenti sono tutte tangenti asintotiche<sup>56</sup>. Sono dette direzioni asintotiche di una superficie in un punto le direzioni secondo le quali la curvatura normale si annulla. Si può verificare che:

- se  $K$  è negativa, le tangenti asintotiche sono due, reali e distinte; se  $K$  è nulla, le tangenti asintotiche sono due e coincidenti (corrispondono cioè alla generatrice passante per il punto di contatto del piano tangente);
- se  $K$  è positiva non esistono tangenti asintotiche, infatti la superficie ha un andamento convesso e quindi il piano tangente non la interseca.



Figg 29, 30/ Le superfici a doppia curvatura si distinguono in superfici sinclastiche, in cui la curvatura è sempre dello stesso segno in entrambi le direzioni principali, e in superfici anticlastiche (o a sella), in cui in ciascun punto si ha un valore della curvatura positivo in una direzione e negativo. Il segno dipende dalla posizione dei cerchi osculatori. (Figura dell'autore).

53 Gottfried 2003, p. 209.

54 Stavric 2011, p.2.

55 Migliari 2009, p. 148.

56 *Ibidem*.



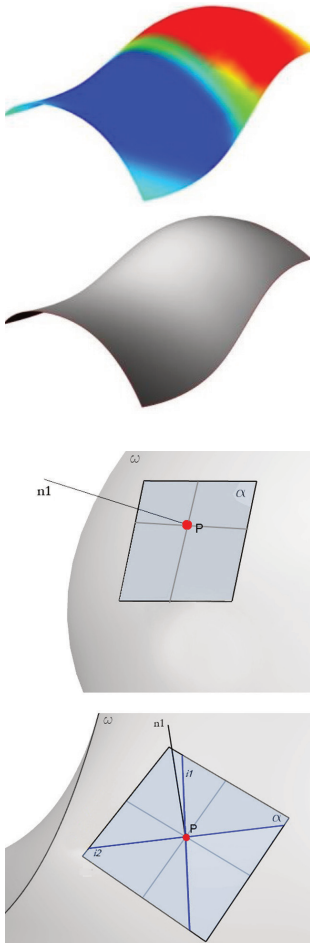


Fig. 31/ Passaggio da un'area a curvatura gaussiana positiva, (configurazione convessa) ad un'area a curvatura gaussianan negativa (configurazione concava). (Figura dell'autore).

Figg. 32, 33/ Rappresentazione dell'Indicatrice di Dupin rispettivamente per un punto ellittico e per un punto iperbolico. (Figura dell'autore).

57 Migliari 2009, p. 151.

58 Fallavolita 2009, p. 161.

59 *Ibidem*, p. 160.

60 De Carlo 2019, p.58 (da Monge 1771).

In generale, per ogni punto di una superficie esistono dunque due direzioni asintotiche: in accordo con ciascuna di queste possibilità i punti corrispondenti sono iperbolici, parabolici o ellittici<sup>57</sup>. In una superficie rigata, superficie analitica generata dal movimento di una retta, la presenza di generatrici rettilinee non è una condizione sufficiente affinché una superficie sia sviluppabile: è infatti necessario che una delle due curvature principali sia nulla<sup>58</sup>. Il paraboloido iperbolico, ad esempio è una rigata, ma è una superficie a curvatura negativa. La curvatura gaussiana determina, dunque, la fondamentale distinzione, importante soprattutto per la fabbricazione, tra superfici rigate sviluppabili e superfici rigate non sviluppabili.

