# I DATI INVALSI COME STRUMENTO PER MIGLIORARE LA DIDATTICA DELLA MATEMATICA

IV Seminario "I dati INVALSI: uno strumento per la ricerca e la didattica"

a cura di
Patrizia Falzetti

FrancoAngeli
OPEN ACCESS

INVALSI

INVALSI PER LA RICERCA
STUDI E RICERCHE

## INVALSI PER LA RICERCA

La collana Open Access INVALSI PER LA RICERCA si pone come obiettivo la diffusione degli esiti delle attività di ricerca promosse dall'Istituto, favorendo lo scambio di esperienze e conoscenze con il mondo accademico e scolastico.
La collana è articolata in tre sezioni: "Studi e ricerche", i cui contributi sono sottoposti a revisione in doppio cieco, "Percorsi e strumenti", di taglio più divulgativo o di approfondimento, sottoposta a singolo referaggio, e "Rapporti di ricerca e sperimentazioni", le cui pubblicazioni riguardano le attività di ricerca e sperimentazione dell'Istituto e non sono sottoposte a revisione.



ISBN 9788835123972

ISBN 9788835123972

# I DATI INVALSI COME STRUMENTO PER MIGLIORARE LA DIDATTICA DELLA MATEMATICA

IV Seminario "I dati INVALSI: uno strumento per la ricerca e la didattica"

a cura di
Patrizia Falzetti

INVALSI

FrancoAngeli
OPEN ACCESS

ISBN 9788835123972

Le opinioni espresse nei lavori sono riconducibili esclusivamente agli autori e non impegnano in alcun modo l'Istituto. Nel citare i contributi contenuti nel volume non è, pertanto, corretto attribuirne le argomentazioni all'INVALSI o ai suoi vertici.

*Grafica di copertina*: Alessandro Petrini



ISBN 9788835123972

# *Indice*





ISBN 9788835123972

ISBN 9788835123972

# *Introduzione*

di Patrizia Falzetti

Nel novembre 2019 si è svolta a Roma la quarta edizione del Seminario "I dati INVALSI: uno strumento per la ricerca e la didattica". Un appuntamento che da anni, grazie ai dati raccolti dall'Istituto, dà vita a un ricco dibattito tra il mondo della ricerca e della scuola. Nel presente volume sono stati raccolti una parte dei contributi che ricercatori e docenti hanno presentato al Seminario e che sono dedicati alla didattica della Matematica. La letteratura è ricca di argomentazioni a favore della materia, una disciplina affascinante e variegata che abbraccia molte aree di studio. Spazia dall'analisi (matematica e numerica) all'algebra, dalla geometria al calcolo delle probabilità e alla fisica matematica. Studiare Matematica significa, quindi, avere una visione d'insieme di tutti questi settori di studio e permette di sviluppare capacità per trovare soluzioni a vari problemi in situazioni quotidiane. I diversi autori per i loro studi non si sono avvalsi esclusivamente dei punteggi ottenuti alle prove, ma anche di ciò che precede il risultato finale, come gli errori che gli studenti commettono e i singoli quesiti proposti. Un utilizzo dei dati di questo tipo conferma come le Rilevazioni nazionali degli apprendimenti offrano spunti di ricerca sotto molteplici punti di vista.

Il volume è articolato in sei capitoli. Nel primo viene presentata una ricerca in ambito geometrico e algebrico che coinvolge studenti del biennio della scuola secondaria superiore. Nel capitolo successivo si studia la possibilità di realizzare un *curriculum* a spirale, il cui obiettivo è che gli studenti approfondiscano le loro conoscenze in modo progressivo nel corso degli anni scolastici. Partendo da un approccio intuitivo si prosegue con approfondimenti ciclici e successivi ritorni e iterazioni, con l'obiettivo di comprendere, rafforzare e sviluppare le idee fondanti che sono alla base della disciplina stessa. Nel lavoro di ricerca del terzo capitolo, gli autori analizzano le diverse tipologie di errori e di strategie risolutive che gli studenti coinvolti nelle



