

## 6. *Shape & pattern*

Life is like riding a bicycle. To keep your balance, you must keep moving  
Albert Einstein

### **I sistemi discreti: *mesh* "funzionali"**

La natura delle superfici ed i risultati derivanti dai processi di razionalizzazione ad oggi noti in letteratura sono legati da importanti relazioni geometriche. Una superficie può essere realizzata mediante la sua suddivisione in singoli elementi tra loro connessi: i pannelli possono essere piani o curvi, presentare diversa geometria ed essere distribuiti in base ad uno specifico *pattern*. È fondamentale riflettere sulla differenza tra la realizzazione di un sistema composto da celle sghembe aventi una specifica forma geometrica, delimitate da segmenti curvi, e la planarizzazione o la trasformazione delle *patch* a doppia curvatura in pannelli piani.

La presente ricerca intende dimostrare quanto la stessa natura geometrica di una superficie possa suggerire la migliore soluzione possibile al problema.

Un *pattern* rivela la configurazione strutturale di una serie di dati, la cui regola o sequenza diviene esplicita, quindi visualizzabile, mediante segni grafici. Può rappresentare la ripetizione regolare, semiregolare o irregolare di un insieme di elementi geometrici<sup>1</sup>. A tale proposito, com'è possibile dedurre da specifiche ricerche condotte in merito<sup>2</sup>, i sistemi di tassellazione rappresentano la tipologia di *pattern* più semplice per ricoprire una superficie piana o spaziale con una o più figure geometriche replicate all'infinito, senza produrre lacune o sovrapposizioni<sup>3</sup>. Data la complessità delle forme oggetto di questo studio, tra le differenti e numerose tipologie di tassellazioni esistenti, divise tra periodiche e aperiodiche<sup>4</sup>, monoedrali e n-edrali<sup>5</sup>, appare utile indagare l'applicazione dei *pattern* triangolare, esagonale e quadrangolare alle superfici complesse.

Perché un sistema discreto sia prestante dal punto di vista tecnologico, economico ed estetico, è importante che i vertici dei tasselli siano il più possibile uniformemente distribuiti nello spazio<sup>6</sup>. L'utilizzo di forme essenziali e regolari rappresenta la soluzione ottimale. La standardizzazione dei vari elementi coinvolti rappresenta una condizione di grande importanza per ottimizzare l'approccio alla fabbricazione sul piano computazionale ed economico-costruttivo. Estendendo questi contenuti dal piano allo spazio, è noto che le facce triangolari, quadrangolari ed esagonali che delimitano il volume dei cinque poliedri regolari sono uguali per ciascuno di essi. Nel caso di una superficie complessa non è altrettanto semplice ottenere questo risultato: la prima causa risiede proprio nell'imprevedibile variazione della curvatura della stessa. Se da un lato i nuovi strumenti digitali consentono ai progettisti di sviluppare liberamente la loro espressività formale, dall'altro tale libertà comporta la ricerca di una soluzione ai problemi legati alla realizzazione di tali forme,

1 Cfr. Fassino 2012, p. 5.

2 Tra le tesi consultate in merito: Fassino 2012; Baglioni 2008.

3 Grunbaum 1977.

4 Le tassellature con simmetria periodica sono quelle per le quali esistono almeno due traslazioni indipendenti, dunque in direzione differente.

5 Una tassellatura è monoedrale se ogni tassello è congruente a qualsiasi altro tassello, mentre è definita n - edrale se è composta da differenti tipi di tasselli.

Se tutti i tasselli sono uguali la tassellatura si definisce isoedrale (cfr. Fassino 2012, pp. 13-18).

6 Baglioni 2009, pp. 22-23.

esigenza che richiede la messa a punto di strumenti computazionali sviluppati *ad hoc* per la suddivisione e la planarizzazione delle superfici.

Sono state quindi indagate le potenzialità e le problematiche geometrico-generative delle tipologie di *pattern* indicate, senza approfondire la questione dal punto di vista strutturale. Il punto di partenza per la creazione di un *pattern* geometrico è la circonferenza. Tutte le tipologie, più o meno complesse, di geni e di distribuzione di tasselli piani su una superficie, che sia essa piana o curva, fanno sempre riferimento alla primitiva figura geometrica del cerchio<sup>7</sup>. Congiungendo i punti ottenuti dall'intersezione di diverse circonferenze, a loro volta distribuite secondo un preciso *pattern*, è possibile costruire i diversi poligoni. Sul piano euclideo è sempre possibile ottenere delle tassellature isoedrali regolari, cioè tassellature di tipo monoedrale composte da tessere tutte uguali<sup>8</sup>. L'equipartizione regolare del piano è anche detta isomorfa, in quanto composta da un solo tipo di poligoni regolari.

Esistono due tipi fondamentali di questi reticoli, quello a due direzioni ortogonali, proprio della maglia quadrata, e quello a tre direzioni, con angoli di 120°, relativo alla griglia triangolare ed esagonale. In un reticolo si distinguono i nodi (gli incroci del reticolo), le aste (i lati dei poligoni) e le regioni (i poligoni che compongono la griglia) (fig. 2).

È dunque possibile leggere un reticolo come sistema di punti, segmenti o figure piane<sup>9</sup>.

In un *pattern* geometrico, il numero di lati che concorrono in ogni nodo definisce la valenza del vertice che, costruttivamente, si traduce nel numero di aste o di bordi dei tasselli. Considerando il nodo di un reticolo, per "chiudere" lo spazio bidimensionale la somma degli angoli compresi tra le aste che vi convergono deve essere sempre pari a 360°.

Si dimostra che solo tre poligoni soddisfano tale

7 Fassino 2012.

8 Fassino 2012, pp. 22-23.

9 De Plaisant 1982-87, p.164.

## Shaping & Paneling

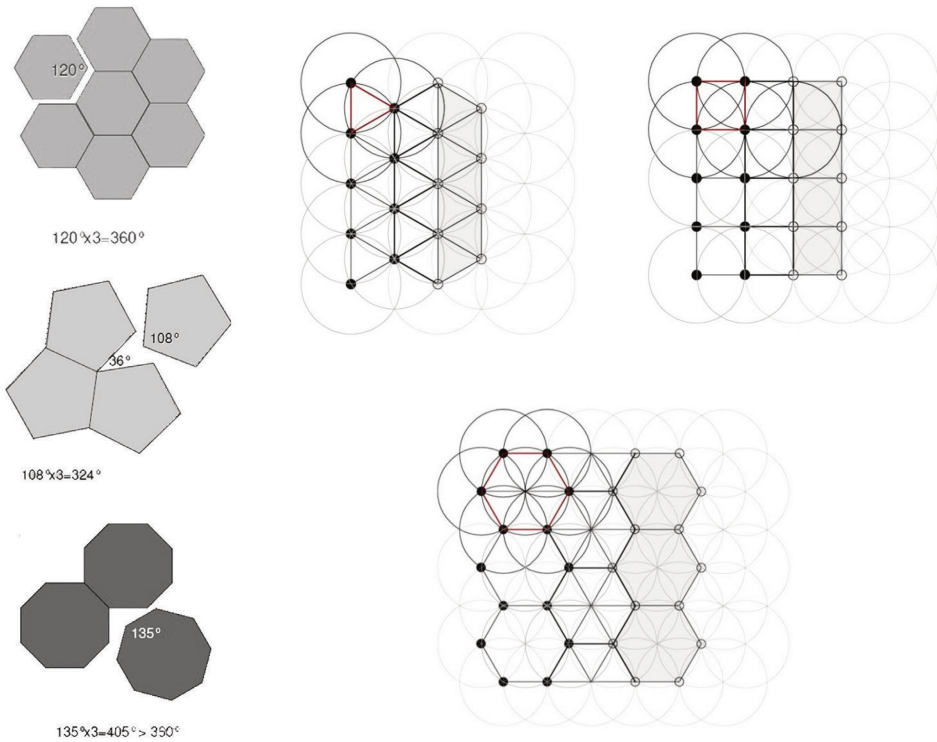


Fig. 1/ Il triangolo equilatero, l'esagono regolare e il quadrato soddisfano la condizione necessaria per chiudere il piano bidimensionale. (Rielaborazione dell'autore).

Fig. 2/ Il punto di partenza per la creazione di un *pattern* geometrico è la circonferenza. (Figura dell'autore).

condizione: il triangolo equilatero ( $60^\circ$ ), il quadrato ( $90^\circ$ ) e l'esagono regolare ( $120^\circ$ )<sup>10</sup> (fig. 1). Alla base degli algoritmi di planarizzazione vi è la ricerca di tale condizione. Dalla combinazione dei tre *pattern* regolari derivano una serie di tassellazioni semiregolari, note anche come tassellazioni di Archimede<sup>11</sup>, le quali sono modulari, ma non ottimali dal punto di vista costruttivo. La triangolazione rappresenta, da sempre, il metodo più immediato e sempre funzionante per la discretizzazione di superfici continue, qualunque curvatura esse presentino. Oggi sono disponibili numerosi algoritmi per la triangolazione di superfici, molti dei quali sono però stati sviluppati e potenziati per la risoluzione di specifici problemi di grafica 2D e 3D, molto diffusi nel campo dell'*entertainment*<sup>12</sup> e capaci di gestire le esigenze legate

10 *Ibidem*, p. 165.

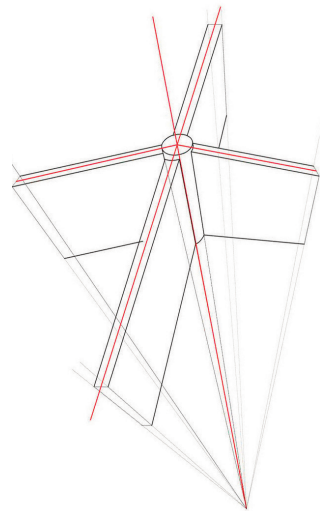
11 Fassino 2012, p. 24.

12 Fantini 2009, p. 63.



al *rendering*, operazione necessaria per la rappresentazione fotorealistica dei modelli digitali e per la gestione dei *computer games* e della *character animation*<sup>13</sup>. È interessante sottolineare come sia necessario, tanto per ricavare un'immagine fotorealistica da un modello, tanto per realizzare fisicamente un'opera, ricorrere comunque ad un'operazione di tassellazione, dunque alla semplificazione, di un sistema continuo di partenza. Tuttavia, dal punto di vista tecnologico-costruttivo, il *pattern* triangolare presenta il maggiore numero di criticità. Lo svantaggio principale è rappresentato dalla valenza dei suoi vertici che determina un numero elevato di aste (bordi dei pannelli) che concorrono in un unico nodo centrale di raccordo di sei facce triangolari adiacenti, aumentando la complessità delle modalità di fabbricazione dei nodi stessi e dunque i relativi costi<sup>14</sup>. Altri svantaggi che ne derivano sono il basso grado di trasparenza, dovuto alla presenza di nodi molto fitti (problema emergente soprattutto nel caso di involucri vetrati), una relativa pesantezza della struttura di supporto e la torsione geometrica dei nodi. Ciò comporta delle criticità e delle limitazioni importanti dal punto di vista funzionale ed estetico. Le *mesh* triangolari presentano comunque diversi vantaggi, tra cui un buon grado di approssimazione della superficie d'input, un'intrinseca stabilità della struttura portante e la planarità delle facce.

Di contro, esistono diversi vantaggi che accomunano il *pattern* esagonale e quello quadrangolare, capaci di dimostrarne la maggiore sostenibilità rispetto a quello triangolare. Questi due *pattern* generano diverse limitazioni di carattere geometrico in fase di planarizzazione, operazione necessaria per la realizzazione di sistemi discreti<sup>15</sup>. Un importante vantaggio del *pattern* quadrangolare è che, rispetto al *pattern* triangolare, i suoi nodi sono più semplici da realizzare, più leggeri e liberi da sollecitazioni di torsione.



Figg. 3, 4/ Il pattern quadrangolare consente la creazione di nodo privi di torsione. (Foto e rielaborazione dell'autore).

13 Baglioni 2009, pp. 402-422.

14 He 2014, p.24.

15 *Ibidem*, p.17.

È infatti possibile individuare i piani di simmetria degli elementi che costituiscono la struttura portante dei pannelli, o travi, rispetto ad un asse centrale verticale uscente da ciascuno dei nodi che compongono la struttura (figg. 3, 4). Tali proprietà comportano un ulteriore vantaggio dal punto di vista economico, e cioè la riduzione del quantitativo di materiale necessario, da cui deriva la conseguente riduzione dei costi complessivi. Il *pattern* esagonale e quello quadrangolare consentono una buona resa funzionale ed estetica della superficie, tra cui una maggiore trasparenza nel caso in cui i tasselli siano in vetro: tale vantaggio deriva dal minore numero di aste concorrenti in ciascuno dei nodi<sup>16</sup>. È interessante, a dimostrazione e a conclusione di tali considerazioni, calcolare il rapporto numero di aste-superficie per nodo. La superficie è l'area delimitata dalle perpendicolari al punto medio delle aste che gravano su un nodo<sup>17</sup> (fig.5).

Rapporto aste/superficie per nodo:

$$\textit{pattern} \text{ triangolare} = 6/2 : 0,86 = 3,48$$

$$\textit{pattern} \text{ esagonale} = 3/2 : 1,3 = 1,15$$

$$\textit{pattern} \text{ quadrato} = 4/2 : 1 = 2$$

Rapporto nodo/superficie per nodo o densità:

$$\textit{pattern} \text{ triangolare} = 1:0,86 = 1,16$$

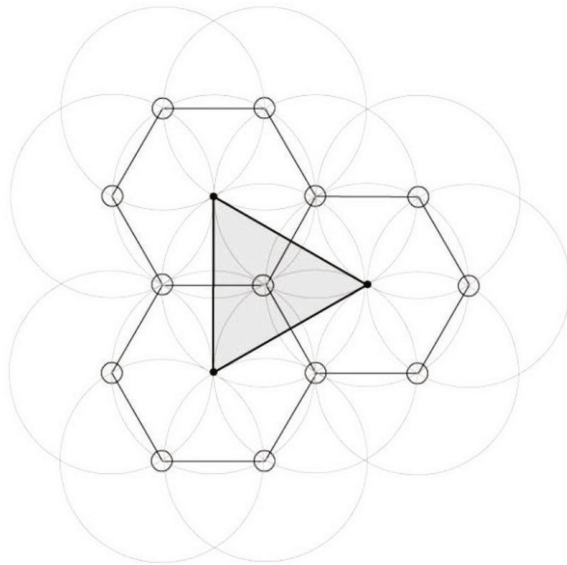
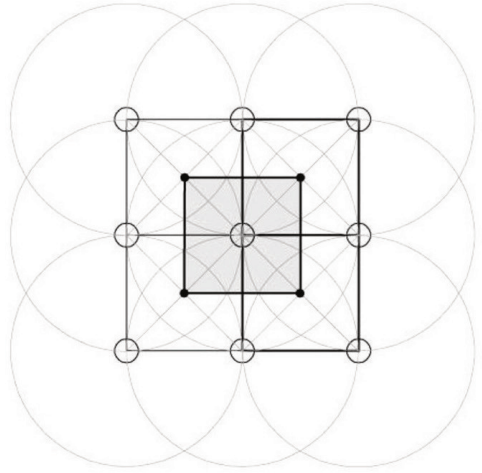
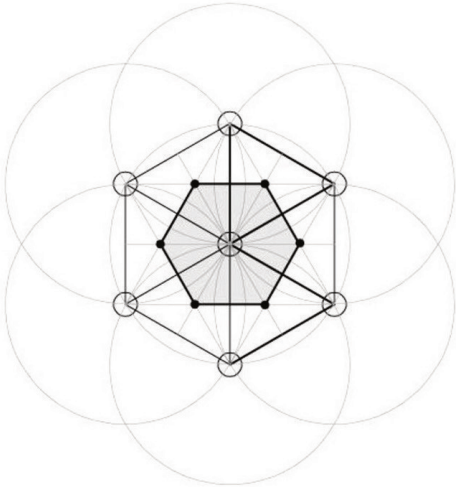
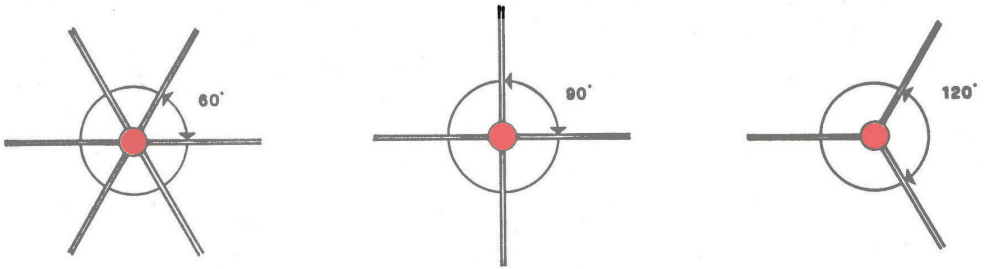
$$\textit{pattern} \text{ esagonale} = 1:1,3 = 0,76$$

$$\textit{pattern} \text{ quadrato} = 1:1 = 1$$

È possibile concludere che, a parità di dimensioni dell'asta, supposta di lunghezza unitaria, il reticolo triangolare risulta essere quello per il quale i due rapporti calcolati assumono i valori più alti, mentre quello esagonale risulta essere quello per il quale i valori sono più bassi. Tra i vantaggi del *pattern* esagonale e del *pattern* quadrilatero vi è, inoltre, la possibilità di eseguire l'*offset* del sistema discreto,

16 Schmiedhofer 2008.

17 De Plaisant 1982-87, p.167.



## Shaping & Paneling

Fig. 5/ A pagina precedente: la superficie per nodo è l'area delimitata dalle perpendicolari al punto medio delle aste che gravano su un nodo. (Figura dell'autore).

sempre a condizione che la tassellazione non presenti discontinuità o lacune, che l'orientamento delle facce sia regolare e che ciascun bordo sia condiviso solo da due tasselli<sup>18</sup>. Questa proprietà rappresenta una condizione favorevole per la realizzazione di sistemi multistrato<sup>19</sup> e consente, inoltre, di realizzare strutture tridimensionali di tipo monolitico. Tale vantaggio spinge la ricerca a considerarne le possibili ricadute nell'ambito della *Digital Stereotomy*. Le riflessioni effettuate confermano la necessità di approfondire questo sistema di tassellazione per la discretizzazione di superfici complesse. È importante approfondire le proprietà delle *mesh* quadrangolari, le quali possiedono altrettante interessanti proprietà geometriche. Nel panorama nazionale sono stati compiuti diversi studi di sistematizzazione e di approfondimento sulla tassellazione del piano e delle superfici continue<sup>20</sup>, sicuramente più immediata da ottenere rispetto alla tassellazione di superfici complesse. Per computare la discretizzazione di una superficie complessa sono necessari appositi algoritmi di tassellazione di suddivisione e, nel caso dei *pattern* esagonale e quadrilatero, di planarizzazione<sup>21</sup>. Nell'ambito degli studi sulla tassellazione di superfici, i processi di generazione delle *mesh* rappresentano un campo specifico di ricerca e di applicazione: la sua vastità richiede una ricognizione degli algoritmi utilizzati dai vari software industriali, oltre che di approfondite competenze di tipo informatico e matematico<sup>22</sup>. La geometria differenziale discreta studia le proprietà ed i comportamenti al limite delle *mesh*. Grazie alla geometria descrittiva è possibile esplicitare i principi posti alla base dei processi più diffusi: lo scopo non è un'elenco dettagliato di tutti gli algoritmi di *meshing* esistenti e dei principi matematico-informatici annessi, ma è soprattutto quello di comprendere i passaggi che consentono l'ottimizzazione distributiva e, quando

18 I modellatori attuali dispongono di appositi strumenti per la correzione di tali irregolarità.

19 Tonelli 2012, p.13.

20 Fassino 2012; Baglioni 2008.

21 Schiffner 2007, p. 18.

22 Baglioni (2009, pp.404-422) elenca una serie di algoritmi esistenti per la generazione di *mesh* di tipo triangolare, tetraedrico, quadrangolare ed esaedrico.

necessaria, la planarizzazione dei tasselli individuati dalle reti di curve distribuite sulle superfici di riferimento. Una *mesh*, qualsiasi sia il suo *pattern*, nasce dalla connessione di un insieme di punti o vertici: ciò non significa che tali elementi siano sempre piani. Il raggiungimento di tale condizione dipende strettamente dal tipo di *pattern* scelto, ma soprattutto dalla curvatura della superficie. Una *mesh*, aperta o chiusa, è più comunemente nota come la rappresentazione discreta di una superficie continua o come il modello numerico ottenuto a partire da un modello matematico<sup>23</sup>. Il collegamento di una coppia di vertici viene definito bordo della cella, mentre gruppi di tre o più vertici collegati tra loro a chiudere una figura generano facce piane o poligoni sghembi<sup>24</sup>. Immaginando la morfologia di un involucro o di una facciata è utile indagare le *mesh* di tipo regolare e soprattutto di tipo *2-manifold*, cioè composte da tasselli i cui bordi non devono connettere un numero di facce superiore a due<sup>5</sup>. È di fondamentale importanza orientare in maniera corretta le facce che compongono un sistema discreto. L'orientamento, indicato dalla direzione delle normali uscenti dalle facce, è legato all'ordine di distribuzione dei vertici durante la fase di costruzione del tassello. Una *mesh* è definita orientata se le facce sono orientate in modo coerente; orientabile, se tale orientazione è possibile.