Quindi, solo le superfici che presentano  $K=0$  sono superfici sviluppabili. Si ricorda che una superficie rigata è sviluppabile quando due generatrici consecutive sono complanari e incidenti. Pertanto, le superfici sviluppabili rappresentano un caso speciale di superfici rigate, in quanto esse possono essere sviluppate in porzioni di superfici piane senza strappi o deformazioni: grazie a tale proprietà queste superfici sono state ampiamente utilizzate in architettura. La proprietà più importante che caratterizza tali superfici, necessaria per ottimizzare il processo di fabbricazione di una superficie *free form*, è che tali superfici siano rigate. A tale proposito è utile ricordare che assegnata una curva sghemba  $c$ , le tangenti a  $c$  sono le generatrici di una superficie rigata. La curva  $c$ , luogo delle intersezioni di tali tangenti, è detta spigolo di regresso<sup>59</sup> (fig. 34). Inoltre, considerando le infinite normali che giacciono sul piano normale alla curva è possibile individuare una serie di assi polari la cui sequenza permette di costruire una superficie rigata definita "sviluppabile polare"<sup>60</sup> (fig. 35).

Il ricorso a tale proprietà diventa di fondamentale importanza per comprendere i principi posti alla base della trasformazione di una *mesh* composta da



facce quadrilatere piane in una striscia sviluppabile. La sviluppabilità di una superficie curva su un piano è una delle principali caratteristiche che determina la riduzione dei costi di produzione: una porzione di superficie sviluppabile rappresenta un prodotto fisico che potrà essere facilmente ritagliato sul piano e nuovamente curvato nello spazio.

### Classificazione e discretizzazione

La tecnica del *Paneling* è strettamente dipendente dalla natura geometrica delle superfici.

A tal proposito sono state elaborate soluzioni innovative *Panel Fitting* (sistemi misti composti da pannelli rigati piani, a singola e a doppia curvatura) basate sull'uso di superfici rigate, sviluppabili e non sviluppabili, per razionalizzare involucri e facciate *free form*: i pannelli distribuiti su tali superfici saranno pertanto più economici da produrre.

La geometria differenziale classifica le superfici secondo il segno della loro curvatura totale: si è pertanto ritenuto fondamentale utilizzare questo criterio come base per la classificazione e sistematizzazione delle tipologie di superfici attualmente più economiche ed in uso per il *Panel Fitting*<sup>61</sup> di superfici complesse (fig. 36). Ricordiamo che le superfici rigate disponibili nei processi di *Panel Fitting* per approssimare ed ottimizzare una superficie *free form* sono i piani, i cilindri, i paraboloidi iperbolici, i tori, le strisce sviluppabili e gli elicoidi. Dai grafici è possibile notare come la curvatura gaussiana della superficie influisca notevolmente sulla discretizzazione della stessa: le reti delle linee di curvatura principale consentono automaticamente la tassellazione in elementi non soltanto triangolari, ma anche in elementi quadrilateri piani (figg. 38-40). Si dimostra, dunque, che la genesi di una superficie influisce in maniera sostanziale sulla successiva fase di discretizzazione. Le superfici rigate sono generate da moti semplici di

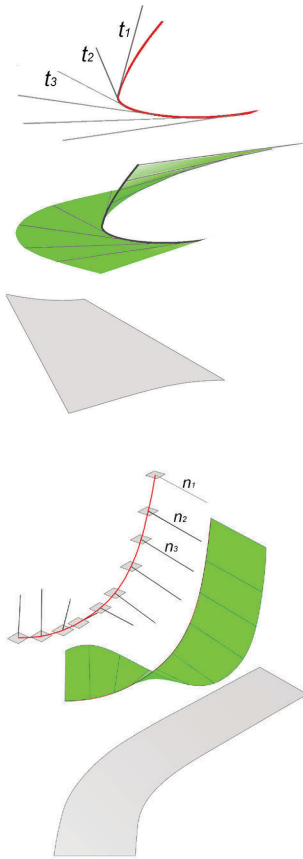


Fig. 34/ Le tangenti di una curva sghemba coincidono con le generatrici di una superficie sviluppabile. Tale curva  $c$  è detta spigolo di regresso. (Figura dell'autore).