ISBN 9788835123972

Rilevazioni nazionali attuano. Nel quarto si illustrano i risultati di un lavoro, in parte già presentato in occasione della seconda edizione del Seminario (Firenze, 17-18 novembre 2017). Il contributo presente in questo volume descrive il Quadro di riferimento teorico che permette l'analisi del testo di un quesito. Attraverso la definizione di alcuni criteri di classificazione del testo stesso e, a partire da tale classificazione, si consente l'individuazione di eventuali difficoltà di comprensione che gli studenti possono incontrare durante il processo interpretativo del quesito. Gli autori del quinto capitolo, invece, si interrogano sull'atteggiamento che gli studenti di diverso ordine e grado hanno nei confronti della Matematica, proprio in virtù del fatto che la disciplina, ormai da diverso tempo, viene ritenuta fra quelle più rilevanti per la crescita economica dei Paesi e lo sviluppo delle professionalità del futuro. Il sesto e ultimo capitolo illustra modalità e risultati di un lavoro realizzato in due classi seconde di secondo grado sul tema dei modelli lineari: l'attività è stata articolata intorno a una selezione di alcuni item INVALSI. L'intero volume ben rappresenta, quindi, come le prove INVALSI riescano nell'obiettivo di avvicinare il mondo della ricerca e quello della scuola. Sia i ricercatori sia gli insegnanti forniscono esempi di come il confronto tra idee ed esperienza dia vita a progetti concreti che possono essere utilizzati in modo formativo per migliorare l'azione didattica, in una prospettiva di sviluppo delle competenze matematiche.



ISBN 9788835123972

# *1. Leggere una figura geometrica. Dinamiche tra gli aspetti concettuali e figurali e ricadute sulla valutazione*

di Chiara Andrà, Rosa Iaderosa

Presentiamo alcuni risultati e riflessioni emersi nel corso di una ricerca in ambito geometrico e algebrico, realizzata presso il Politecnico di Milano, attraverso momenti laboratoriali con studenti liceali del biennio della scuola secondaria di secondo grado. Il tema del percorso al quale hanno partecipato gli studenti è stato: "Argomentazione e dimostrazione".

In particolare, esaminiamo i risultati di un'esperienza che metteva a fuoco la questione *dell'interazione concettuale-figurale* nell'apprendimento della Geometria. Il collegamento con le ricerche correlate alle prove INVALSI sarà meglio chiarito nel corso della trattazione. Sono stati raccolti elaborati scritti, prodotti dai ragazzi, che hanno consentito l'identificazione di livelli di competenza diversi nel leggere una figura geometrica, nel coordinare aspetti intuitivi e aspetti teorici, attraverso l'argomentazione, con un maggiore o minore controllo sull'uso di connettivi logici e inferenze. In questo contributo introduciamo la problematica di ricerca e delineiamo gli aspetti metodologici, soffermando l'attenzione sul contesto delle attività e sul quesito analizzato, presentiamo il quadro teorico di riferimento per l'analisi dei dati raccolti, e concludiamo con alcuni spunti che riteniamo possano essere utili agli insegnanti per la didattica e una valutazione formativa, nell'ambito dell'argomentazione in Geometria.

*We present some results and reflections that emerged during a research in geometry and algebra, carried out at the Polytechnic of Milan, through workshops with high school students from grades 9-10 (15-16 years old). The topic of the activities was "Argumentation and proof".*

*In particular, we examine the results from an activity that focused on the issue of conceptual-figural relationship in geometry. The relations with researches related to INVALSI tests are illustrated in the paper. Students'*



ISBN 9788835123972

*written protocols were collected and allowed us to identify different levels of competence in reading a geometric figure, in coordinating intuitive and theoretical aspects, through argumentation, with greater or lesser control on the use of logical connectives and inferences. In this paper, we introduce the research problem and outline the methodological aspects, focusing our attention on the context of the activities and on the questions analysed, we present the theoretical framework of reference for the analysis of the data collected, and we conclude with some ideas that we believe can be useful for teachers' formative assessment, in the context of argumentation in geometry.*