Il corretto orientamento è fondamentale per effettuare l'eventuale *offset* del sistema discreto di partenza<sup>26</sup>. Rispetto alle superfici NURBS, le *mesh* risultano facilmente gestibili e possono essere oggetto di scambio tra diversi *software*. Diverse applicazioni pratiche hanno richiesto lo sviluppo di appositi algoritmi e processi di *remeshing* delle superfici<sup>27</sup>.

Il *Paneling* di superfici complesse presuppone la padronanza di potenti *software* computazionali e la consapevolezza dei principi di base degli appositi al-

23 Fantini 2009, p. 60.

24 Hambleton 2009, pp. 1-2.

25 Fantini 2009, p.72.

26 Schiffner 2007, p. 18.

27 *Ibidem*, p.15.

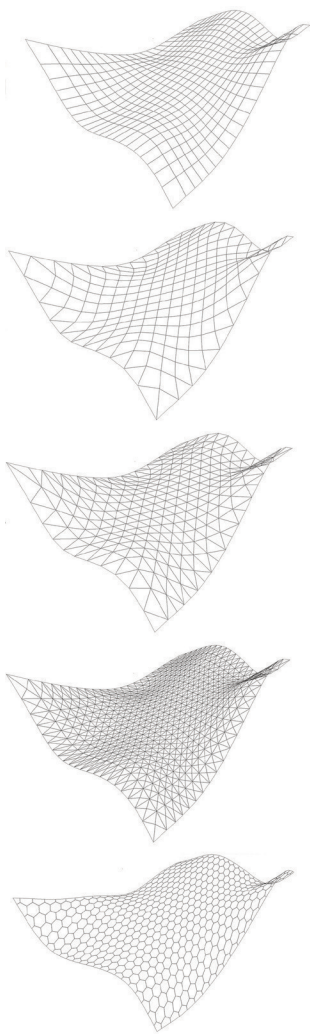


Fig. 6/ Tipi di tassellazioni disponibili in *LunchBox* (*Grasshopper*). A meno dei pattern triangolari le celle distribuite sono sghembe. (Figure dell'autore).

28 Basso 2012, pp. 109-112.

29 *Food4Rhino. Apps for Rhino and Grasshopper*, <http://www.food4rhino.com/project/lunchbox?etx>

goritmi esistenti. La configurazione finale potrà essere di tipo ottimale o sub-ottimale in base al livello di approssimazione con cui i requisiti prefissati saranno soddisfatti<sup>28</sup>. Esistono diversi *tools* per la tassellazione delle superfici complesse, tra cui i *plug-in* di *Rhino Paneling Tools* ed *Evolute Tools Lite/Pro*, *Lunch Box* e l'*add-on* di *Grasshopper* creato da Nathan Miller nel 2012<sup>29</sup>. *Paneling Tools* è un *plug-in* di *Rhino* realizzato per la pannellizzazione di superfici e poli-superfici NURBS: genera *pattern* di celle 2D e 3D distribuendoli su griglie rettangolari e razionalizza le geometrie complesse in un formato adatto all'analisi ed alla fabbricazione. È uno strumento che si integra perfettamente con *Rhino* ed è ampiamente utilizzato nell'ambito della progettazione architettonica.

Tuttavia, l'applicazione di questi *tools*, escludendo il caso delle tassellazioni triangolari, non consente la distribuzione di elementi piani sulla superficie di input, ma si limita a generare una rete poligonale sulla stessa, i cui elementi presentano la forma geometrica e le modalità distributive desiderate, ma i cui bordi sono gli spigoli di figure sghembe.

Le curve che costituiscono la griglia di base utilizzata da questi *tools* per distribuire i pannelli sono le curve iso-parametriche della superficie di riferimento.

In *Lunch Box*, ad esempio, sono disponibili diversi tipologie di *texture*: tre tipi di *pattern* triangolari equilateri, rettangoli ed isosceli (*Type A*, *Type B* e *Type C*), diversi tipi di *pattern* quadrangolari (*Quad grids*, *Diamonds* e *Staggered quad*), ed il *pattern* esagonale, *Hexagon cells* che, a differenza dagli altri due, consente di distribuire una maglia costituita dai bordi di celle esagonali sghembe, ma non di porzioni di superfici, che siano esse piane o curve (fig. 6).

È importante distinguere gli algoritmi che consentono la distribuzione di celle e tasselli da quelli che consentono la suddivisione iterativa degli elementi. Il raffinamento delle *mesh* è il prodotto dell'applicazione reiterata di



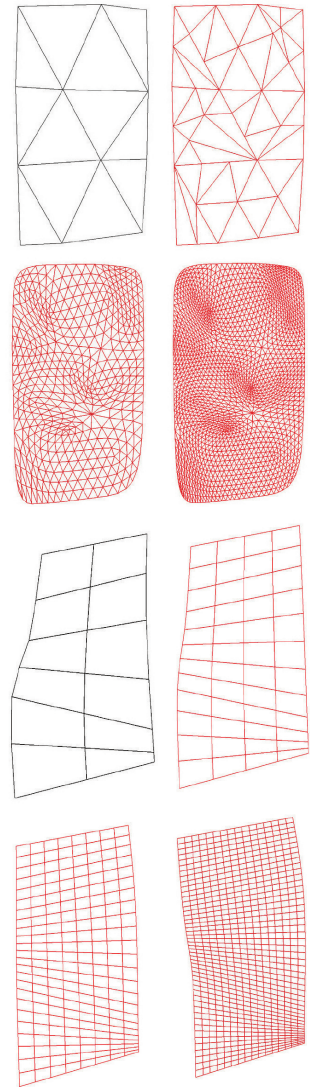
specifici algoritmi di suddivisione a loro volta divisi in algoritmi approssimanti ed algoritmi interpolanti. Grazie all'applicazione di tali algoritmi, una superficie poliedrica o anche definita *coarse mesh* o *mesh "grezza"*, tende ad una superficie limite: per questa ragione essi vengono definiti anche "approssimanti"<sup>30</sup>.

L'*add-on Weavebird* di *Grasshopper* dispone di una serie di algoritmi che permettono di suddividere iterativamente i poligoni estratti generando una griglia sempre più fitta che, nella condizione limite, tende ad una superficie continua.

*Weavebird* è un *topological mesh editor* creato da Giulio Piacentino nel 2009, ed in quanto tale contiene molti dei noti algoritmi di suddivisione e di trasformazione di maglie geometriche. È possibile raggiungere risultati analoghi attraverso l'opzione *et\_Subdivide* del *plug-in Evolute Tools Pro (Rhino)*. Tra gli algoritmi che consentono il raggiungimento di tale scopo è possibile citare l'algoritmo di suddivisione *Catmull-Clark*, il cui nome deriva dai due matematici Edwin Catmull e Jim Clark, per la suddivisione dei bordi di celle quadrilatere, e l'algoritmo di suddivisione *Loop*, dal nome del matematico Charles Loop che ideò il primo schema per la suddivisione dei bordi di celle triangolari. Mediante l'algoritmo *Catmull-Clark* ogni bordo della rete quadrangolare viene poi ulteriormente suddiviso in due parti introducendo un nuovo bordo a partire dal punto medio dei bordi già esistenti. La rete risultante è sempre costituita da quadrilateri (fig. 7).

Analogamente, la maglia risultante dall'applicazione ricorsiva dell'algoritmo di suddivisione *Loop* è sempre costituita da facce triangolari (fig. 8).

Inoltre, tra gli algoritmi di suddivisione ad oggi disponibili, i *remeshing operators* rappresentano degli utili strumenti di generazione ed ottimizzazione di mesh duali<sup>31</sup>. Tra i *pattern* geometrici esistono dei rapporti di dualità, cioè dei rapporti di complemen-



Figg. 7, 8/ Applicazione dell'algoritmo di suddivisione *Catmull-Clark* e *Loop* su mesh triangolare e quadrangolare. (Figure dell'autore).

30 Fantini 2012, p.76.

31 Tonelli 2012, p. 10.

tarietà e di dipendenza tra due tassellazioni rispetto ai quali è possibile ricavare un *pattern* a partire da un altro. «Un reticolo duale è un reticolo che si ottiene congiungendo i centri dei poligoni di un reticolo dato. Mentre le aste di un reticolo definiscono la regione, quelle del suo reticolo duale ne definiscono la superficie per nodo»<sup>32</sup>.

Per comprendere il significato geometrico dei rapporti di dualità è possibile definire le tre diverse tipologie di regioni monoedrali scelte attraverso il simbolo di Schläi ( $n;m$ ):  $n$  rappresenta il numero dei lati di ciascuna faccia ed  $m$  rappresenta la valenza dei vertici della rete. Pertanto, le tre regioni regolari sono esprimibili, secondo questo simbolo, come (3;6), (4;4) e (6;3). Il simbolo (3,6) rappresenta la tassellazione triangolare, il simbolo (4;4) quella quadrangolare e il simbolo (6;3) quella esagonale. Da queste relazioni è possibile rilevare, in maniera immediata, il rapporto di dualità che intercorre tra le regioni (3;6) e le regioni (6;3), ovvero sussiste una corrispondenza biunivoca tra le facce dei triangoli della prima regione ed i vertici della seconda, e viceversa. Ne consegue, quindi, che la regione (4;4) è autoduale<sup>33</sup>. Tra gli algoritmi duali è possibile citare *Dual Boundary*, o "contorno duale", del *plug-in Evolute Tools Pro* di *Rhino* (fig. 9).

Il terzo ed ultimo *step* riguarda la planarizzazione degli elementi sghembi distribuiti sulla superficie. La planarizzazione di una superficie complessa con elementi piani esagonali e quadrangolari è geometricamente più difficile da gestire rispetto ai più immediati processi di triangolazione. Non è immediato individuare un piano passante per un numero di punti pari a quattro o a sei, come invece sempre accade per tre punti comunque distribuiti nello spazio. Nel caso delle superfici complesse, la planarizzazione delle celle di una *mesh* genera un'approssimazione formale tra la superficie di partenza ed il sistema

32 De Plaisant 1982-87, p.168.

33 *Ibidem*, p.10.



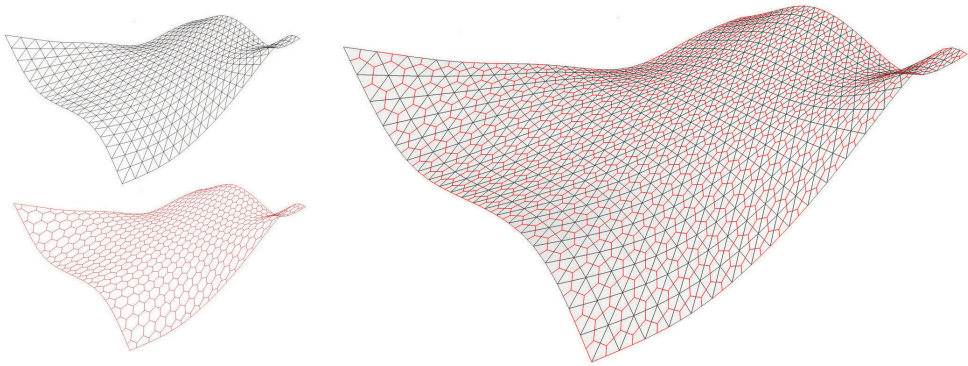


Fig. 9/ Applicazione dell'algoritmo *Dual Boundary* (*Evolute Tools Pro*) su una *mesh* triangolare (*Lunch Box-pattern Triangle C*) con conseguente distribuzione del *pattern* duale esagonale. (Figure dell'autore).

discreto corrispondente, oltre che l'inevitabile deformazione degli elementi che compongono la tassellazione. Per rendere complanari un numero di punti (superiore a tre) distribuiti su una superficie complessa è necessario "perturbare" gli stessi affinché essi si ridistribuiscono secondo una nuova condizione di equilibrio. Affinché i tasselli siano piani è necessario che tale somma sia pari a  $360^\circ$ .

Pertanto, il problema della planarizzazione rappresenta un processo iterativo di ottimizzazione.

La soluzione automatica ed *open source* ad oggi disponibile è rappresentata dal componente *Planarize*, appartenente al sistema di forze fisiche virtuali dell'*add-on Kangaroo Physics* di *Grasshopper*<sup>34</sup>. *Kangaroo Physics* è stato messo a punto da Daniel Piker nel 2011, ed è un motore virtuale che consente la simulazione interattiva di forze fisiche applicate alle geometrie di *input*. Unito all'*add-on Weavebird*, esso consente di discretizzare un sistema continuo in un sistema discreto elastico composto da un numero finito di elementi puntuali mutuamente connessi mediante elementi lineari elastici.

Data una geometria NURBS si procede alla sua discretizzazione in sotto-elementi, nello specifico in punti e segmenti se l'elemento di partenza è una curva, ed in punti e curve se l'elemento di partenza è una superficie: da ciò deriva automaticamente

34 Team per lo sviluppo di *Kangaroo* (app for *Grasshopper*): Robert Cervellione, Giulio Piacentino e Daniel Piker - <http://www.food4rhino.com/project/kangaroo?etx>

che le curve sono convertite in polilinee, mentre le superfici sono convertite in *mesh*. Il sistema discreto, attraverso l'apposito componente *spring* ("molla") viene trasformato in un sistema elastico. Il comportamento elastico assunto dagli elementi di connessione è descritto dalla legge di Hooke<sup>35</sup>, per cui per ognuno di tali elementi-molla è possibile indicare la lunghezza di riposo iniziale ed impostare un valore di rigidità<sup>36</sup>. I materiali per i quali la legge di Hooke rappresenta un'utile approssimazione del comportamento reale sono detti materiali elastico-lineari.

Il modello classico di elasticità lineare è la molla perfetta o ideale, cioè una molla priva di peso, di massa, in assenza di attrito e di altri fenomeni dissipativi. È interessante, ai fini della comprensione del funzionamento di tale componente, sottolineare che tale legge fu formulata nel 1675 da Robert Hooke, nella forma dell'anagramma latino "*ceiinossttuv*", la cui soluzione fu pubblicata da Hooke nel 1678 come "*Ut tensio, sic vis*", che significa "come l'estensione, così la forza", cioè l'allungamento  $d$  prodotto nella molla è direttamente proporzionale alla forza  $F$  impressa<sup>37</sup>:

$$F = kd$$

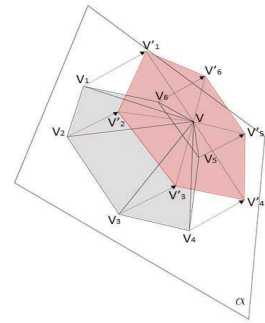
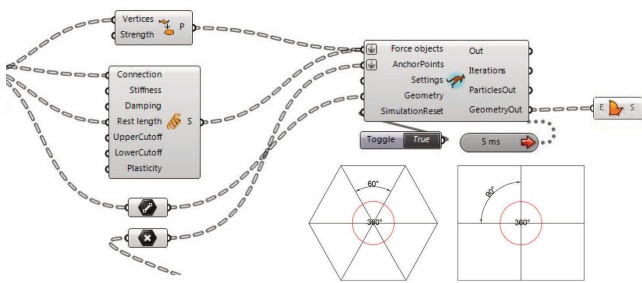
È necessario ancorare il sistema da sottoporre alla simulazione attraverso l'individuazione di specifici *anchor point*, o punti di ancoraggio, appartenenti alla *mesh* estratta e che rimangono fissi durante la simulazione o "perturbazione" del sistema.

Durante tale fase tutti i punti, a meno di quelli vincolati, cambiano posizione in seguito all'azione della forza di planarizzazione che determina lo spostamento degli elementi. L'algoritmo planarizza il bordo degli elementi distribuiti sulla superficie perturbando i vertici delle celle alla ricerca della somma, pari a 360°, degli angoli interni al poligono (fig. 10).

35 In meccanica dei materiali, la legge di Hooke è la più semplice relazione costitutiva di comportamento dei materiali elastici. Essa afferma che l'allungamento subito da un corpo elastico è direttamente proporzionale alla forza ad esso applicata. La costante di proporzionalità viene detta costante elastica e dipende dalla natura del materiale stesso.

36 Pugnale 2014, pp. 353-359

37 La costante  $k$  rappresenta il coefficiente elastico della molla, espresso in N/m.



A tal proposito sono state eseguite una serie di prove applicando i componenti per la suddivisione e la planarizzazione forniti dai *plug-in* di *Rhino*, *Grasshopper* (*Lunch Box*, *Kangaroo Physics*) ed *Evolute Tools Pro* (*et\_Subdivide*, *et\_Planarize*) su una superficie con una forte variazione di curvatura. Il *plug-in Evolute Tools Pro (Rhino)*, consente l'utilizzo dell'algoritmo *et-Planarize*, grazie al quale è possibile planarizzare quadrilateri ed esagoni sghembi distribuiti sulla superficie. Le figure riportate nella tabella seguente mostrano il diverso grado di planarità e la deformazione dei pannelli esagonali dovuti alla variazione della curvatura della superficie e derivanti dagli step di planarizzazione. I grafici mostrano la distribuzione dei *pattern* e la relativa analisi del grado di *planarity*, cioè della planarità di ogni singolo elemento, e della *closeness*, cioè della maggiore o minore distanza della *mesh* dalla superficie curva di riferimento (fig. 12). Questi due strumenti rappresentano un mezzo diagnostico utile per confrontare un sistema continuo con il corrispondente sistema discreto. Il grado di planarità di un elemento viene misurato in base a due criteri: la massima differenza di angolo in gradi tra la somma dei quattro angoli interni di ciascun elemento e  $2\pi$  (quindi tale differenza è pari a zero se gli elementi sono planari e convessi) e la distanza massima calcolata tra le diagonali delle facce<sup>38</sup>. I grafici derivanti dall'applicazione del *tool* di analisi *planarity* di *Evolute Tools Pro*, esprime il grado

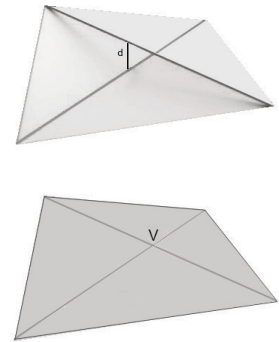


Fig. 10/ Definizione *visual scripting* per la planarizzazione di celle poligonali sghembe distribuite su superfici curve. Tra gli studiosi alla ricerca di una soluzione a questo problema Daniel Picker è autore di diverse definizioni *open source* disponibili su *Rhinoceros Forum (Grasshopper, Kangaroo Physics)*. La ricerca di soluzioni per l'ottimizzazione del processo è in corso. Le figure in colonna mostrano le condizioni di non planarità di celle esagonali e quadrangolari (distanza tra le diagonali) distribuite su superfici a doppia curvatura complesse. (Rielaborazione dell'autore).