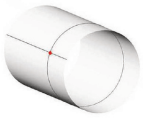
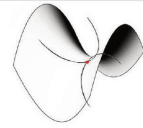
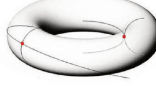
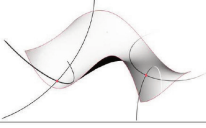

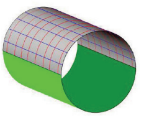
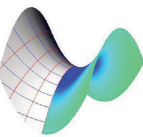
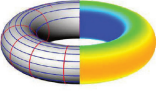
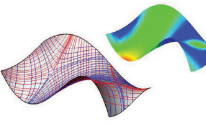
Fig. 35/ La superficie costruita su una serie consecutiva di assi polari di una curva è definita "sviluppabile polare". (Figura dell'autore).

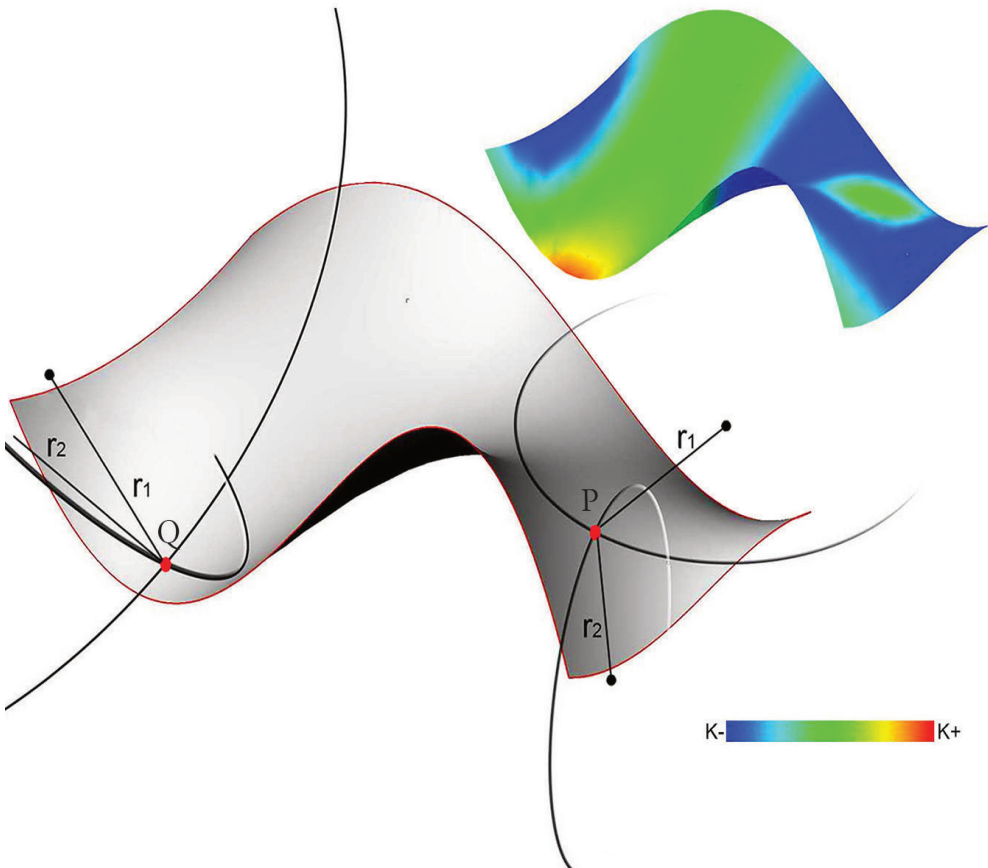
Fig.36/ A pagina successiva: Classificazione delle superfici. (Figura dell'autore).

Fig. 37/ A pagina successiva: la curvatura gaussiana di una superficie in un punto è rappresentata dalla posizione dei cerchi osculatori. In  $P$  la curvatura è negativa, mentre in  $Q$  è positiva. (Figura dell'autore).