## 1. Introduzione

L'analisi dei risultati delle prove INVALSI ha messo in luce recentemente l'importanza delle figure presenti negli item, e dei testi che le accompagnano, anche per quanto riguarda le relazioni tra testo scritto e immagine, la loro disposizione, e tutto ciò che può contribuire all'interpretazione complessiva dell'item. Alcuni tra questi prevedono risposte aperte che chiedono anche di selezionare le argomentazioni più appropriate, e quindi ampliano in maniera interessante il panorama delle tipologie di domande e l'analisi delle risposte fornite dagli studenti. Dalle ricerche legate a questi aspetti prende spunto il nostro lavoro di ricerca esplorativa. La figura che abbiamo utilizzato ci è parsa ricca di interesse per un'analisi *che andasse oltre le prove di valutazione standardizzate*, come cercheremo di illustrare. Riteniamo che la nostra esperienza possa fornire anche un contributo ai fini del problema della valutazione di prove di carattere geometrico.

L'indagine qui esposta riguarda *l'esplorazione* di una configurazione elaborata dai professori Bolondi, Branchetti e Giberti a seguito di uno studio condotto con alcuni studenti di scuola secondaria di primo e secondo grado sulla relazione testo-figura in problemi che richiedono un'argomentazione. Tale ricerca, i cui risultati preliminari sono stati presentati al convegno internazionale "ETC7 – Language in the mathematics classroom" (Bolondi, Branchetti e Giberti, 2020), rientra nell'ambito di una ricerca più ampia che gli autori stanno conducendo da qualche anno sull'impatto della formulazione del testo sulle strategie risolutive degli studenti, con grande attenzione ai risultati delle prove INVALSI e ai testi dei quesiti (si veda per esempio Bolondi, Branchetti e Giberti, 2018). Le ricerche sono di tipo misto, quantitativo e qualitativo, e in entrambe le fasi i dati quantitativi forniti da INVALSI e i testi degli item delle prove giocano un ruolo significativo: si osservano macro-fenomeni quantitativi nei risultati delle prove, si indagano qualitati-



ISBN 9788835123972

vamente tali risultati, poi si torna sul campo usando come *core test* quesiti selezionati da prove INVALSI e si esplorano gli effetti di variazioni minime del testo sulle scelte degli studenti in fase di risoluzione del quesito. Infine, si esplorano, in un'ulteriore fase qualitativa, i processi di metacognizione attivati dagli studenti nella lettura e nella risoluzione, tramite interviste. La configurazione proposta è analoga ad altre costruzioni che si sono rivelate efficaci per far emergere le modalità, che rimangono spesso invisibili, con cui gli studenti si relazionano alla figura per estrapolare da essa informazioni utili alla risoluzione del problema, che possono essere di natura solo percettiva o risultato di una proficua interazione tra aspetti concettuali e figurali degli oggetti rappresentati.

Per inquadrare il problema oggetto di questo studio in maniera più ampia, citiamo la seguente frase di R. Duval (1995), che pone l'accento sull'importante differenza tra gli aspetti percettivi, ossia "ciò che si vede", di una figura geometrica, e gli aspetti concettuali, i quali non necessariamente "si vedono" in una data rappresentazione e hanno un valore universale: «Le figure geometriche portano con sé proprietà puramente qualitative che sembrano radicate nella percezione. Esse rimandano a forme che sono percettivamente notevoli e culturalmente familiari…». Eppure, sostiene l'autore, «la radice profonda delle difficoltà nell'insegnamento della geometria dovrebbe essere cercata proprio nelle figure, in questa intuizione geometrica che si appoggia sulla percezione». Analizziamo il perché in quanto segue.