38 Yang et al. 2011, p.2.

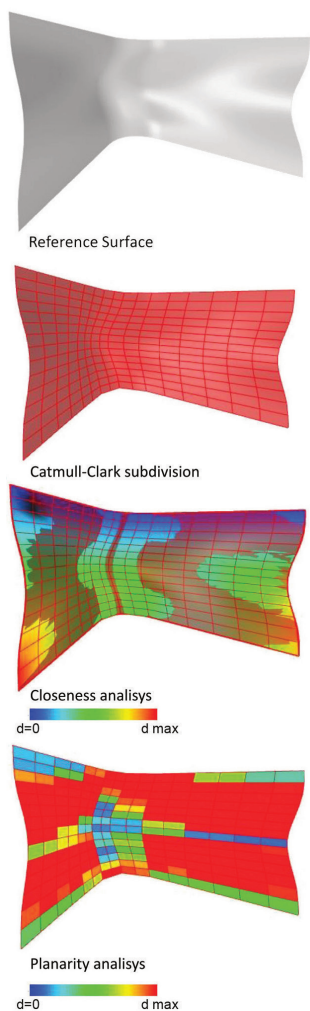


Fig. 11/ Analisi della planarity e della closeness (*Evolute Tools Pro*) di una mesh quadrangolare distribuita su una superficie a doppia curvatura variabile. La figura mostra che quasi tutte le celle sono sghembe. (Elaborazione dell'autore).

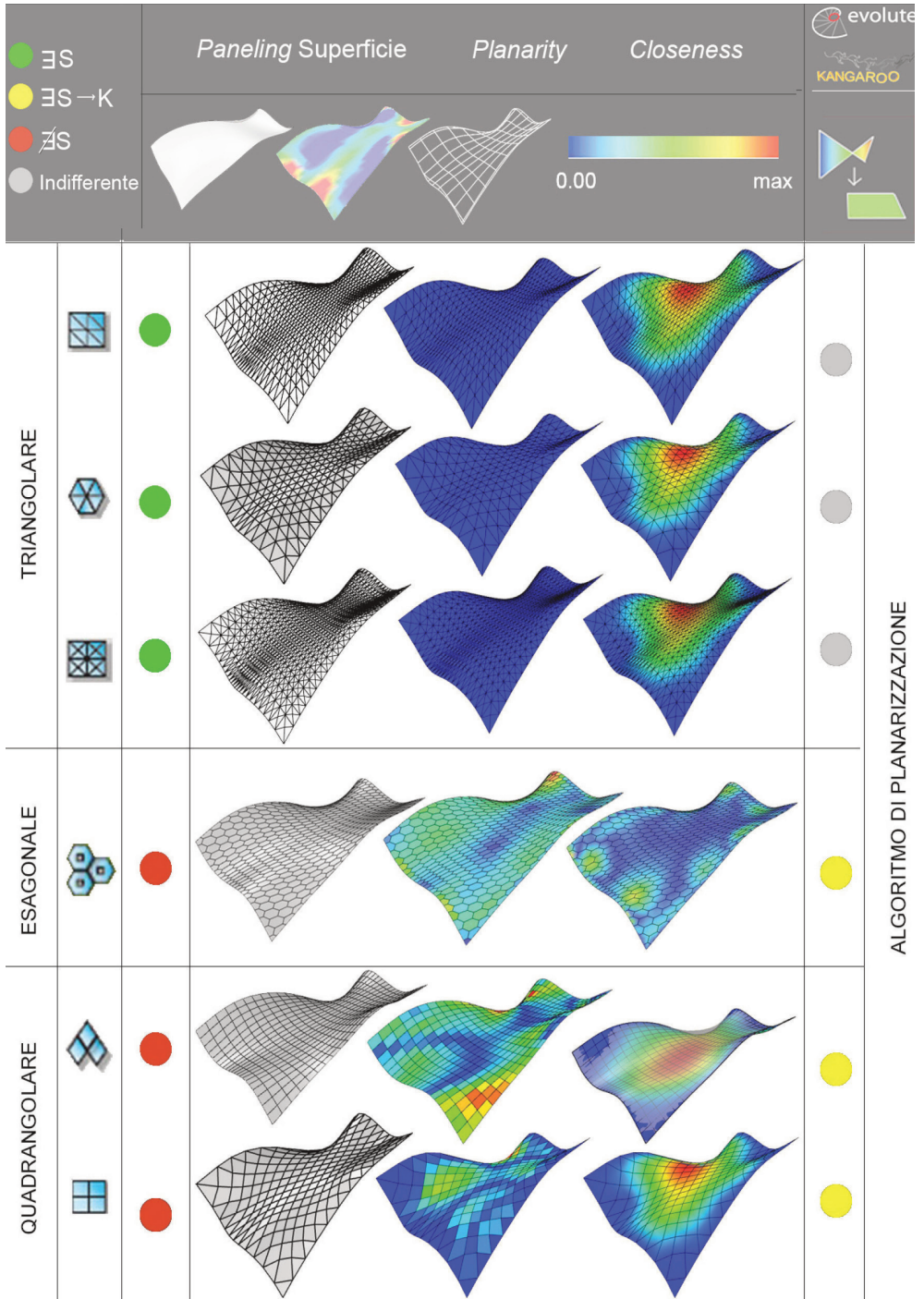
39 “*Is planar*” è un component di *Grasshopper* che consente di verificare se una superficie è piana, mentre il componente “*Planarity display*” mostra il livello di planarità di una superficie.

40 Baglioni 2009, pp. 348-350.

di planarità di una faccia procedendo alla colorazione graduale dei tasselli dal colore rosso a quello blu: il primo colore indica una maggiore distanza tra le diagonali del tassello quadrangolare, mentre il secondo colore indica che tale distanza è nulla (fig. 11). È possibile effettuare tale analisi anche utilizzando degli specifici componenti *open source* di *Grasshopper*<sup>39</sup>. Un altro strumento di analisi che è molto utile adoperare per controllare la qualità della tassellazione di una superficie è *closeness*, letteralmente “vicinanza”, attraverso cui è possibile mostrare il grado di approssimazione esistente misurato calcolando la distanza tra i punti della superficie curva di riferimento ed i punti del sistema discreto computato: il passaggio dal colore blu al colore rosso indica l'aumento del valore legato al parametro.

### **Pattern triangolare**

In architettura, la tassellazione di superfici curve con elementi triangolari piani rappresenta la tecnica di discretizzazione più antica ad oggi ancora ampiamente utilizzata. Per tre punti comunque distribuiti nello spazio è sempre possibile individuare un piano: è evidente che tale tecnica fornisce sempre una soluzione. Il metodo più immediato è quello di suddividere le celle individuate dalle reti di curve di una superficie (iso-curves, linee di curvatura principale, etc.) mediante il tracciamento delle diagonali. Inoltre, come mostrato, i citati *plug-in Paneling Tools* e *Lunch Box* (*Grasshopper*) di *Rhino* consentono la distribuzione automatica di tale *pattern* su qualsiasi tipo di superficie. È interessante approfondire l'argomento soprattutto introducendo l'uso di specifici algoritmi impiegati per l'ottimizzazione delle *mesh* triangolari in funzione della curvatura delle superfici. A tale scopo, appare utile ed opportuno citare il contributo *Discretizzazione delle superfici continue per mezzo di superfici poliedriche* di Leonardo Baglioni<sup>40</sup>.



ALGORITMO DI PLANARIZZAZIONE



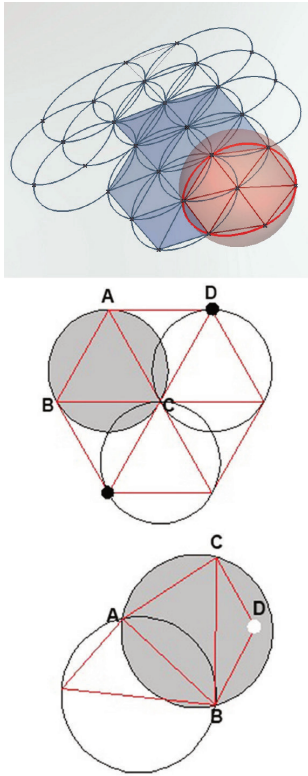


Fig. 12/ A pagina precedente: tabella riassuntiva dell'analisi della *closeness* e della *planarity* dei *pattern* poligonali regolari. I colori mostrano che le celle esagonali e quadrilateri sono sghembe. (Figura dell'autore).

Fig. 13/ *Sphere Packing* su superficie complessa. (Rielaborazione dell'autore).

Fig. 14/ Verifica della corrispondenza della triangolazione di Delunay. (Rielaborazione dell'autore).

Fig. 15/ Condizione di *Perfect Sphere Packing* su una superficie a doppia curvatura generica. (Rielaborazione dell'autore).

Data una superficie complessa  $s$ , consideriamo un punto  $P$ , ad essa appartenente, e costruiamo una sfera avente centro in  $P$ . Una volta individuata la curva  $c$  di intersezione tra la sfera e la superficie è possibile dividere la stessa in sei parti e tracciare i sei raggi ottenuti congiungendo i punti individuati sulla curva con il centro della sfera. Si ottengono così sei triangoli equilateri, ed iterando il processo per tutti i vertici dei triangoli progressivamente individuati si ottiene la suddivisione della superficie in elementi regolari (fig. 14). Tuttavia, la dimostrazione viene conclusa affermando che «comunque, la discretizzazione è strettamente legata alle caratteristiche geometriche della superficie di origine<sup>41</sup>». Infatti, nonostante l'alta flessibilità di questo *pattern* esistono delle precise condizioni geometriche che hanno una notevole influenza sulla creazione delle maglie triangolari. Ad esempio, la presenza di punti di singolarità sulla superficie di *input* determina la variazione della valenza dei vertici, o nodi, appartenenti ad una triangolazione e coincidenti con quegli stessi punti. In tal caso la valenza assume un valore maggiore o minore di sei. Lo svantaggio è notevole, soprattutto se tale *mesh* rappresenta la base per effettuare una successiva tassellazione esagonale della superficie<sup>42</sup>. Affinché gli elementi triangolari che compongono la *mesh* siano tutti uguali tra loro ed uniformemente distribuiti è necessaria l'applicazione di algoritmi in grado di veicolare tale regolarità. Il criterio di *Delunay*, rappresenta il principio matematico generale più sfruttato in fase di *remeshing* per ottimizzare una *mesh* triangolare che presenta una bassa regolarità della distribuzione e della geometria degli elementi che la compongono<sup>43</sup>. Secondo il criterio di *Delunay*, dato un insieme di triangoli, possiamo inscrivere un qualsiasi elemento triangolare  $ABC$  in una circonferenza, ma ogni punto  $D$  dei triangoli adiacenti che hanno almeno un segmento

41 *Ibidem*.

42 Nieser et al. 2012, p. 865.

43 Baglioni 2009, p. 406.

in comune con il triangolo  $ABC$  deve essere esterno alla circonferenza in oggetto<sup>44</sup>. La condizione perfetta è verificata nel momento in cui le circonferenze con centro nei vertici dei triangoli sono mutuamente tangenti. Si osservi che questa distribuzione consente di individuare in maniera diretta, raccogliendo i gruppi di sei triangoli aventi un unico vertice in comune, il profilo perimetrale di un esagono convesso (fig. 15). La triangolazione di *Delunay*, inoltre, è duale del diagramma di *Voronoi*, una tra le tassellazioni più importanti di reticoli non regolari diffusi in natura, che prende il nome dal matematico russo George Voronoi<sup>45</sup>. A partire dagli anni '80, grazie agli studiosi Charles Lawson e Dave Watson, tale criterio è stato utilizzato per ottimizzare la triangolazione di vertici distribuiti nello spazio. Analogamente a quanto accade nel piano, affinché una triangolazione segua il principio di *Delunay*, ogni vertice o nodo della maglia triangolare, in seguito all'ottimizzazione, non dovrà essere contenuto all'interno di una sfera circoscritta all'elemento triangolare adiacente<sup>46</sup>. Per comprendere il processo di ottimizzazione di una maglia triangolare basato sulla distribuzione di sfere su una superficie è doveroso richiamare la configurazione *DYMAXION* (*Dynamic Maximum Tension*), principale oggetto di studio di Fuller legato alle relazioni sinergiche. Mediante tale configurazione il raggiungimento delle condizioni di equilibrio è reso possibile grazie ad una distribuzione densa e compatta di sfere, nota come *close packing*, o "impacchettamento" (fig. 18). Tale distribuzione è tipica delle strutture atomiche: «quando le sfere vengono accostate nel modo più denso attorno ad un nucleo centrale, compaiono delle regolarità strutturali. La disposizione di sfere aventi lo stesso raggio e mutuamente tangenti attorno ad un vuoto centrale coincide prima con l'icosaedro, poi con l'ottaedro ed infine con il tetraedro, cioè con i poliedri regolari costituiti da

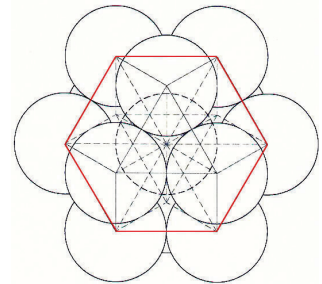
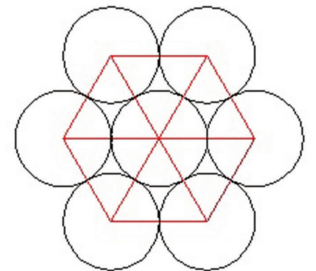
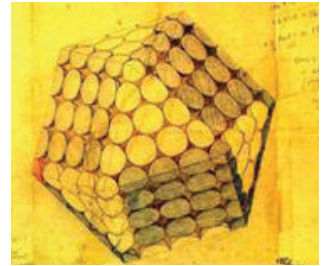


Fig. 16/ R.B.Fuller, Dymaxion. Rossi 2009.

Fig. 17/ Triangolazione di Delunay. (Elaborazione dell'autore).

Fig. 18/ Sphere Packing. (Elaborazione dell'autore).

44 Ciammaichella 2012, p. 305

45 La tassellazione di Voronoi non è stata indagata all'interno di questo studio: lo scopo della ricerca di gestire la discretizzazione delle superfici complesse attraverso reticoli regolari.

46 Nieser 2012, *Op. cit.*, p. 865

47 Baglioni 2009, p.359.

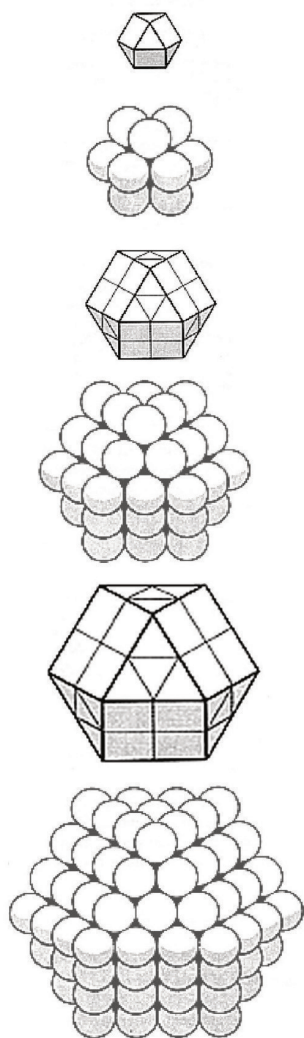


Fig. 19/ La configurazione Dymaxion consente il raggiungimento delle condizioni di equilibrio grazie ad una distribuzione densa e compatta di sfere o *Close Packing*.  
Fonte: synchronofile.com.

sole facce piane equilatera<sup>47</sup>». Richiamando i principi teorici introdotti, per comprendere in che modo questi algoritmi ottimizzano una *mesh* triangolare, è significativo esplicitare la condizione per cui i triangoli che compongono tale maglia siano legati a sfere distribuite in maniera tale da essere il più possibile mutuamente tangenti ed uguali tra loro. L'algoritmo di ottimizzazione *Ball Packing*<sup>48</sup>, la cui applicazione è resa disponibile da *Evolute Tools Pro (Rhino)*, attraverso successive operazioni tende a regolarizzare una *mesh* a maglia triangolare: i singoli triangoli tenderanno ad essere il più possibile equilateri. L'algoritmo mira a computare la creazione di sfere con centro nei vertici della maglia triangolare di partenza. Tendere ad un modello perfetto di *Sphere Packing* significa imporre che la distanza tra tali sfere diminuisca sempre di più, fino ad annullarsi: le sfere diventeranno così mutuamente tangenti. Si ritiene utile, per comprendere meglio il funzionamento di tale algoritmo, indagare cosa accade alla base di un processo *Circle Packing*, il quale consente la discretizzazione di una superficie complessa in una *mesh* composta da facce circolari piane tangenti. L'algoritmo ottimizza la geometria e la distribuzione dei triangoli che compongono la maglia di partenza, i cui vertici rappresentano i centri delle circonferenze. Attraverso l'ottimizzazione della distribuzione dei cerchi sulla superficie è automaticamente possibile migliorare la distribuzione dei triangoli di partenza, in maniera che essa tenda al criterio di Delunay. Gli studi condotti da Mathias Hobinger e raccolti in *Packing circles and spheres on surfaces*<sup>49</sup>, realizzato in collaborazione con Helmut Pottmann, risultano utili per la comprensione del processo. Il *Circle Packing*, anche noto come *Koebe-Andreev-Thurston theorem*, è stato introdotto, nel 1930, da Paul Koebe, matematico tedesco del XX secolo, che ne dimostrò l'esistenza per la sfera e per il piano<sup>50</sup>. William Paul Thurston, matematico statunitense e E.M. Andreev ne ripresero

48 Liu et al. 2008, pp 439-447.

49 Hobinger 2014.

50 Cfr. Papadopoulos 2009, p 30.



le ricerche nel 1970<sup>51</sup>. Nel 1985, Thurston definì il *Circle packing* individuando le relazioni gerarchiche che ne determinano la struttura, le quali sono basate su delle continue relazioni di tangenza. Il modello del *Circle Packing* si basa sull'individuazione di triple di cerchi tangenti: ogni tripla formerà un interstizio triangolare curvilineo. Le triple sono, a loro volta, collegate tra di loro da coppie di cerchi, e ciò consente la distribuzione del *pattern*. I cerchi che compongono una tripla sono definiti "petali", e la tripla, a sua volta, è definita "fiore". Il grado definitivo di un cerchio sarà pertanto dato dal numero dei petali del fiore di cui esso rappresenta il centro.

Per i cerchi posti sul bordo di una superficie non è, dunque, possibile completare il fiore (fig. 19).