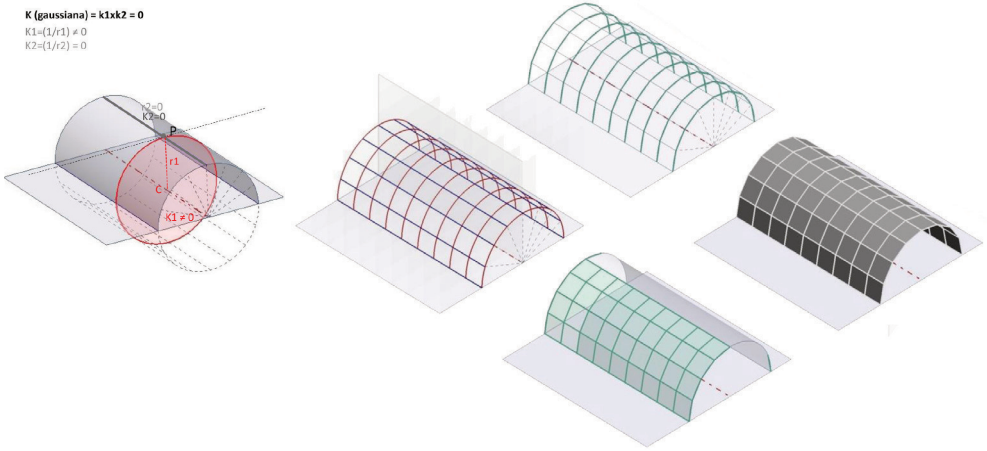
61 Eigensatz 2010, p. 73.

# Shaping & Paneling

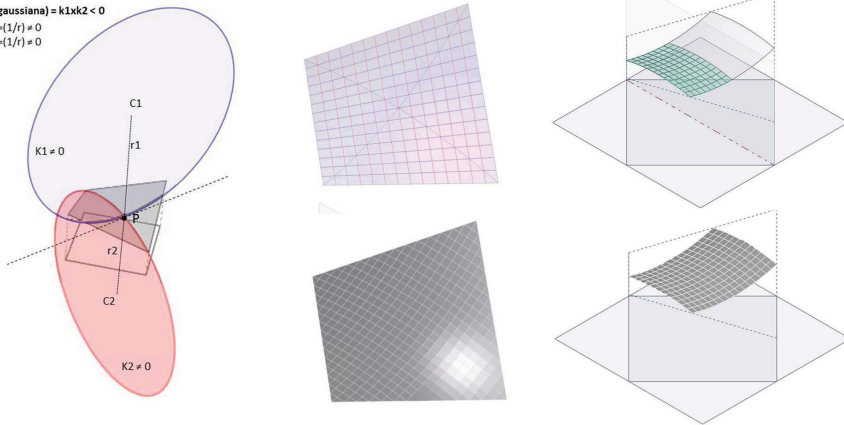
CLASSIFICAZIONE DIFFERENZIALE DELLE SUPERFICI				
SUPERFICI ANALITICHE				SUPERFICI COMPLESSE
SINGOLA CURVATURA		DOPPIA CURVATURA		
K = 0		K < 0	K > = < 0	
RIGATE (sviluppabili)		RIGATE (non sviluppabili)		
PIANO	CILINDRO	PARABOLOIDE IPERBOLICO	TORO	SUPERFICIE COMPLESSA
				
				