Quindi, una configurazione di cerchi tangenti può essere considerata una struttura di tipo *Circle Packing* se, e solo se, ogni cerchio che gli appartiene è dotato di petali. Se i raggi di tre cerchi tangenti sono uguali tra loro, lo spazio triangolato, i cui vertici rappresentano il centro delle sfere, sarà contenuto in un unico grande cerchio esterno. Un *Circle Packing* è, inoltre, localmente definito monovalente se le facce composte dal fiore di ogni cerchio non sono sovrapposte. Dunque, appare ora più immediato e semplice definire una triangolazione attraverso la considerazione della sua controparte circolare: ogni vertice rappresenta il centro di un cerchio, ogni bordo tra i vertici rappresenta un segmento tangente tra due cerchi e ogni faccia rappresenta una tripla di cerchi.<sup>52</sup> Affinché l'algoritmo possa distribuire dei cerchi (o delle sfere) che siano mutuamente tangenti o che tendano a tale condizione, è necessario il ricorso alla regola matematica dei coseni<sup>53</sup>.

La regola determina una ridistribuzione dei triangoli calcolando, volta per volta, la posizione, in termini di mutua distanza, delle sfere: ciò risulta particolarmente utile nei casi di superfici complesse per le

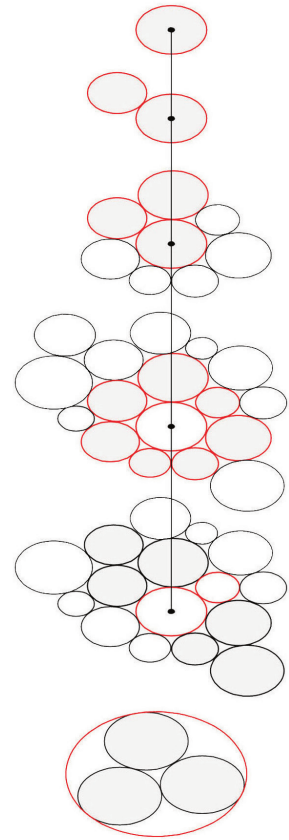


Fig. 20/ Modello *Circle Packing* basato sull'individuazione di triple di cerchi tangenti. (Rielaborazione dell'autore).

51 Cfr. *Ibidem*.

52 Hobinger 2014.

53 Gli algoritmi *Circular* o *Spherical packing*, computano il risultato basandosi sulla legge dei coseni.

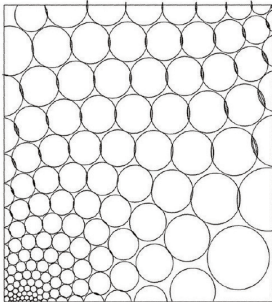
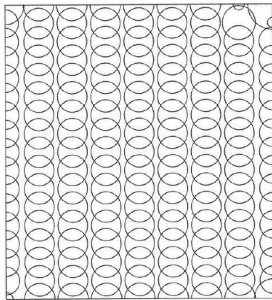
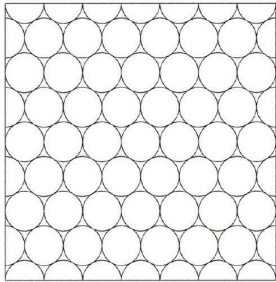


Fig. 21/ Applicazione dell'algoritmo di ottimizzazione *Ball Packing* su diversi pattern triangolari. La *mesh*, in seguito all'ottimizzazione del pattern, subisce delle trasformazioni. (Elaborazione dell'autore).

quali la distribuzione di triangoli equilateri è particolarmente difficile da raggiungere<sup>54</sup>.

L'algoritmo inserisce un cerchio in un punto arbitrario e procede con la distribuzione dei restanti cerchi. Il tipo e la qualità della triangolazione di partenza influisce sull'ottimizzazione del risultato<sup>55</sup>. Nel passaggio dal *Circle Packing* allo *Sphere Packing*, o *Ball Packing*, la bidimensionalità delle circonferenze distribuite sulla superficie e legate alla maglia triangolare cede il passo alla tridimensionalità delle sfere mantenendo inalterati i principi di base. Le teorie consolidate su tale processo e le sperimentazioni condotte all'interno di questa trattazione indicano che il *Ball Packing* raggiunge buoni risultati sul piano e sulla sfera, ma soluzioni incomplete per quanto riguarda le superfici *free form*. La presenza di bordi, l'imposizione di vincoli e la variazione della curvatura impediscono la ridistribuzione regolare dei triangoli sulla superficie e comportano la creazione di sfere per le quali la condizione di tangenza è difficilmente raggiungibile, come dimostrato soprattutto lungo i bordi. L'algoritmo *Ball Packing* è stato applicato su due tipi di triangolazioni differenti distribuite su una superficie piana e su una superficie a doppia curvatura, entrambe soggette a diverse condizioni di vincolo. Nel primo caso l'algoritmo è stato applicato su una *mesh* triangolare la cui distribuzione segue il criterio di Delunay. Nel secondo caso si procede alla suddivisione della superficie in quadrilateri mediante l'applicazione dell'algoritmo *Catmull-Clark* e le celle vengono ulteriormente suddivise tracciandone le diagonali: ciascuno degli elementi sarà suddiviso in due elementi triangolari<sup>56</sup>. Inoltre, nel primo caso, è possibile osservare che le sfere computate dal *software* sono mutuamente tangenti e non necessitano di ulteriori *step* di ottimizzazione, come invece accade nel secondo caso (fig. 21). Anche nel caso di una superficie a doppia curvatura l'applicazione dell'algoritmo ha comportato la necessità di imporre delle condizioni di vincolo

54 Hobinger 2014.

55 *Ibidem*.

56 Per triangolare la superficie è stato utilizzato l'*add-on Lunch Box* di *Grasshopper*.

(punti e bordi della superficie o aderenza alla superficie) collegando la *mesh* alla superficie di riferimento: come mostrato dalle figure, le sfere tendono ad una condizione di mutua tangenza. Per ottimizzare la *mesh* triangolare in maniera tale che essa asseconi il più fedelmente possibile la superficie di riferimento è necessario sperimentare diversi valori, scelti arbitrariamente in base all'osservazione dei risultati ricavati, per il controllo della *closeness curvature*, cioè del parametro che indica il grado di approssimazione, o la "vicinanza", tra la *mesh* e la superficie di riferimento. Le deformazioni subite dalle *mesh* di partenza in seguito all'ottimizzazione suggeriscono la possibilità di lavorare con delle maglie di *input* di dimensioni superiori rispetto a quelle delimitate dai bordi della superficie che si intende suddividere, in maniera tale che le porzioni di *mesh* in eccesso possano assorbire, nella ricerca di regolarità degli elementi triangolari, le deformazioni della maglia stessa. Ciò impedisce la perdita di controllo del risultato formale finale e della coerenza progettuale, in quanto le lunghezze di partenza dei bordi della rete sono gestite preventivamente dal progettista in funzione della variazione che subiranno<sup>57</sup>. Grazie all'esistenza di appositi *tools*, l'ottimizzazione di una tassellazione (indipendentemente dal *pattern*) può essere gestita lavorando sulla ricerca della complanarità, o allineamento, dei vertici distribuiti lungo una stessa curva, o polilinea, della maglia. In fase progettuale, ad esempio, è utile ricercare questa condizione lungo i solai di calpestio posti alle diverse quote di un manufatto architettonico per assicurare l'ancoraggio dei sistemi di facciata. Il *plug-in Evolute Tools Pro (Rhino)* consente, attraverso il comando *Coplanarity*, di distribuire i vertici delle maglie in maniera che essi siano complanari.

57 Basso 2012, p.159.

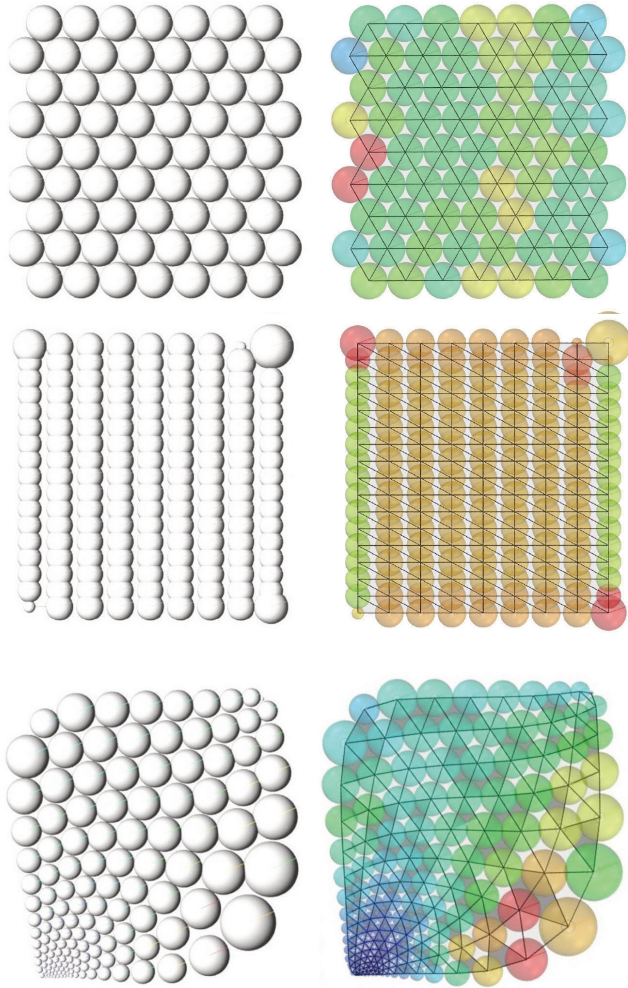
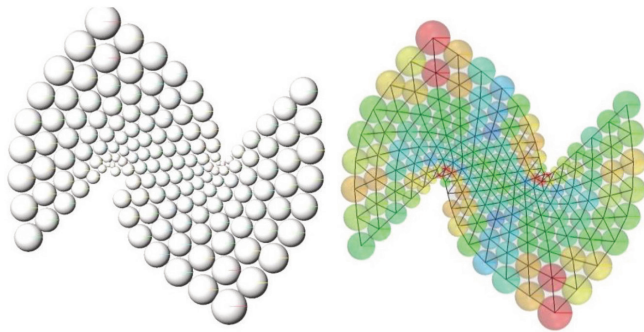


Fig. 22/ *Ball Packing (Rhino - Evolute Tools Pro)*: l'algoritmo distribuisce le sfere corrispondenti al *pattern* distribuito sulla superficie. Il criterio di Delunay è verificato dalla tangenza di tutte le sfere. Nel caso di una triangolazione ottenuta tracciando le diagonali di celle quadrilatera le sfere non sono mutuamente tangenti e il raggio delle sfere subisce maggiori deformazioni in corrispondenza degli spigoli. Un processo di ottimizzazione, in quanto tale, non raggiunge necessariamente una soluzione definitiva, ma tende progressivamente alla migliore soluzione possibile. (Elaborazioni dell'autore)



### Pattern esagonale

Le *mesh* esagonali, o *Hexagonal Mesh*, costituiscono uno schema di suddivisione innovativo, ancora poco sfruttato, eppure indubbiamente dotato di una considerevole quantità di ottime proprietà dal punto di vista strutturale, costruttivo ed estetico<sup>58</sup>. Le *mesh* esagonali sono più flessibili ed hanno migliori proprietà di approssimazione di una data superficie rispetto alle tassellazioni triangolari e quadrangolari<sup>59</sup>. La diffusione in natura del *pattern* esagonale dimostra che esso è anche particolarmente stabile dal punto di vista strutturale<sup>60</sup>. Queste sono le motivazioni che, in questi ultimi anni, spingono gli studi verso la ricerca di una soluzione per la discretizzazione di superfici complesse attraverso l'uso di *pattern* esagonali. Gli edifici le cui strutture presentano questo tipo di *pattern* sono chiamati "fullereni", denominazione derivante dalla chimica e che denota un gruppo di molecole di carbonio<sup>61</sup>. La regolarità geometrica del tassello esagonale, come anticipato, dipende strettamente dalla curvatura gaussiana della superficie su cui il *pattern* viene distribuito. Risulta che: se la curvatura gaussiana è positiva, l'esagono piano sarà convesso (fig. 23); se la curvatura gaussiana è negativa l'esagono sarà concavo, ed assumerà una conformazione "a farfalla" (fig. 24); infine, se la curvatura gaussiana è nulla, ovvero la superficie è rigata e sviluppabile, l'esagono degenera in un rettangolo (fig. 25).

Quindi, su una superficie a curvatura variabile sarà possibile ottenere contemporaneamente pannelli esagonali concavi e convessi. Gli algoritmi per la distribuzione di *pattern* esagonali sfruttano la relazione di dualità con il *pattern* triangolare. Ad esempio, nel caso specifico del *plug-in Evolute Tools Pro*, per distribuire una griglia di celle esagonali è necessario partire dalla creazione di una *mesh* a maglia triangolare.<sup>62</sup> È possibile dimostrare che gli elementi che compongono il *pattern* esagonale duale di una

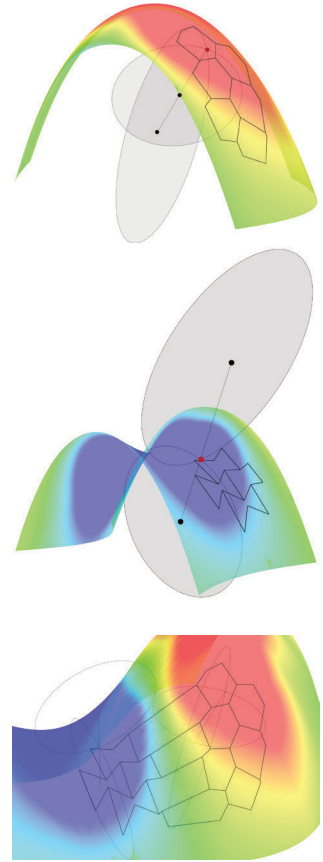


Fig. 23/ *Planar hexagonal paneling* di una superficie con  $K > 0$ : gli esagoni assumono una configurazione convessa (TPI, Troche 2008 - Elaborazione dell'autore).

Fig. 24/ *Planar hexagonal paneling* di una superficie con  $K < 0$ : gli esagoni assumono una configurazione "a farfalla". (TPI, Troche 2008 - Elaborazione dell'autore).

Fig. 25/ *Planar hexagonal paneling* di una superficie con  $K = 0$ : gli esagoni assumono una configurazione rettangolare. (TPI, Troche 2008 - Elaborazione dell'autore).

58 Cfr. Tonelli 2013.

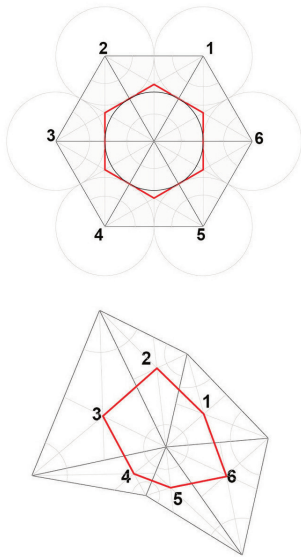
59 Cfr. *Ibidem*.

60 Cfr. Ball 2016.

61 Vytisková 2013, p. 46.

62 Pottmann 2013, p. 5.





Figg. 26, 27/ La regolarità geometrica del tassello esagonale, come anticipato, dipende strettamente dalla curvatura gaussiana della superficie su cui il *pattern* viene distribuito. (Rielaborazione dell'autore).

*mesh* triangolare strutturata seguendo il criterio di Delunay presentano una maggiore regolarità formale<sup>63</sup> (figg. 26, 27). Pertanto, ottimizzata la *mesh* triangolare, per generare una *mesh* esagonale è necessario ricorrere all'uso di un algoritmo di suddivisione duale, ad esempio *Dual Boundary*, di *Evolute Tools Pro*. È importante ricordare che la forma delle celle esagonali distribuite sulla superficie appare geometricamente regolare fino a quando esse sono ancora sghembe: i lati dell'esagono sono curvi e individuano una porzione di superficie a doppia curvatura. Se si considerano sei triangoli tra loro adiacenti e per ciascuno di essi si individua il baricentro, per la relazione di dualità esistente tra la maglia triangolare e quella esagonale, tali punti rappresenteranno i vertici di ciascuna delle celle esagonali<sup>64</sup>.

Come anticipato, se la *mesh* triangolare di partenza è estratta a partire dalla rete di linee di curvatura è importante che la superficie non presenti punti di singolarità, i quali causano una variazione della valenza  $m$  del nodo della maglia in quel punto ( $m \neq 6$ ): ne consegue che i tasselli duali non saranno esagonali, ma presenteranno un numero di lati maggiore o minore di 6, influenzando inevitabilmente la regolarità della maglia di *output* e quindi il grado di ottimizzazione del risultato complessivo. A tale proposito, sono stati sperimentati degli algoritmi di parametrizzazione globale della superficie, tra cui *Hexagonal global parametrization*, che attraverso operazioni di *remeshing* mira a controllare, in maniera automatica, la triangolazione della superficie, riducendo il numero dei punti di singolarità posti a distanza ravvicinata. L'algoritmo esegue un'operazione di *clustering*, o raggruppamento, dei punti di singolarità e mira a ridurne il numero di partenza: i punti tenderanno ad unificarsi, quando possibile, in un unico punto di singolarità, riducendo la presenza di tasselli irregolari<sup>65</sup>.

63 Vytisková 2012, p.43.

64 *Plug-in Evolute Tools Pro - Rhinoceros* (McNeel & Associates).

65 Nieser 2012, p.865.

Per raggiungere la planarità di ciascuno degli elementi esagonali l' algoritmo "perturba" i vertici delle celle alla ricerca della condizione di equilibrio tale che la somma degli angoli al centro dei sei triangoli attraverso cui è possibile suddividere ciascuno degli esagoni sia pari a  $360^\circ$ , riproponendo quindi la condizione geometrica per cui la somma degli angoli interni di un esagono piano è pari a  $2\pi$ . L'esistenza e la qualità del risultato sono legati alla curvatura della superficie (fig. 28).

Un altro algoritmo di planarizzazione del *pattern* esagonale, la cui descrizione è estremamente utile per comprendere le cause della deformazione degli elementi in funzione della curvatura della superficie, è il metodo *Tangent Plane Intersection*, meglio noto come metodo TPI. Nel 2008, Christian Troche presentò un metodo basato sulle reciproche intersezioni di piani tangenti alla superficie di cui si vuole eseguire la tassellazione denominato *Planar Hexagonal Meshes by Tangent Plane Intersection*<sup>66</sup>, per ottenere la distribuzione di maglie esagonali piane, da cui la denominazione di *Metodo dei Piani Tangenti*.

La forma degli esagoni dipende dal tipo di intersezione dei piani tangenti e dalla curvatura della superficie. Se, infatti, i piani tangenti sono tali da non intersecare la superficie allora sarà possibile ottenere un *pattern* composto da pannelli esagonali piani convessi, che richiamano la più nota e regolare struttura a "nido d'ape": ciò accade nei casi in cui la curvatura gaussiana è positiva<sup>67</sup> (fig. 29).

Se, al contrario, la curvatura gaussiana è negativa, i piani tangenti intersecheranno la superficie e ciò determinerà la distribuzione di elementi esagonali piani a "forma di farfalla" (fig. 30): i singoli elementi piani presenteranno un numero di lati pari a sei, ma perderanno la convessità tipica della configurazione "a nido d'ape". Le figure 29 e 30 descrivono i principi geometrici alla base dell'algoritmo TPI.

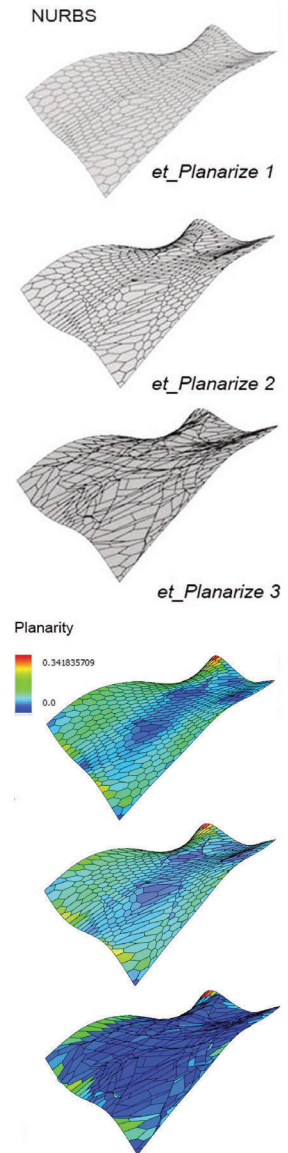
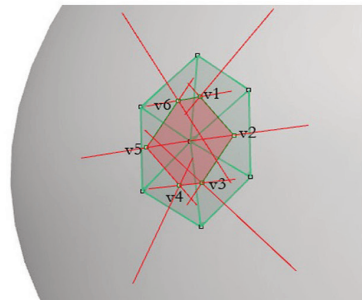
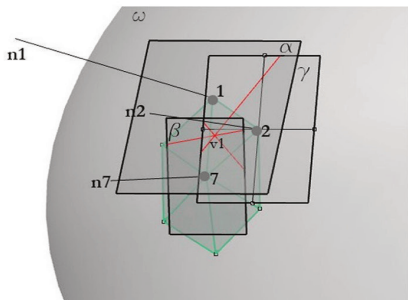
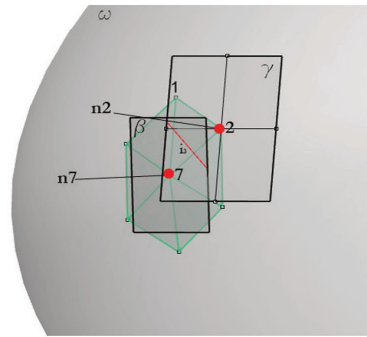
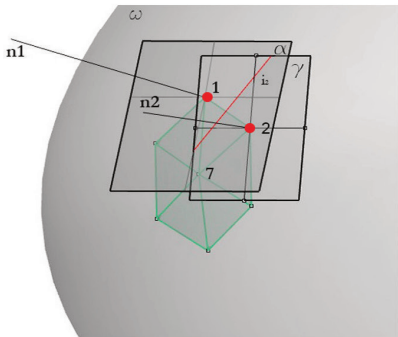
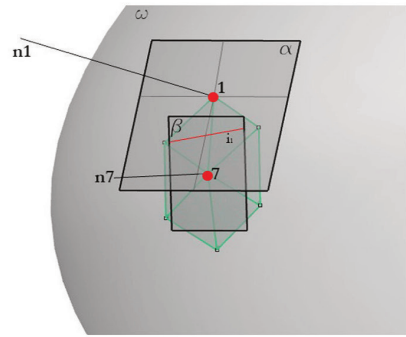
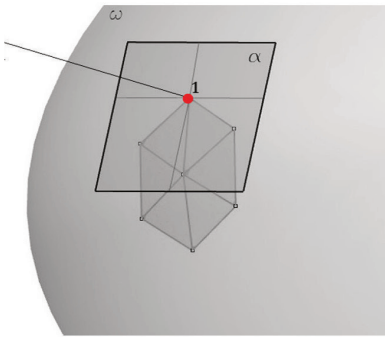
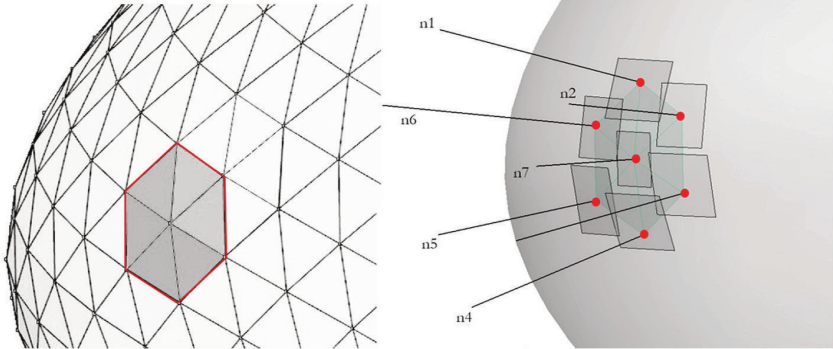


Fig. 28/La curvatura della superficie influisce sulla regolarità del pattern esagonale derivante dalla planarizzazione delle celle. La deformazione è proporzionale al grado di planarità del tassello. (Figura dell'autore).

66 Troche 2008, pp. 57-60.

67 Wang 2009.

# Shaping & Paneling





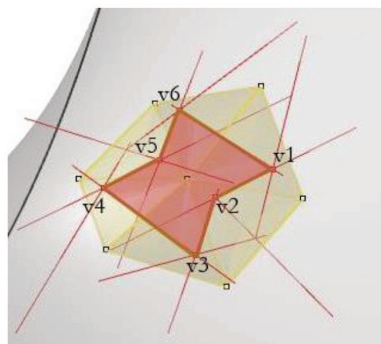
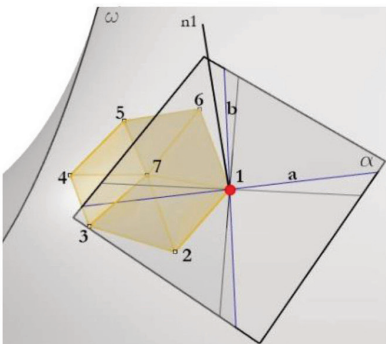
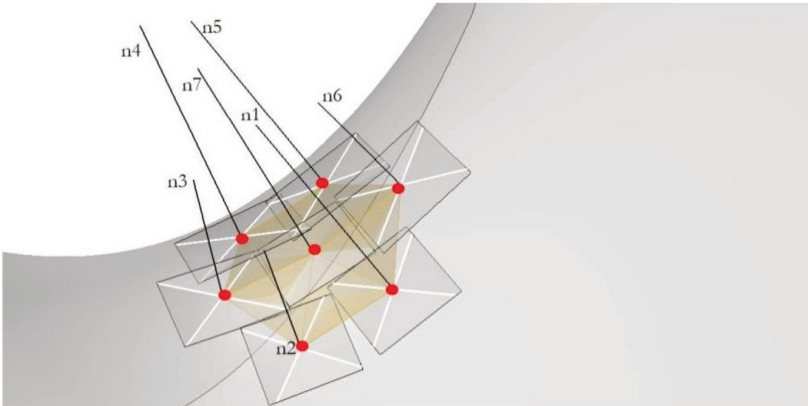
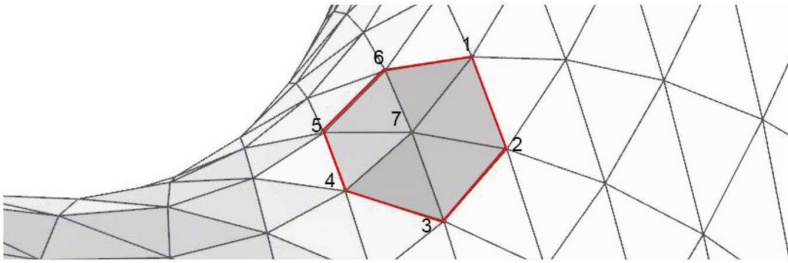
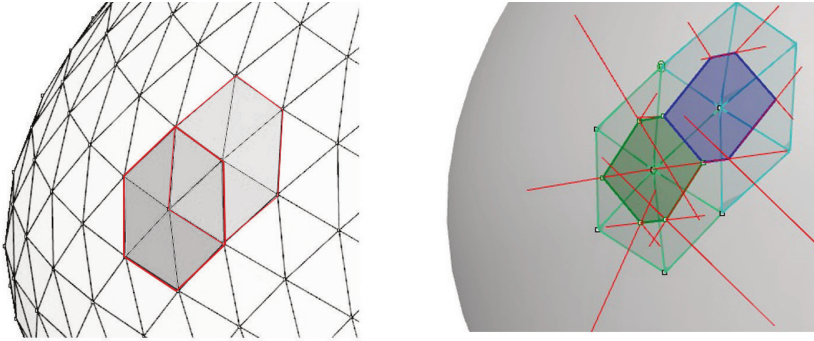




Fig. 29/ A pagina precedente: applicazione del metodo TPI sulla triangolazione di una superficie a curvatura gaussiana positiva: l'esagono risultante è piano e convesso. (Rielaborazione dell'autore).

Fig. 30/ A pagina precedente: applicazione del metodo TPI sulla triangolazione di una superficie a curvatura gaussiana negativa: l'esagono risultante è piano ed assume una forma "a farfalla". (Rielaborazione dell'autore).

Fig. 31/ *Landesgartenschau Exhibition Hall*, 2014, A. Menges, ICD/ITKE/IIGS. Fonte: © ICD/ITKE/IIGS University of Stuttgart.

68 Questo algoritmo (Zimmer 2014, pp. 26-27) non viene trattato perché basato su principi matematici molto specifici, che esulano da questa trattazione.

69 Bagger 2010.

70 Cfr. Parte prima (pp. 39-53).

Data una *mesh* triangolare, per ciascuno dei vertici della triangolazione è necessario individuare un piano tangente la superficie continua da cui tale *mesh* è stata estratta. Individuate sei facce triangolari è necessario tracciare le normali alla superficie dai vertici dei sei triangoli e dal vertice al centro. L'intersezione dei tre piani passanti per i tre vertici del triangolo scelto genera uno dei vertici del futuro pannello esagonale. È, dunque, necessario ripetere l'operazione di intersezione combinando, a gruppi di tre, i sette piani tangenti individuati: si ottengono così sei punti, i quali rappresentano i sei vertici dell'esagono. L'applicabilità e la riuscita di tale metodo sono però ostacolate da particolari condizioni geometriche: nelle aree in cui la curvatura gaussiana è nulla, i piani tangenti saranno tra loro co-planari e sarà pertanto impossibile ricavare i lati dell'esagono. Questo problema ha motivato lo sviluppo di ulteriori, specifiche ricerche per il controllo del metodo TPI per i punti della superficie che presentano curvatura gaussiana nulla. A tale proposito, si richiamano per eventuali, maggiori approfondimenti, gli studi di Henrik Joakim Zimmer, che nella sua ricerca *Optimization of 3D Models for Fabrication*, ha presentato un metodo, noto come VTPI, *Variational Tangent Plane Intersection*, in grado di correggere le eventuali anomalie dei tasselli della maglia esagonale<sup>68</sup>. Nel 2009, Bagger utilizzava il metodo dei piani tangenti per tassellare le strutture a guscio autoportanti<sup>69</sup>: infatti, poiché la curvatura dei gusci è generalmente positiva, dalla planarizzazione delle celle esagonali distribuite su di essi è possibile ottenere dei tasselli esagonali convessi. Alcuni esempi di strutture esistenti e discretizzate con pannelli esagonali piani mostrano una tassellazione irregolare (fig. 31) in risposta alla variazione della curvatura della superficie di riferimento. La sfida è quella di ricercare le condizioni formali ottimali per le quali il *pattern* esagonale sia più regolare, quindi composto da elementi preferibilmente convessi<sup>70</sup>.

**Pattern quadrangolare**

Il terzo metodo di tassellazione regolare è quello della razionalizzazione delle superfici curve mediante elementi quadrangolari piani, definiti *PQ Mesh*, o *Planar Quad Mesh*. Come per i *pattern* precedentemente analizzati, la regolarità di tali *mesh* dipenderà dalla curvatura di riferimento. È importante precisare che una *quad mesh* non coincide con una *Planar Quad Mesh*. Esistono differenti metodi per estrarre una *quad mesh* da una superficie complessa. Tra le possibili reti di curve utili per il raggiungimento dello scopo ricordiamo le curve iso-parametriche, le curve geodetiche e le reti di curve coniugate, tra le quali assumono particolare importanza le reti composte dalle linee di curvatura principale, divise tra linee di massima e minima curvatura<sup>71</sup>. Data una superficie complessa, si costruisce, indipendentemente dalla sua forma, una "*mesh* grezza", o *coarse mesh* ad essa corrispondente. È necessario che tale *mesh*, dopo essere stata ulteriormente suddivisa, aderisca il più possibile alla superficie di riferimento. È stato dimostrato che in presenza di superfici analitiche a singola o a doppia curvatura è possibile ottenere una *mesh* quadrilatera composta da elementi piani attraverso la diretta razionalizzazione delle reti di curve coniugate, cioè semplicemente congiungendo i punti di intersezione tra le curve generatrici e direttrici che compongono tali reti.<sup>72</sup>

Di contro, data una superficie complessa, per procedere alla planarizzazione delle celle quadrilatere individuate dalle reti di curve sopra indicate, è necessario, come per il *pattern* esagonale, applicare degli opportuni algoritmi di planarizzazione delle celle mediante la perturbazione dei vertici rappresentati dai punti di intersezione tra le curve stesse. Pertanto, per gestire i vantaggi e le proprietà delle *Planar Quad mesh* in ambito architettonico è importante indagarne i principi geometrici di base.

71 Cfr. Parte seconda (pp. 117-151).

72 Sauer 1970.

Le *PQ Mesh*, furono introdotte e definite nel 1970 da Roman Sauer<sup>74</sup> e vennero successivamente analizzate e approfondite da altri studiosi<sup>73</sup>.

In *Discrete Differential Geometry*<sup>74</sup> Aleksandr Ivanovic Bobenko tratta di specifiche maglie composte da elementi quadrilateri piani che presentano particolari proprietà, note come *Circular Mesh*, *Conical Mesh* e *Offset Mesh*. Esistono, inoltre, particolari casi di porzioni di superfici sviluppabili, denominate *DStrips*, cioè *Developable Strips*, ricavate da successive operazioni di "raffinamento" delle righe o delle colonne che compongono una *Planar Quad mesh* e, pertanto, definite modelli semidiscreti. Le righe e le colonne di una *planar quad mesh* possono essere denominate *Quad Strips* da cui deriva, in quanto evoluzione di quest'ultime, il termine *Developable Strip*<sup>75</sup>. È possibile ottenere delle *quad mesh* di buona qualità a partire da una rete di curve coniugate: a ciascuno dei punti di tali reti è associata una coppia di vettori tangenti coniugati. Le due famiglie di tangenti coniugate generano un campo sulla superficie, definito *Conjugate Direction Field* (CDF), o Campo delle direzioni coniugate. La regolarità del *layout* di una *Quad mesh* e della *PQ Mesh* corrispondente può quindi essere controllata "progettando" il CDF<sup>76</sup>. Come anticipato, i software in commercio consentono di indicare una direzione arbitraria rispetto alla quale calcolare la direzione coniugata, quindi utilizzando una rete di curve che non sia quella delle linee di curvatura principale ma che sia derivante da una scelta di natura puramente progettuale. In una superficie, la rete di curve coniugate più importante coincide con la rete delle linee di curvatura principale: l'angolo di intersezione che si forma tra le tangenti di queste curve, che ricordiamo essere delle tangenti coniugate, è pari a  $90^\circ$ <sup>77</sup>. Questa proprietà è importante poiché la somma interna  $W$  degli angoli di un quadrilatero piano e convesso è pari a  $360^\circ$  o  $2\pi$ :

73 Glymph 2002, Polthier 2002, Suris 2005, Desbrun 2005, Hildebrandt 2005, Liu 2006, Pottmann et. al. 2008, Zdravec 2010.

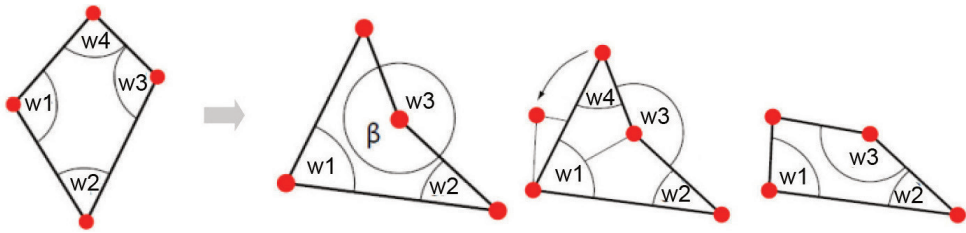
Questo elenco è stato estratto da Baglioni 2012, p. 272.

74 Bobenko, Suris 2008 .

75 Liu 2006, pp 681-689.

76 Liu 2011, p. 1

77 Cfr. capitolo precedente.



$$W = w1 + w2 + w3 + w4 = 2\pi$$

Fig. 32/ Trasformazione di un quadrilatero irregolare in un quadrilatero convesso.

Al contrario, si dimostra che la faccia  $f$  non è piana o convessa se  $W < 2\pi$ . In tal caso, l'algoritmo di planarizzazione effettuerà una rotazione dei vertici tale che la somma degli angoli interni  $W$  sia pari a  $2\pi$  e il quadrilatero risulti convesso, quindi geometricamente riconoscibile e planare<sup>78</sup>.

In un algoritmo di planarizzazione il primo passaggio consiste nell'effettuare una *principal component analysis* (PCA) necessaria per determinare, per un intorno di un punto  $P$  appartenente alla superficie, le direzioni delle curvature principali che poi vengono proiettate sul piano tangente la superficie proprio in  $P$ . Il passaggio successivo è quello di ricercare la condizione di equilibrio capace di garantire la planarità delle facce quadrilatera<sup>79</sup>.

Un algoritmo creato per risolvere questo problema è il *Sequential Quadratic Programming Method* (SQP), capace di ridurre al minimo la distanza esistente tra i punti distribuiti su un elemento sghembo, riduzione necessaria affinché tali punti diventino complanari.<sup>80</sup> Tuttavia, se la rete di curve coniugate presenta dei punti di singolarità è impossibile, data l'irregolarità delle celle, individuare un bordo quadrilatero.

Pertanto, è ancora una volta confermato che la qualità della rete di linee di curvatura di una superficie influenza inevitabilmente il raggiungimento del risultato desiderato<sup>81</sup>. Per ottimizzare l'intero processo, un possibile approccio è quello di manipolare

78 Schiffner 2007, p. 41.

79 Baglioni 2012, pp. 276-277.

80 Liu 2001, p. 4.

81 *Ibidem*.

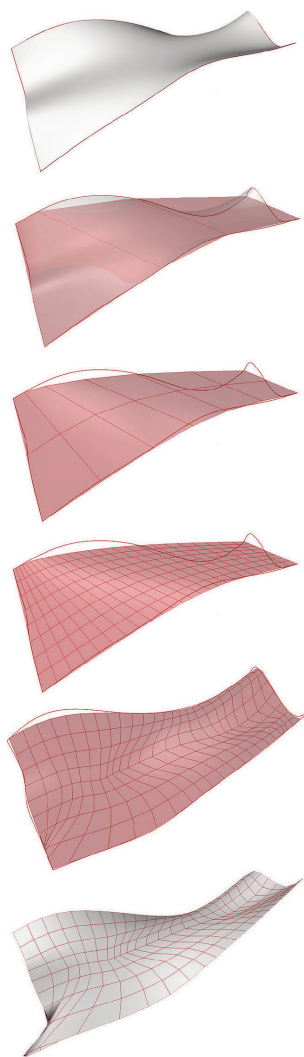


Fig. 33/ Nel passaggio da una *Quad-Mesh* ad una *Planar QuadMesh* la forma della superficie di riferimento e delle celle può essere oggetto di deformazione. (Figura dell'autore).

82 *Ibidem*, p 2.

83 Zadravec 2010, pp 3-4.

manualmente la maglia di origine prima della planarizzazione. Ad esempio, un buon metodo potrebbe essere quello di agire in maniera consapevole sul box di punti di controllo della superficie NURBS di partenza. Sfortunatamente, a causa dell'irregolarità che le modifiche di tipo manuale, e quindi locale, determinano, si possono verificare dei significativi cambiamenti della forma di partenza, rendendo così difficile la conservazione della forma desiderata<sup>82</sup>.