**K (gaussiana) =  $k_1 \times k_2 = 0$**   
 $K_1 = (1/r_1) \neq 0$   
 $K_2 = (1/r_2) = 0$

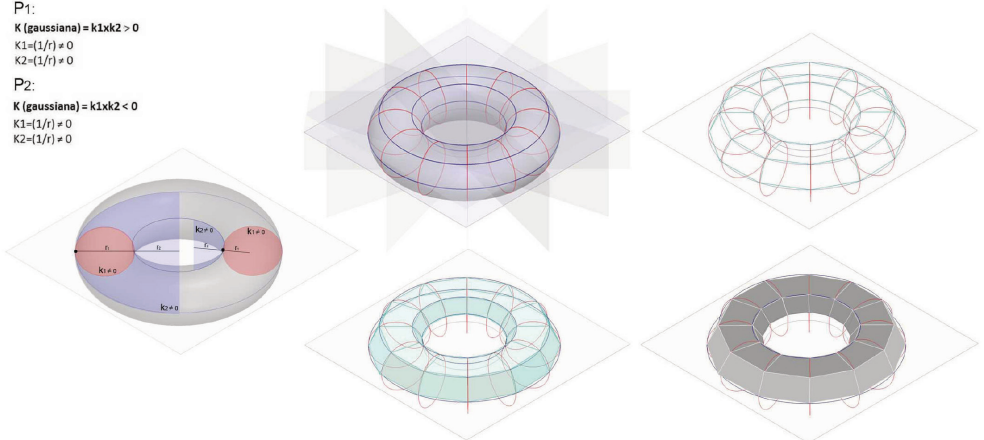


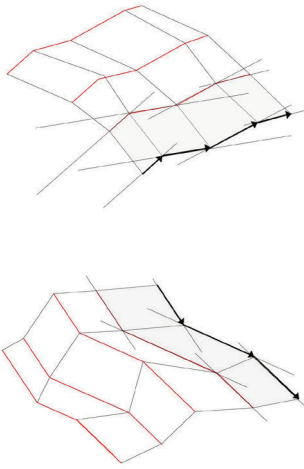
**K (gaussiana) =  $k_1 \times k_2 < 0$**   
 $K_1 = (1/r_1) \neq 0$   
 $K_2 = (1/r_2) \neq 0$



**P1:**  
**K (gaussiana) =  $k_1 \times k_2 > 0$**   
 $K_1 = (1/r_1) \neq 0$   
 $K_2 = (1/r_2) \neq 0$

**P2:**  
**K (gaussiana) =  $k_1 \times k_2 < 0$**   
 $K_1 = (1/r_1) \neq 0$   
 $K_2 = (1/r_2) \neq 0$





Figg. 38-40/ A pagina precedente: il cilindro ( $k=0$ ), il paraboloido iperbolico ( $k<0$ ), il toro ( $0<k>0$ ) sono superfici la cui genesi geometrica consente la discretizzazione in elementi quadrangolari piani. Lo stesso vale per tutte le superfici di rivoluzione e traslazione. (Elaborazioni dell'autore).

Fig. 41 Dati due vettori paralleli, essi definiscono sempre una superficie quadrilatera piana: tali vettori, unitamente ai bordi di collegamento tra gli estremi degli stessi (*end points*), definiscono i quattro lati del perimetro piano di una superficie. (Elaborazione dell'autore).

Figg. 42, 43/ A pagina successiva: Due esempi di *scale translational surface* discretizzabili in elementi quadrilateri piani. Figura dell'autore).

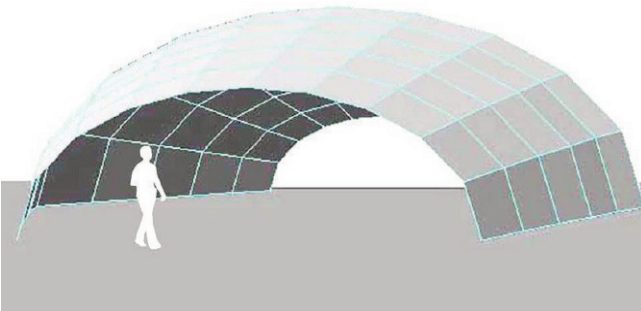
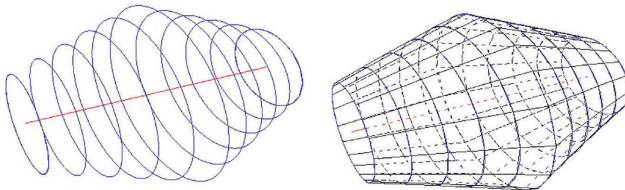
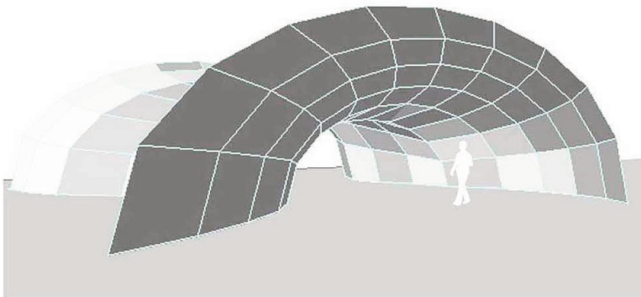
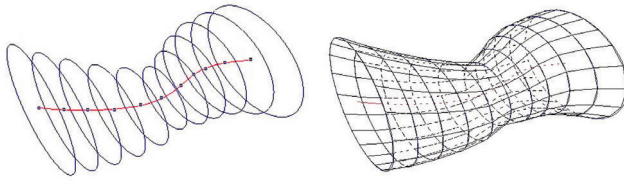
62 cfr. Baglioni, 2009, p. 378.  
63 Glymph et al. 2004, p. 193.