Alcuni gruppi di ricerca stanno elaborando nuovi metodi per ottimizzare le reti di curve coniugate.

M. Zadravec, A. Shiftner e J. Wallner hanno affrontato la questione strutturando un algoritmo capace di generare una rete di curve coniugate che sia idonea al raggiungimento dello scopo<sup>83</sup>.

Questi matematici hanno tentato di gestire automaticamente le coppie di direzioni coniugate individuate per i punti di una superficie basandosi sulla definizione di due matrici: una necessaria per memorizzare le informazioni relative alla curvatura gaussiana e l'altra, ausiliaria, che esprime la scelta delle direzioni considerate ottimali. Tale algoritmo è noto come *TCD field*, cioè *Fields of transverse conjugate directions*. Il termine "transverse" è di fondamentale importanza in quanto serve ad indicare che le due direzioni non coincidono: il grado di incidenza tra le due direzioni dipende dall'angolo che si forma tra le stesse, la cui esistenza è fondamentale perché si possa individuare un punto di intersezione tra le due e quindi uno dei vertici di una delle maglie. È necessario verificare l'angolo definito tra due direzioni coniugate allo scopo di evitare situazioni in cui le curve siano auto-coniugate, siano cioè sovrapposte l'una all'altra e quindi non incidenti. È infatti possibile estrarre una faccia quadrangolare piana anche quando il valore dell'angolo tra le due curve non è pari a  $90^\circ$ , purché esso non sia mai di valore pari a zero, caso in cui le due direzioni coincidono.



Tuttavia, il metodo incontra dei limiti dovuti alle condizioni di singolarità imposte dalla geometria della superficie in esame, le quali non possono essere facilmente rimosse, se non modificando, anche se in minima parte, la forma originaria<sup>84</sup>.

Lo sviluppo di tale strumento rappresenta un mezzo intuitivo per il controllo del CDF utile ed accessibile anche agli architetti “non programmatori”<sup>85</sup>.

Un approccio “intuitivo” per la preventiva gestione della forma è quello che, data una *mesh* piana appositamente vincolata, si possano esplorare e manipolare le diverse configurazioni spaziali derivanti dalla deformazione di tali maglie mantenendo fissi dei vincoli prestabiliti e limitando la variazione della forma ricercata entro dei margini di tolleranza accettabili<sup>86</sup>. Procedendo di pari passo con le ricerche effettuate in questo campo, e restando ancorati alla realtà, si osserva che la progettazione di una superficie, di un involucro, piuttosto che di una copertura o di una facciata, è a sua volta, chiaramente vincolata alla progettazione di uno spazio, la quale impone formalmente dei vincoli e quindi da specifiche condizioni al contorno. Un nuovo edificio, ad esempio, potrebbe dovere rispettare, oltre che i propri vincoli morfologico-progettuali, anche i vincoli spaziali imposti da eventuali strutture pre-esistenti.

Pertanto, a partire da una maglia piana opportunamente vincolata ai bordi è possibile estrapolare molteplici forme: uno degli obiettivi è quello di analizzare le reti di curve delle forme ricavate visualizzando le eventuali singolarità esistenti per procedere alle operazioni di ottimizzazione della forma stessa. Questi approcci consentono all'utente di manipolare iterativamente la rete delle linee di curvatura principale<sup>87</sup>. Di seguito vengono introdotte due particolari tipologie di *PQ Mesh*: le *Circular Mesh* e le *Conical Mesh*. Le *Circular Mesh* e le *Conical Mesh* derivano, come le *PQ Mesh*, dalla discretizzazione delle

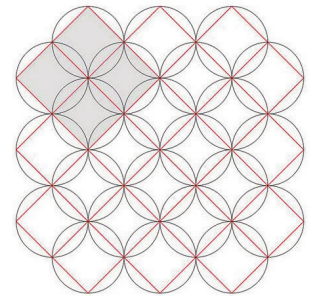
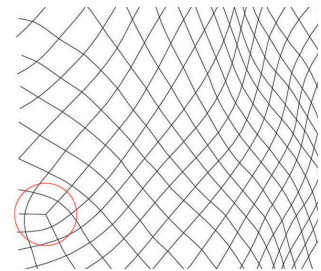
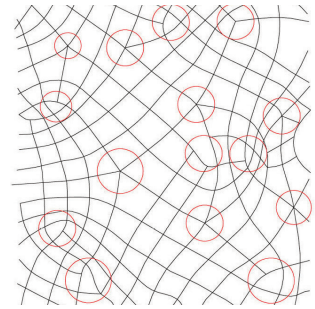


Fig. 34, 35/ Esempi di reti di linee di curvatura irregolare e regolare. (Rielaborazione dell'autore).

Fig. 36/ *Circular Mesh* piana. (Elaborazione dell'autore).

84 *Ibidem*.

85 Pottmann 2007; Eigensatz 2010.

86 Liu 2011, p. 9.

87 *Ibidem*, p. 2.

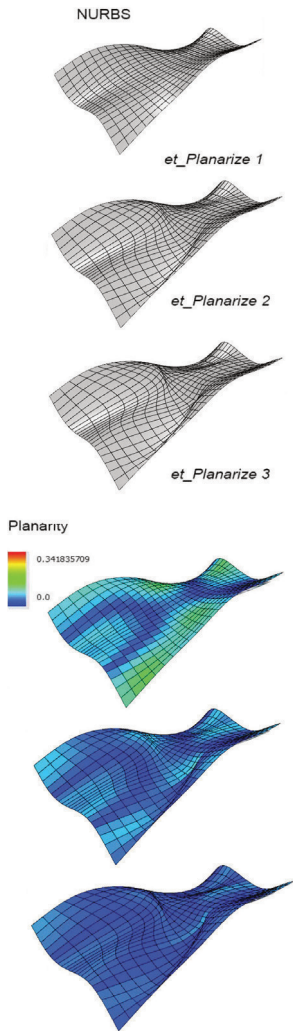


Fig. 37/ La graduale planarizzazione di una *Quad mesh* deforma la superficie di riferimento. (Figura dell'autore).

reti di linee di curvatura principale di una superficie<sup>88</sup>. Ciò dimostra la convenienza nello scegliere una rete di linee di curvatura principale come maglia di partenza. Le *Circular Mesh* sono state introdotte da R. R. Martin<sup>89</sup> e, successivamente, sono state oggetto di studio da parte di Bobenko e di Suris<sup>90</sup>.

Esse sono composte da elementi quadrilateri che, oltre ad essere piani, sono anche inscritti in una circonferenza<sup>90</sup>. La condizione geometrica che è necessario verificare per ottenere una *Circular Mesh* è che in ogni quadrilatero convesso e piano il valore espresso dalla somma degli angoli interni sia pari a  $2\pi$ , a cui va aggiunto il vincolo che per ogni vertice deve valere<sup>91</sup>:

$$w1 + w3 - w2 - w4 = 0$$

Nelle *Conical Mesh*, la proprietà geometrica più importante, caratteristica che ne definisce anche il nome, è rappresentata dal fatto che, prese quattro facce adiacenti appartenenti alla *mesh*, esse saranno tangenti ad un cono di rivoluzione avente centro nel vertice comune alle quattro facce considerate e il cui asse è rappresentato dalla normale uscente dal vertice stesso. Una *Conical Mesh* può, inoltre, essere considerata il corrispondente spaziale di una *Circular Mesh*. Come i quattro vertici di un elemento appartenente ad una *Circular Mesh* sono inscritti in un cerchio, così le quattro facce orientate di una porzione di *Conical Mesh* sono tangenti ad un cono di rivoluzione  $w$ . Il vertice  $V$ , comune a quattro facce, è definito *Conical vertex* se, e solo se, l'equivalenza di sopra è soddisfatta. Tale condizione rappresenta un vincolo fondamentale per la computazione algoritmica di una *Conical Mesh*<sup>92</sup>.

Date quattro facce quadrilatera incidenti in un vertice  $V$ , si generi una sfera avente centro in  $V$ . La sfera intersecherà le quattro facce e le curve ricavate da

88 Baglioni 2012, pp.276-277.

89 Martin 1986.

90 Suris 2005.

91 Baglioni 2012, p.272.

92 Liu 2011, p. 2-4.



tale intersezione comporranno un poligono sferico di quattro lati tangente ad un cerchio  $c$ <sup>93</sup>.

Se i quattro lati del poligono sferico sono contenuti nello stesso semispazio ci troviamo in presenza di un punto iperbolico, altrimenti si parla di punto ellittico o di punto parabolico.<sup>93</sup> Se le quattro facce di partenza compongono una *Conical mesh* i quattro lati circolari del poligono sferico saranno tangenti ad un cerchio  $c$  i cui centri sono allineati con il vertice  $V$ , il quale ha valenza 4.<sup>95</sup> In una *Conical mesh*, gli assi dei coni di vertici  $V1$  e  $V2$  di due gruppi composti ciascuno da quattro facce tangenti ai rispettivi coni  $w'$  e  $w''$ , di cui una in comune, sono complanari e incidenti in  $x$ .

L'inviluppo di tali piani genera una superficie sviluppabile ortogonale alla maglia. Il bordo di tale striscia coincide con la linea di curvatura di base: i bordi delle facce della *Conical Mesh* rappresentano il corrispondente discreto di tale curva. Quindi, è importante richiamare la proprietà per la quale è noto che le normali ad una curva rappresentano le generatrici di una superficie sviluppabile se, e solo se, tale curva è una linea di curvatura principale<sup>96</sup>.

I bordi poligonali delle *Conical mesh* rappresentano il corrispondente discreto delle linee di curvatura principale. Gli studiosi ed i matematici impegnati in questo campo di ricerca si sono interrogati sull'esistenza di maglie che siano contemporaneamente sia circolari, che coniche.

La risposta a tale quesito è affermativa: esistono interessanti esempi di maglie coniche che presentano un costante angolo di apertura dei coni tangenti ai gruppi di quattro facce inscritte in cerchi di raggio costante<sup>97</sup>. Queste particolari tipologie di *mesh* derivano dalla razionalizzazione di superfici caratterizzate da una distribuzione costante di punti in cui la curvatura gaussiana è negativa<sup>98</sup>. Tuttavia, maglie con entrambe le proprietà

93 *Ibidem*, p.5.

94 Il risultato è influenzato dalla curvatura della superficie.

95 Liu 2011, p.5.

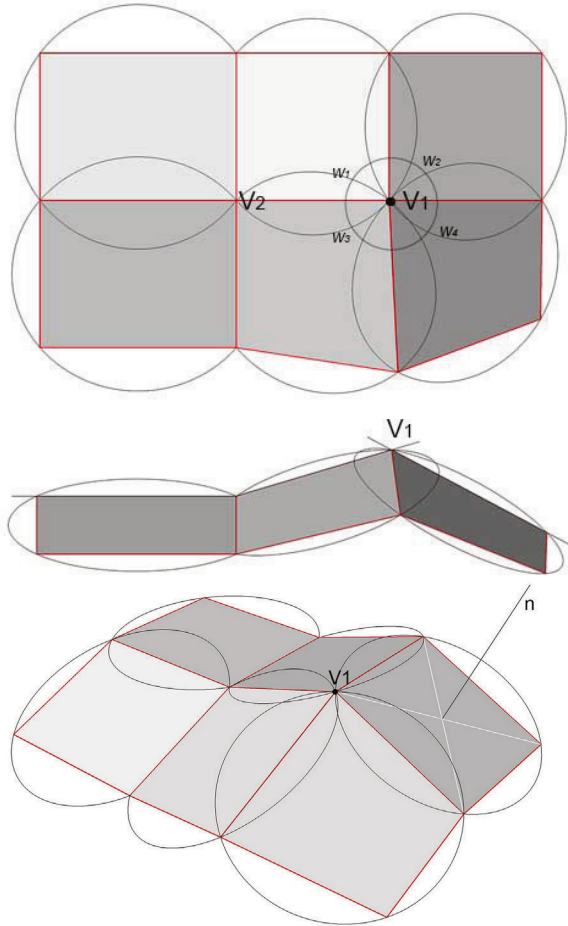
96 cfr. Parte seconda.

97 Liu 2011, p.6.

98 Wunderlich 1951.

## Shaping & Paneling

Fig. 38/ Le *Circular Mesh* sono composte da facce quadrilatero piano iscritte in una circonferenza. (Figura dell'autore).

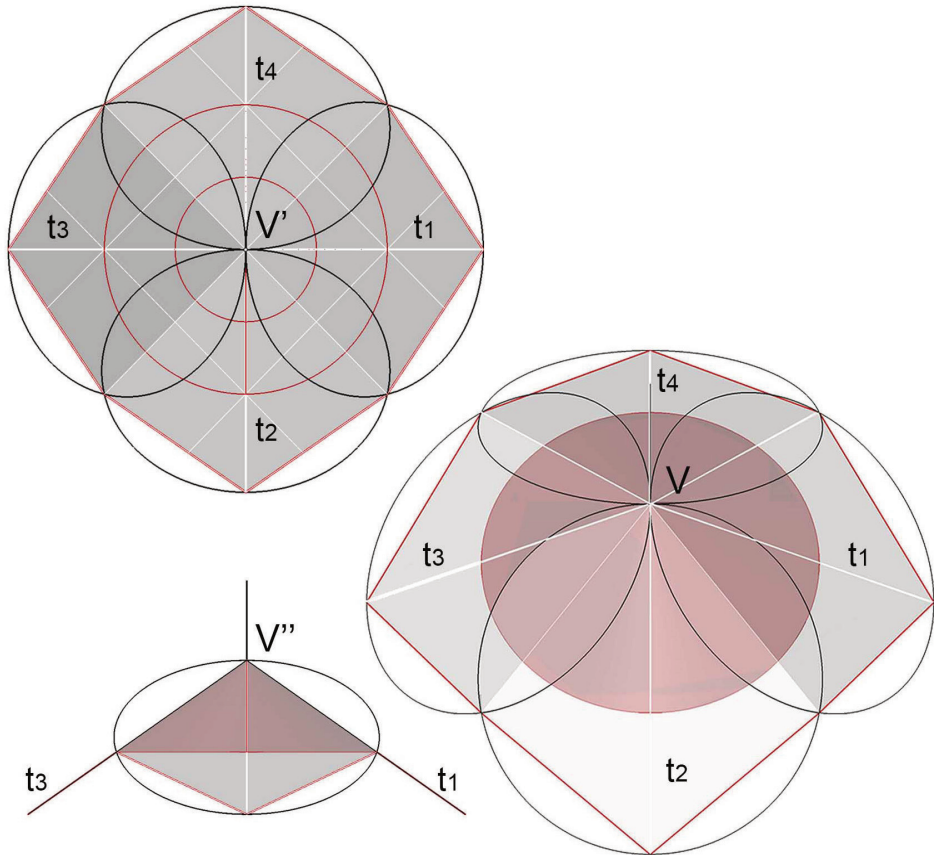


presentano una struttura geometrica molto rigida e quindi una scarsa adattabilità nel discretizzare una superficie complessa<sup>99</sup>. I software esistenti in commercio prevedono algoritmi che consentono la creazione di *Circular* o *Conical Mesh*.

L'algoritmo *Conical/Circular perturbation* del *plugin Evolute Tools Pro* produce risultati di grande interesse anche dal punto di vista estetico, generando mesh isotrope che presentano variazioni limitate e graduali in termini di lunghezza e di direzione degli spigoli, se rapportate alle misure originarie.<sup>100</sup> Ulteriori studi sono rivolti all'analisi del comportamento

<sup>99</sup> *Ibidem*

100 Baglioni 2012, p. 276-277.



statico delle *PQ mesh* e all'utilizzo delle maglie coniche e delle loro proprietà di *offset* per lo studio e la discretizzazione di particolari tipologie di strutture a guscio<sup>101</sup>.

Le *Circular* e le *Conical Mesh* sono caratterizzate da una struttura geometrica tale da consentire l'*offset* della *mesh* di partenza: ciò rende possibile la realizzazione di involucri multistrato e di strutture portanti in grado di seguire fedelmente la forma di origine. La *mesh* che si ottiene dall'*offset* di una *Conical* o di una *Circular Mesh* ne conserverà le stesse proprietà<sup>102</sup>.

Fig. 39/ A pagina seguente: in una *Conical mesh* quattro facce adiacenti sono tangenti ad un cono di rivoluzione il cui vertice *V* coincide con il vertice comune a tutte e quattro le facce. (Figura dell'autore).

101 cfr. Wallner 2014.

102 Liu 2011, p 8.

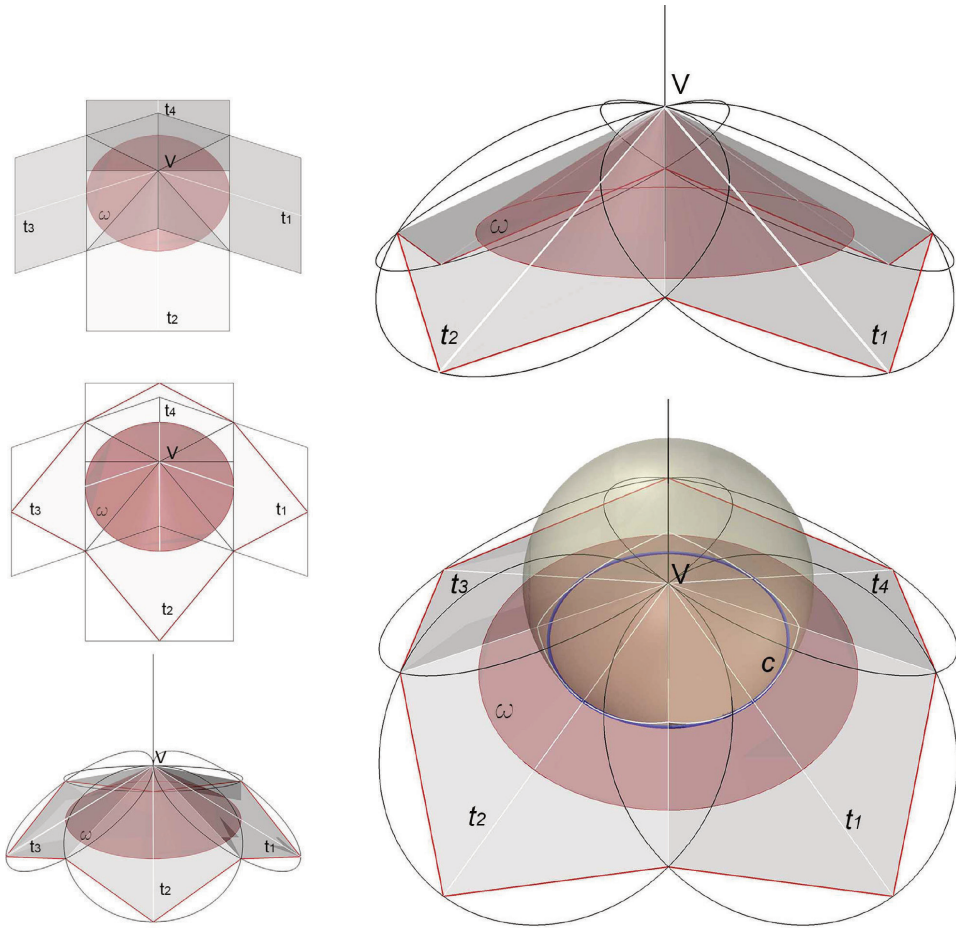


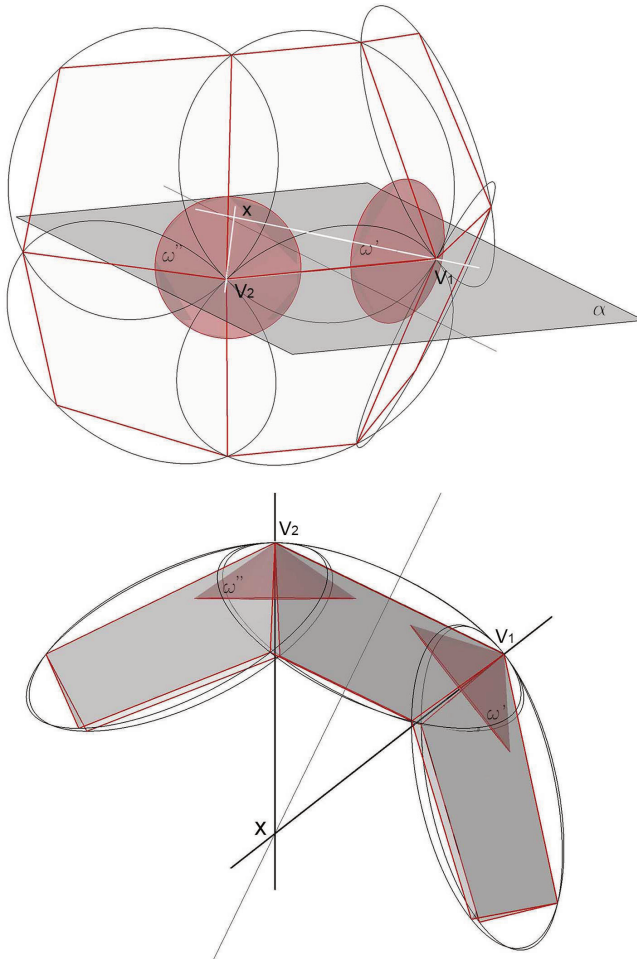
Fig. 40/ Date quattro facce quadrilatera incidenti in un vertice  $V$ , si generi una sfera avente centro in  $V$ . La sfera intersecherà le quattro facce e le curve ricavate da tale intersezione comporranno un poligono sferico di quattro lati tangente ad un cerchio  $c$ . (Figura dell'autore).

### Offset Mesh

Le *mesh* che consentono l'*offset* della maglia di partenza sono le più interessanti dal punto di vista tecnologico. Due *mesh* sono l'una l'*offset* dell'altra se le facce che le compongono sono tra loro parallele e se la loro distanza reciproca è costante<sup>103</sup>.

Si consideri una *mesh*  $M$ : la sua *Offset mesh*  $M'$  a una distanza  $d$  e se ne definisca l'immagine gaussiana (poliedro di Koebe). In un poliedro di Koebe tutti gli spigoli sono tangenti ad un'unica sfera che interseca le facce secondo cerchi inscritti;

103 Pottmann 2007, p.3.



per ogni vertice passa un cono che è tangente alla sfera generando cerchi (in blu) ortogonali ai precedenti<sup>104</sup>. In particolare, si ha che: una *mesh* è una *vertex offset mesh* se e solo se la *Quad Mesh* di partenza è una *Circular Mesh*; una *mesh* è una *edge offset mesh* se i lati dell'immagine gaussiana corrispondente alla *mesh* di partenza sono tangenti ad una sfera; una *mesh* è una *Face Offset Mesh* se le facce dell'immagine gaussiana corrispondente alla *mesh* di partenza sono tangenti ad una sfera.

Inoltre, una *mesh* possiede una *Face Offset Mesh* se

Fig. 41/ Le maglie coniche in figura presentano un costante angolo di apertura dei coni tangenti ai gruppi di quattro facce, le quali sono allo stesso tempo inscritte in dei cerchi di raggio costante. (Figura dell'autore).

104 Baglioni 2012, p.272.

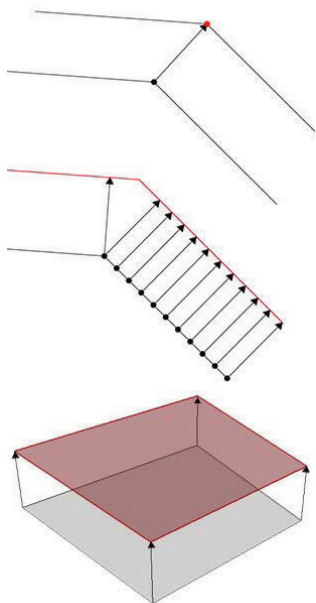


Fig. 42/ Le figure mostrano un *Offset vertex*, un *Offset edges* e un *Offset face*. (Elaborazione dell'autore).

Fig. 43/ A pagina seguente: porzione di *Offset Mesh* e *Conical Offset Mesh* e *Offset* ed *hexagonal Offset Mesh*. (Rielaborazioni dell'autore).

e solo se le facce della *mesh* di partenza sono tangenti ad un cono di rivoluzione (*Conical mesh*).<sup>105</sup> Attualmente, le ricerche sul campo sono finalizzate alla progettazione di strutture complesse mono e multistrato<sup>106</sup>. A differenza dalle *mesh* esagonali e quadrilatere, le *mesh* triangolari non possiedono proprietà di *offset* costante applicabile alle facce o ai bordi delle reti di partenza<sup>107</sup>. Escludendo i poliedri regolari, semiregolari (o archimedeei) e catalani (duali di quest'ultimi), per le *mesh* triangolari non è infatti possibile ottenere vertici senza torsione<sup>108</sup>.

Nelle *offset mesh* è necessario che venga mantenuta una corrispondenza biunivoca tra vertici, spigoli e facce appartenenti alle *mesh* in gioco. Ciò assicura che per ogni vertice della *mesh* i piani assiali delle travi costruite lungo i bordi dei tasselli hanno la stessa giacitura, sono cioè complanari. Dunque, è possibile individuare tre tipi di *offset* ottenuti mantenendo una distanza fissa: *offset* tra gli spigoli (*edges offset mesh*), tra i vertici (*vertex offset mesh*) e tra le facce (*face offset mesh*)<sup>109</sup>. In particolare, le *edges offset mesh* e le *face offset mesh* consentono rispettivamente di realizzare strutture composte da travi ad altezza costante e strutture multistrato. Data una *Conical mesh*, se si considerano due vertici consecutivi  $V1$  e  $V2$ , esisteranno due facce che saranno tangenti ad una stessa coppia di coni con assi complanari ed incidenti in un punto  $x$  e appartenenti al piano bisettore  $\alpha$ . Congiungendo gli assi consecutivamente ricavati è possibile costruire delle superfici che rappresentano un sistema di piani ortogonali e bisettori delle strisce che compongono la *mesh* iniziale: ciò consente la realizzazione di una struttura multistrato composta da travi ad altezza costante, i cui profili corrispondono al bordo  $M$  ed al bordo offsettato  $M'$ <sup>110</sup>. La possibilità di lavorare sull'*offset* di un sistema discreto apre delle interessanti ricadute nel campo della *Digital Stereotomy*.

105 Pottmann 2006, p.5.

106 Pottmann 2007, p. 271.

107 *Ibidem*.

108 *Ibidem*.

109 Hambleton 2009, p. 2.

110 Baglioni 2012, p. 271.



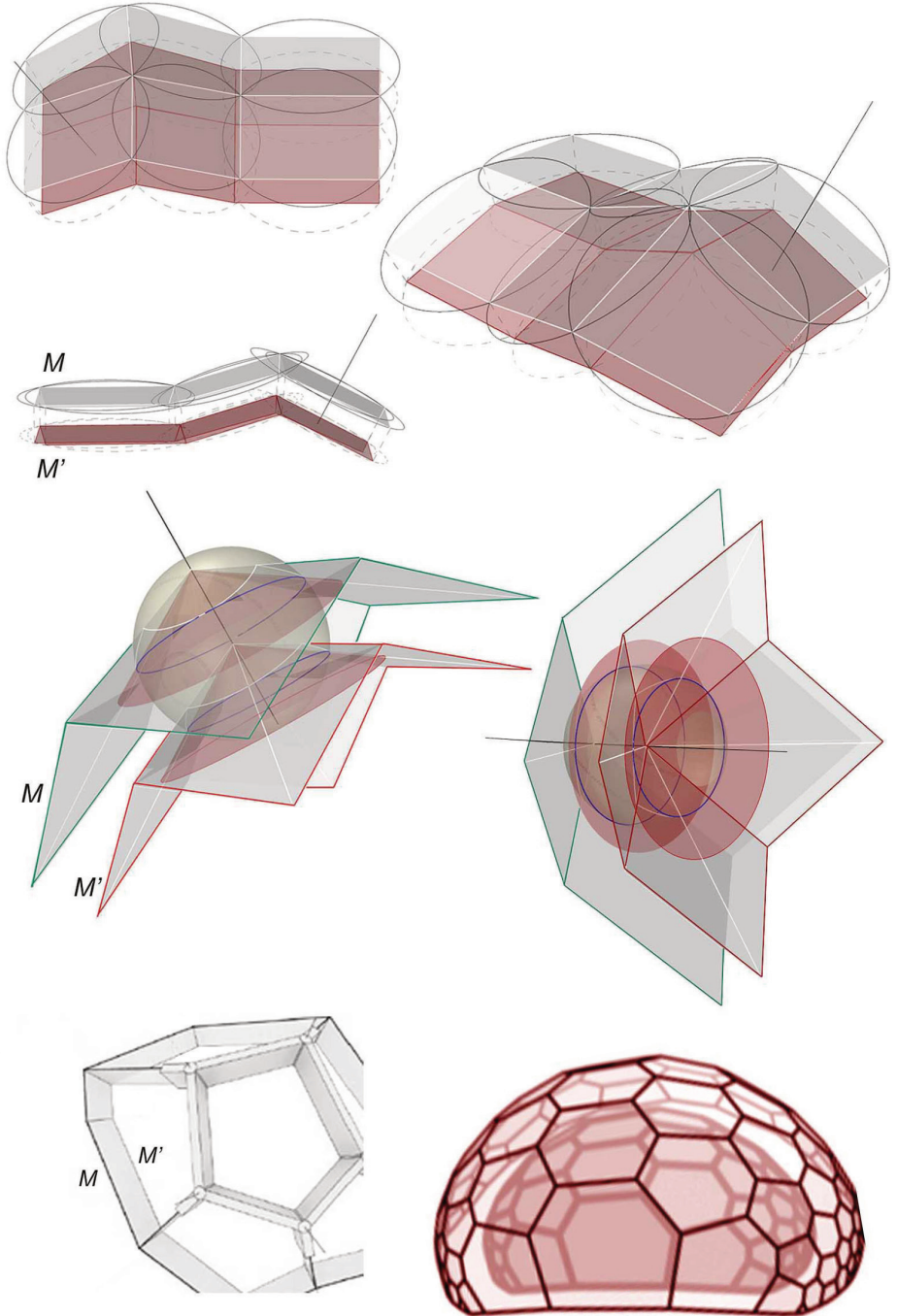






Fig. 44/ *Sculpture at Geneva* di Antoine Pevsner. Fonte: Wikimedia Commons. Foto di Mike Peel.

Fig. 45/ Naum Gabo (1976) a l'*Hakone open-air museum* (Giappone). Fonte: <https://www.flickr.com/>. Autore: Jean-Pierre Dalbéra.

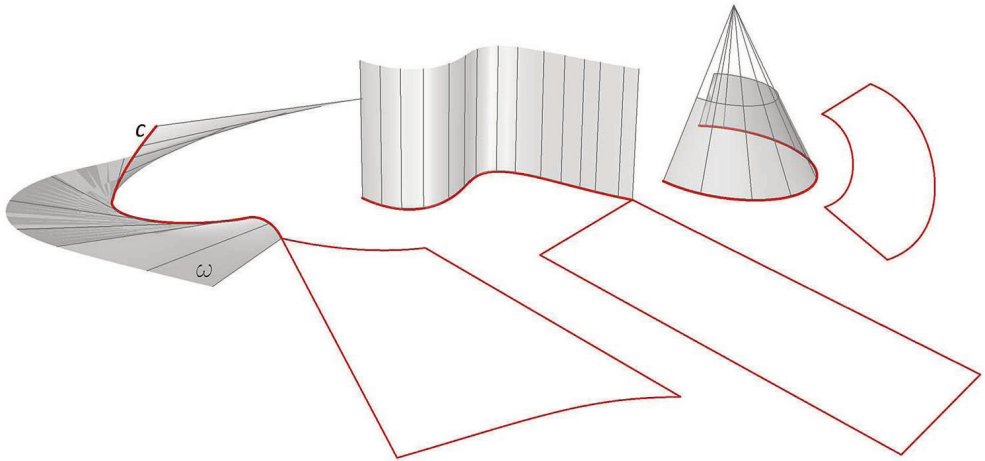
### I modelli semidiscreti: *DStrips*

Se un sistema consiste nella composizione di più elementi connessi, un modello è un prodotto unico e finito: entrambi descrivono uno o più fenomeni e leggi definite sulla base di una serie di relazioni<sup>111</sup>. Pertanto, nelle definizioni stesse dei termini utilizzati, modelli semidiscreti e sistemi misti, è chiaramente visibile la differente natura geometrica che li contraddistingue: un modello semidiscreto è un prodotto unico, risultante dall'applicazione di specifiche regole a partire da un sistema iniziale di tipo discreto e successivamente ulteriormente raffinato, mentre un sistema misto si compone di un certo numero di elementi, uguali o diversi tra loro, indipendenti ma mutuamente assemblati. Da un semplice pezzo di carta è possibile generare numerosi modelli: dalla piegatura, flessione e torsione di un unico pezzo piano è possibile creare, senza strappi, differenti forme sviluppabili. Tale approccio rappresenta un valido processo progettuale: il principio teorico posto alla base di questi modelli consiste nell'assemblaggio di una serie di strisce di carta sviluppabili adiacenti e mutuamente aderenti<sup>112</sup>. Maggiori approfondimenti sulle *PQ Mesh* forniscono un approccio geometrico-matematico utile per ottimizzare il processo di discretizzazione di forme complesse. Note le proprietà geometriche delle *PQ Mesh*, è infatti possibile trasformare porzioni di superfici a doppia curvatura in modelli semidiscreti anche definiti con il termine *DStrip*, o *Developable Strip*, cioè strisce di superfici a singola curvatura, e quindi sviluppabili<sup>113</sup>. Richiamando i principi dimostrati nei paragrafi precedenti, si dimostra che l'ulteriore suddivisione delle facce che compongono le righe o le colonne di una *Planar Quad Mesh* genera una superficie sviluppabile. Data una *PQ Mesh*, si consideri una *PQ Strip*, cioè una riga o una colonna di tasselli quadrilateri piani e consecutivi.

111 *Il grande Dizionario Garzanti della Lingua italiana*, Garzanti Editore.

112 Vytisková 2012, pp.53-56.

113 Liu 2006, p.5.



I vertici dei quadrilateri adiacenti che compongono tale *PQ Strip*, congiunti da segmenti rettilinei, sono indicati con le lettere  $v_1, v_2, \dots, v_n$  e  $u_1, u_2, \dots, u_n$ . Data la planarità di ogni singola faccia, prolungando i segmenti che congiungono tali vertici è possibile individuare un punto di incidenza, il quale può essere proprio o improprio: se i bordi di tali tasselli sono mutuamente paralleli, la loro unione genera una superficie cilindrica e la *PQ Strip* sarà di tipo cilindrico; se il prolungamento dei bordi dei tasselli converge in un punto, la loro unione genera un cono e la *PQ Strip* sarà conica; se il prolungamento dei bordi individua, per ciascuna coppia di segmenti, un punto nello spazio, il congiungimento di tutti i punti così individuati genera una polilinea sghemba definita poligono di regresso (fig. 46). Dall'interpolazione di tali punti sarà possibile generare la curva di regressione  $c$ , o spigolo di regresso<sup>114</sup>. I bordi consecutivi e a coppie incidenti rappresentano parte delle infinite tangenti  $tn$  di tale curva di regressione: aumentando la quantità del numero di tangenti aumenta anche il numero di bordi di tasselli piani consecutivi

Fig. 46/ Esempi di superfici sviluppabili (tangenziale generica, cilindrica, conica, ) e relativa trasformazione in *PQ Mesh*. (Elaborazione dell'autore).

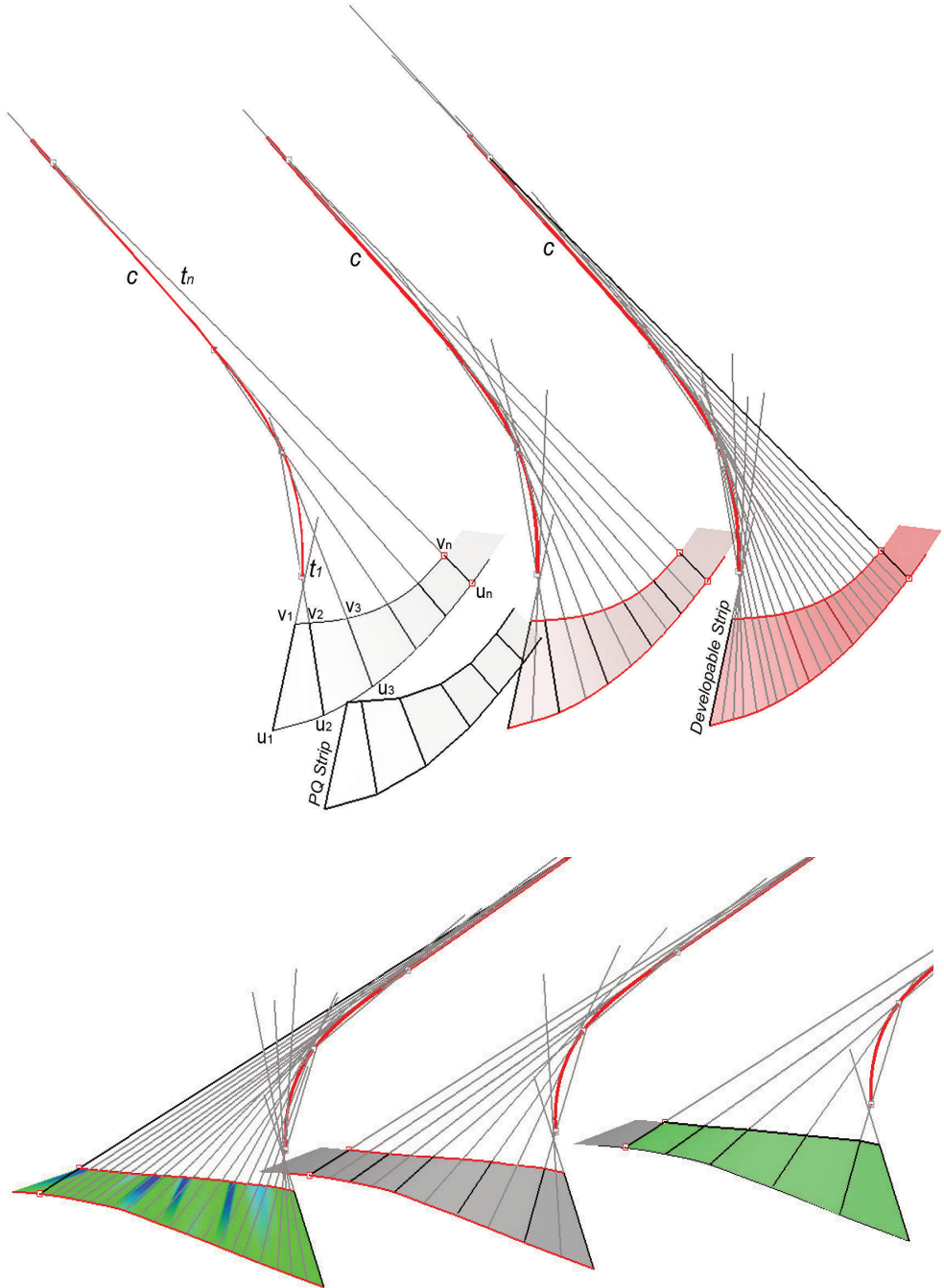
114 Cfr. Parte seconda.