traslazione e rotazione e da moti composti (rototraslazione). Le superfici di traslazione sono generate dal moto di una generatrice, retta o curva, lungo una o più direttrici, che a loro volta possono essere rette o curve<sup>62</sup>. Le superfici di rivoluzione possono essere anche considerate come generate dalla traslazione di una curva generatrice lungo una circonferenza.

Anche la natura delle curve coinvolte nel processo, analitiche o complesse, influenza la complessità della forma generata in seguito al moto di traslazione o di rotazione. Si dimostra che a partire da una superficie generata da leggi di moto note è facilmente possibile estrarre degli elementi quadrilateri piani. Questa possibilità deriva dal parallelismo delle corde ottenute dividendo le progressive sezioni complanari delle superfici di traslazione generate che, congiunte tra loro, rappresentano i bordi delle facce.

Trasformando più volte, in maniera concentrica o eccentrica, una curva di partenza piana (analitica o complessa) e traslando le curve ottenute (future sezioni della forma generata) lungo una curva sghemba o lungo una retta, è possibile generare un tipo di superfici note in letteratura come *scale-translational surfaces*<sup>63</sup>, discretizzabili in elementi quadrilateri piani (figg. 42, 43). Suddividendo le curve-sezione in parti uguali e congiungendo i punti ottenuti è possibile ricavare delle coppie di bordi paralleli, i quali rappresentano i lati delle celle quadrilatere piane. Più in generale, dati due vettori paralleli, essi definiscono sempre una superficie quadrilatera piana: tali vettori, unitamente ai bordi di collegamento tra gli estremi degli stessi (*end points*), definiscono i quattro lati del perimetro piano di una superficie.

Una serie di vettori paralleli genera una riga iniziale della maglia di pannelli piani: la curva che collega gli *end points* dei vettori rappresenta una delle curve di sezione della superficie che si vuole generare. Seguendo lo stesso principio vengono generate



tutte le righe successive. I vettori paralleli possono anche presentare direzione e lunghezza diverse rispetto a quelli appartenenti alle schiere precedenti. La scelta arbitraria della lunghezza dei nuovi lati determina la nuova curva di sezione, differente dalla precedente. Attraverso tale tecnica è possibile discretizzare qualsiasi tipo di forma con elementi quadrilateri piani (fig. 41). Per razionalizzare e per ottimizzare il *Paneling* di una generica superficie complessa è necessario ricorrere ad appositi algoritmi di suddivisione, di planarizzazione e di ottimizzazione delle superfici e dei *pattern* coinvolti nel processo. Il congiungimento dei vertici di una rete poligonale di curve distribuite su una superficie complessa non consente la costruzione di facce piane, ma solo di porzioni di superfici curve, per la cui planarizzazione è necessario ricorrere a delle apposite procedure di tipo matematico ed informatico. La qualità del risultato derivante dall'applicazione di tali tecniche è inevitabilmente influenzata dalla natura della superficie da discretizzare. Il capitolo successivo mira ad indagare le principali relazioni esistenti tra la curvatura di una superficie complessa e la qualità dei risultati derivanti dai processi che ne consentono la razionalizzazione.