i quali coincidono con le generatrici della striscia sviluppabile. La sviluppabilità della striscia è dimostrata dal fatto che la sua curvatura gaussiana è nulla in ogni punto: essa sarà infatti data dal prodotto tra i cerchi osculatori individuati sui punti appartenenti al bordo perimetrale curvo della striscia e le rette generatrici passanti per quei punti. Inoltre, la condizione necessaria affinché la superficie sia sviluppabile è rappresentata proprio dall'incidenza e dalla complanarità di due generatrici consecutive<sup>115</sup>. Una rigata che sia anche sviluppabile ammette un piano tangente in ogni punto di una sua generatrice: tale piano è individuato dalla faccia piana quadrilatera di cui le due generatrici sono i bordi. Essendo due bordi consecutivi necessariamente complanari, essi rappresentano due generatrici appartenenti allo stesso piano tangente: queste generatrici si dicono "singolari". Condizione necessaria e sufficiente affinché una striscia sia sviluppabile è che tutte le generatrici siano singolari<sup>116</sup>. Generalizzando il principio, le rette tangenti di una curva sghemba rappresentano le generatrici di una superficie sviluppabile, come dimostrato in precedenza. È preferibile che la maglia dalla quale è stata estratta la *PQ Mesh* di partenza sia una rete di curve coniugate, meglio ancora se tali curve sono linee di curvatura principale. Al contrario, potrebbero verificarsi delle auto-intersezioni, delle pieghe e altre deformazioni indesiderate che comprometterebbero la regolarità e la sviluppabilità delle strisce<sup>117</sup>. Analogamente, è dimostrato che una *PQ Strip* rappresenta la versione discreta di una *DStrip*: diminuendo il numero di tali generatrici si regredisce nuovamente verso l'iniziale numero di bordi delle facce piane considerate ottenendo la versione grezza della striscia sviluppabile ricavata. Inoltre, considerando, al limite, i due cerchi osculatori dei due bordi perimetrali curvi di una striscia sviluppabile e congiungendo i due punti rispetto ai

115 Fallavolita 2009, p. 161.

116 *Idem.*

117 Liu 2006, pp 2-8.



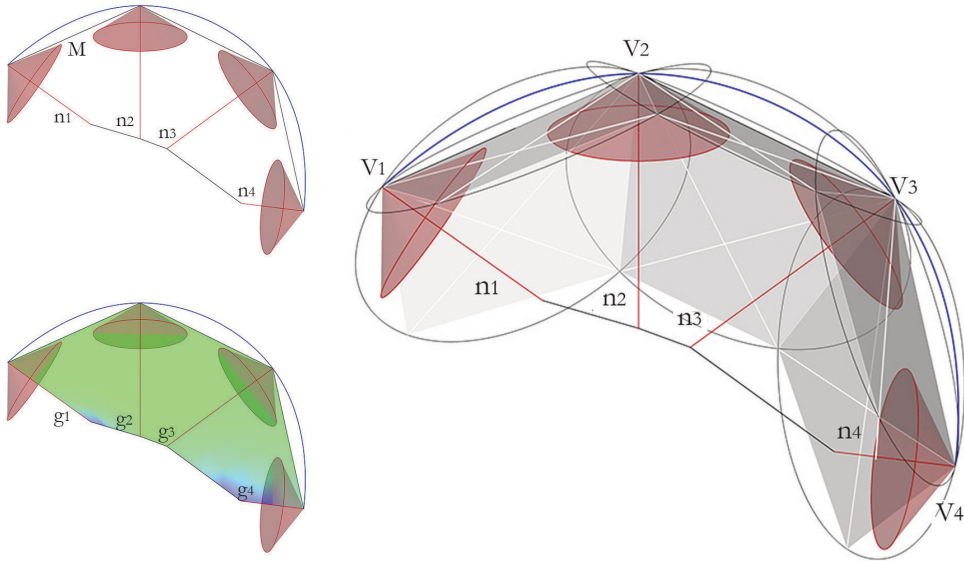


Fig. 47/ A pagina precedente: una *PQ Strip* rappresenta la versione discreta di una *D-Strip*. La figura mostra che i punti di intersezione tra i prolungamenti dei bordi dei tasselli quadrangolari detreminano lo spigolo di regresso  $c$  di una *D-Strip* a sua volta composta dalle tangenti consecutive di tale curva.  
(Rielaborazione dell'autore).

Fig. 48/ La sequenza di figure sopra dimostra che gli assi dei coni a cui le facce consecutive di una *Conical/Circular Mesh* sono tangenti coincidono con le normali ad una linea di curvatura principale (in blu), di cui il bordo della mesh  $M$  rappresenta la controparte discreta, e dunque anche con le generatrici di una striscia sviluppabile, come dimostrato dal grafico Analisi curvatura. Infatti, le normali alle linee di curvatura principale generano una superficie sviluppabile.  
(Rielaborazione dell'autore).

quali tali cerchi osculatori sono stati individuati è possibile ricavare, sulla curva di regressione, un punto che rappresenterà il vertice di un cono passante proprio per i due cerchi osculatori considerati.

Tale cono viene definito, per queste ragioni, cono osculatore, e presenta una continuità di secondo ordine, quindi in curvatura, con la striscia sviluppabile ottenuta<sup>118</sup>. L'intero processo dimostra come sia possibile passare da un modello continuo, la *NURBS* di partenza, al suo corrispondente modello discreto, la *PQ Mesh*, per poi ricavarne un modello di tipo semidiscreto, la *DStrip*, ampliando le possibilità di ottimizzazione di una superficie a doppia curvatura variabile. Lo sviluppo piano di tali strisce consente di ricavare un profilo piano che verrà utilizzato per ritagliare le porzioni di materiale con il quale si intende realizzare la superficie progettata. Infine, si osserva che le *DStrip* che derivano da *Circular* o *Conical Mesh* conservano le proprietà geometriche delle *mesh* da cui derivano: come nelle *Circular Mesh* ciascuna faccia è inscritta in un cerchio, così nelle *Circular DStrip* ciascuna generatrice sarà iscritta in

118 Pottmann 2008, pp. 2-4.

un cerchio; come quattro facce piane di una *Conical mesh* sono tangenti ad un cono, così nelle *Conical DStrip* ciascuna generatrice sarà tangente ad un cono. Come anticipato, in una *Conical mesh* gli assi dei coni formano una superficie sviluppabile continua, in quanto involuppo di piani bisettori individuati tra le facce<sup>119</sup>. Il comando *et-Subdivide/DStrip* del plug-in Evolute Tools Pro permette di ricavare una *DStrip* a partire da una *PQ Strip*. Una singola *PQ strip*, sistema discreto, può essere ulteriormente suddivisa e trasformata in una *DStrip*, modello semidiscreto, applicando l'algoritmo di perturbazione Lane-Riesenfeld (1980), messo a punto per il calcolo delle medie e la cui ripetizione genera curve *B-Spline* e superfici *B-spline*<sup>120</sup>. Anche in questo caso, come per le *PQ Strip*, è chiaro che una superficie complessa può e deve essere suddivisa in un certo numero di strisce. Sfruttare la possibilità di gestire e di utilizzare le strisce sviluppabili per discretizzare una superficie complessa offre innumerevoli vantaggi. Recentemente sono stati sviluppati dei *tools open source* in grado di discretizzare una superficie, o striscia, complessa in strisce sviluppabili<sup>121</sup>. Queste procedure sono particolarmente adatte per i materiali flessibili. Si pensi, ad esempio, ai vantaggi che potrebbero derivarne nel caso in cui si voglia interamente rivestire una superficie curva e complessa utilizzando strisce sviluppabili fabbricate sfruttando tale approccio. La letteratura scientifica utilizza il termine *flattening*<sup>122</sup> (appiattimento) o "approssimazione piana"<sup>123</sup> per parlare di "spianamento" di una superficie complessa. La differenza che intercorre tra trasformazione geometrica e deformazione topologica non consente di utilizzare il termine "sviluppo" riferito all'"appiattimento" di superfici complesse. Il termine "sviluppo" si riferisce ad una trasformazione geometrica automatica consentita dalla condizione di complanarità esistente tra coppie successive di

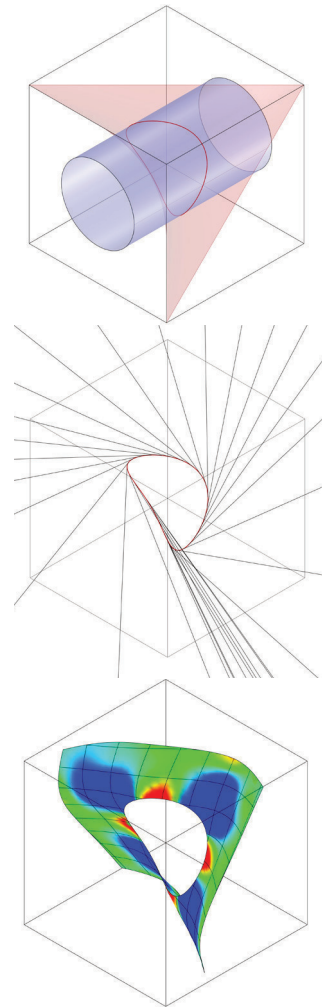


Fig. 49/ Invertendo il processo di trasformazione di una *PQStrip* in *DStrip* è possibile generare una superficie sviluppabile. Le figure mostrano la curvatura variabile della superficie *loft* costruita sulle tangenti consecutive di una curva sghemba o spigolo di re-gresso. (Figura dell'autore).

119 *Ibidem*, p.5-7.

120 Pottmann 2007, p.8.

121 *Ibidem*.

122 Il modulo *Panel Fitting* è commerciale.

123 Liu 2006, p.8.



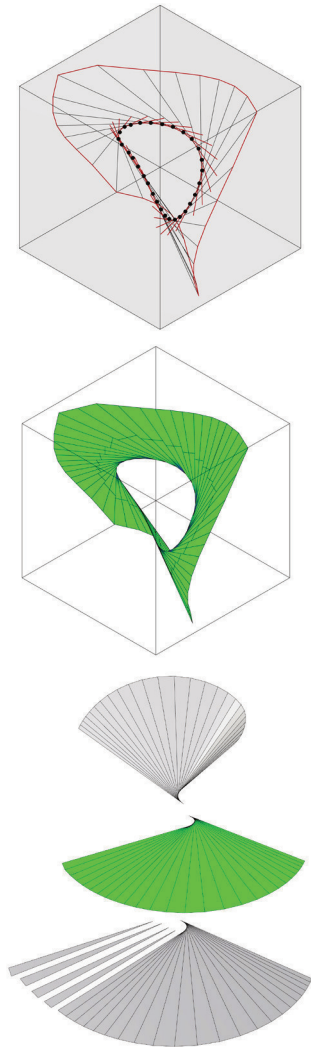


Fig. 50/Le figure mostrano la curvatura gaussiana nulla della striscia poliedrica composta da facce piane triangolari e relativo sviluppo in striscia sviluppabile continua o pannelli piani separati. (Figure dell'autore)

generatrici rettilinee, condizione necessaria e sufficiente a garantire la sviluppabilità di una superficie. Le superfici costruite su schiere di tangenti consecutive ad una curva, definite superfici tangenziali, sono sviluppabili. A partire dalle tangenti consecutive ad una curva sghemba generica è possibile ricavare una striscia sviluppabile composta da facce triangolari adiacenti identificate da coppie di tangenti consecutive. Dividendo la curva (spigolo di regresso della futura striscia sviluppabile) in  $n$  punti è possibile generare  $n$  tangenti rappresentanti le sezioni consecutive attraverso cui modellare una superficie *loft*. Tali tangenti rappresentano le  $n$  generatrici di una superficie poliedrica corrispondente alla *loft* generata.

È noto che due rette incidenti o tre punti non allineati individuano un piano. Pertanto, estendendo le tangenti (matematicamente incidenti in un intervallo di definizione infinitesimo) in prossimità dello spigolo di regresso è possibile identificare i punti di intersezione delle coppie di tangenti consecutive. Tali intersezioni individuano una serie di facce triangolari adiacenti, dunque certamente piane. In conclusione, è possibile ricavare un poliedro aperto delimitato dallo spigolo di regresso e da una curva sghemba il cui andamento è stabilito in base a specifiche scelte progettuali (approccio di pre-razionalizzazione). Il componente *Unroll* di *Lunchbox* (*Grasshopper*) consente di sviluppare automaticamente tale modello. Grazie a questo approccio specifico possiamo sovrapporre una striscia sviluppabile ad una forma complessa. Le figure mostrano il confronto tra l'analisi della curvatura gaussiana della striscia poliedrica e la superficie *loft* (curvatura gaussiana variabile) costruita sulle tangenti consecutive di una curva sghemba (spigolo di regresso). La striscia sviluppabile ricavata rappresenta il modello semidiscreto che meglio si adatta alla superficie *patch* o *loft* di riferimento a curvatura variabile. Analogamente a quanto accade per il processo di

“raffinamento” di una *Planar Quad Strip* in *Developable Strip* tale tecnica consente di ricavare modelli composti da facce piane consecutive per approssimare superfici a doppia curvatura composte prevalentemente da punti parabolici e iperbolic<sup>124</sup>. Per tutti i vantaggi sottolineati e dimostrati, la ricerca sui modelli semidiscreti e sui sistemi misti per il *Paneling* di superfici complesse rappresenta una sfida, o meglio un’opportunità, sempre aperta.

### I sistemi misti: *Panel Fitting*

Grazie alle ricerche condotte dal gruppo *Evolute GmbH* è possibile ottimizzare porzioni di superficie complessa con piani, cilindri, tori, paraboloidi iperbolic, elicoidi e porzioni di superfici sviluppabili generiche. Tale algoritmo è disponibile nel modulo *Panel Fitting* del *plug-in Evolute Tools Pro* di *Rhino*. L’algoritmo trasforma la *patch* a doppia curvatura in una porzione di rigata attraverso l’allineamento delle linee asintotiche delle superfici<sup>125</sup>. Si ricorda, pertanto, che i punti iperbolic appartenenti ad una superficie assumono particolare importanza per l’individuazione di tali tangenti, in quanto per tali punti esse saranno reali e distinte. Come i cilindrici, anche i paraboloidi e i tori consentono di estrarre da uno stampo di dimensioni maggiori un elevato numero di pannelli aventi stessa curvatura ma forma differente. I pannelli “customizzati”, poiché non subiscono nessuna trasformazione o semplificazione in termini di curvatura, rappresentano la tipologia più costosa, perché per realizzare ciascuno di questi pannelli sarà necessario prototipare stampi differenti. Per ottimizzare il processo è preferibile estrapolare il maggiore numero possibile di gruppi di pannelli aventi la stessa curvatura per limitare il numero di stampi necessari. Più in generale, l’algoritmo calcola la forma e la distribuzione di una serie di pannelli, misti tra piani e curvi, sulla superficie da discretizza-

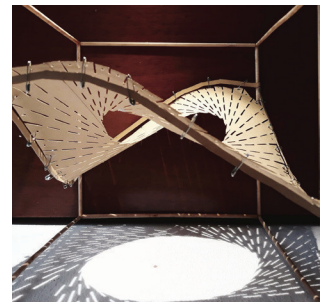
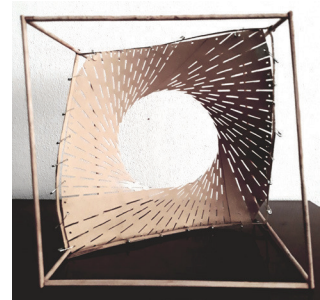
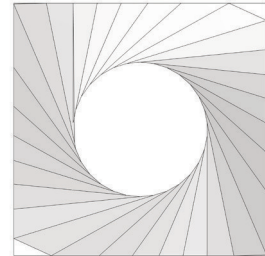


Fig. 51/ Prototipo composto da strisce sviluppabili estratte da una curva sghemba generica o spigolo di regresso. (Figura, modello e foto dell’autore).

<sup>124</sup> Tonelli 2013, pp. 7-8.

<sup>125</sup> Pottmann 2008, pp.15-28.

## Shaping & Paneling

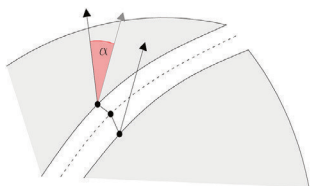


Fig. 52/ La figura mostra la Divergenza, o *divergence*, cioè la distanza o scostamento tra due pannelli adiacenti, e l'angolo di piegatura, o *kink angle*, esistente tra pannelli o strisce di pannelli adiacenti. (Rielaborazione dell'autore).

re, ottimizzando il più possibile la qualità delle approssimazioni locali della superficie. È intuitivo che le aree che presentano curvatura gaussiana negativa potranno essere più semplicemente approssimate da porzioni di superfici rigate. Ottimizzare un'area di una superficie *free form* significa cercare il tipo di pannello in grado di assecondare il più possibile la curvatura di quel tratto al minimo costo di produzione. Sarà quindi necessario determinare il numero e il tipo di pannelli più idonei e calcolarne la distribuzione ottimale nel rispetto dei requisiti progettuali, funzionali ed estetici. Il grado di tolleranza consentito, in fase di approssimazione, è determinato dal controllo di due parametri fondamentali: la divergenza, o *divergence*, cioè la distanza o scostamento tra due pannelli adiacenti, e l'angolo di piegatura, o *kink angle*, esistente tra i pannelli o tra le strisce di pannelli adiacenti<sup>126</sup> (fig. 52). L'algoritmo minimizza queste due variabili fino a raggiungere il grado di approssimazione della superficie ritenuto idoneo per l'ottimizzazione del processo. In fase iniziale l'algoritmo computa una soluzione composta interamente da pannelli piani. Nelle aree in cui le condizioni di curvatura non sono soddisfatte si procede a computare le forme di pannelli ritenute più adatte allo scopo. Durante la prima fase l'algoritmo calcola la curvatura gaussiana per ogni punto della superficie e scarta tutte le regioni con curvatura gaussiana positiva: tale operazione è necessaria per individuare un insieme di linee asintotiche. L'algoritmo stima le direzioni asintotiche per un numero sufficiente di punti lungo le quali allinea la superficie.

Quindi, si procede con la fase di allineamento che consente di disporre e distribuire correttamente i pannelli sulle *patch* di riferimento<sup>127</sup>.

Le generatrici dei nuovi elementi seguiranno la direzione delle curve asintotiche estratte, le quali esistono proprio perché i punti considerati dall'algoritmo

126 Eigensatz et al., p 22.

127 *Ibidem*.

hanno solo curvatura gaussiana nulla o negativa<sup>128</sup>. Infine, l'algoritmo minimizza la somma dei quadrati delle distanze calcolate tra i punti delle tipologie di superfici scelte e quelli della superficie di ingresso. Tra i vantaggi derivanti dall'uso di questo algoritmo emerge sicuramente la possibilità di ridurre i costi di realizzazione totale per una percentuale pari anche al 50% del costo totale<sup>129</sup>. È importante sottolineare che ai fini della discretizzazione di una superficie complessa assume particolare importanza il sistema di curve attraverso cui la stessa viene discretizzata. Utilizzare una rete di curve coniugate, ed in particolare le linee di curvatura principale, consente di ridurre la divergenza che c'è tra i pannelli che discretizzano la superficie approssimandone nella migliore maniera possibile l'andamento complessivo<sup>130</sup>.

128 Tonelli 2012, pp. 7-8.

129 Pottmann 2008, pp. 15-28.

130 *Ibidem*.