Nella formazione scolastica «l'evoluzione del pensiero geometrico va ricercato a partire dalle prime esperienze spaziali del bambino fino alle più ardite e moderne teorie. Nei primi livelli scolastici questa disciplina è rivolta a organizzare l'esperienza visiva, tattile, motoria degli allievi, puntando l'attenzione su alcune caratteristiche spaziali degli oggetti e organizzandosi in seguito razionalmente in modo sempre più autonomo» (Sbaragli e Mammarella, 2010, p. 1). A scuola quindi si fa riferimento a forme concrete, presenti nella realtà, per schematizzarle e studiarle concettualmente nelle loro relazioni costruendo le teorie geometriche. È rassicurante per chi insegna e per chi apprende dare sostegno ai concetti geometrici attraverso il richiamo a queste forme. Ciò, tuttavia, può rappresentare un ostacolo all'apprendimento della Geometria come teoria matematica: *non è automatico che le caratteristiche teoriche di una figura vengano implicitamente associate alla forma che riconosciamo nella realtà o nelle sue raffigurazioni*. Avviene poi che in una formazione geometrica più avanzata emerga un *conflitto cognitivo* tra ciò che una rappresentazione figurale in Geometria consente di percepire e di interpretare, e ciò che invece la teoria, costruita ed evocata anche attraverso l'esplicitazione linguistica, permette di "visualizzare". Poiché gli oggetti



ISBN 9788835123972

della Geometria sono ideali, non sono direttamente accessibili mediante la percezione visiva, necessitano di varie rappresentazioni per essere compresi. È quindi indispensabile, ai fini di un apprendimento corretto e graduale della Geometria, che venga curata didatticamente l'*armonizzazione* tra *visione percettiva* degli schemi rappresentativi astratti (le *figure*) delle forme, e la loro *visualizzazione* attraverso la costruzione del quadro della teoria geometrica. Tale armonizzazione passa necessariamente anche attraverso la rappresentazione verbale, con un accurato uso del linguaggio.

Riteniamo quindi, proprio al fine di approfondire e monitorare le difficoltà di armonizzazione tra percezione visiva e costruzione di un pensiero teorico, che sia opportuno proporre agli studenti delle attività studiate proprio per mettere in luce nelle loro interpretazioni le interrelazioni e i conflitti tra aspetti figurali (immagini) e aspetti concettuali (definizioni e teoremi).

## 2. La figura oggetto dello studio


*Fig. 1 – La scheda elaborata inizialmente per la nostra attività*

Il problema da noi formulato è di indagine, richiede un'esplorazione delle relazioni tra gli elementi della figura qui presentata, che è più o meno fine e appropriata a seconda del tipo di concettualizzazione raggiunto dallo studente. Questo rientra nella più ampia problematica riguardante *l'identificazione di livelli di competenza crescente nell'argomentare in Geometria*: dal lavorare sulla figura direttamente, per esempio misurando, al lavorare concettualmente su ciò che rappresenta; dal ricorrere agli aspetti algoritmici



ISBN 9788835123972

e calcolativi a un approccio esplorativo basato su assunti espliciti di proprietà e su concatenazioni di affermazioni, con il controllo dei connettivi logici e il ricorso alla teoria di riferimento. Riteniamo che questo problema possa mettere in luce e rappresenti bene quanto sia culturalmente complesso, nella scuola, il passaggio da ciò che la nostra percezione visiva induce nella *lettura* di una figura geometrica, a quello che teoricamente essa rappresenta, con l'insieme delle sue proprietà.

A partire dalla figura in oggetto, particolarmente interessante perché evocatrice di molte proprietà, sia a livello percettivo, sia a livello intuitivo, si è voluto indagare su come studenti che stavano affrontando lo studio della Geometria razionale, nel primo biennio della scuola secondaria di secondo grado, in particolare di indirizzo liceale, riuscissero a riflettere su quali proprietà della figura si potessero *dedurre logicamente* dalle sole informazioni *verbali e grafiche* fornite. Provocatoriamente, queste ultime sono veramente pochissime: possiamo dire che i segmenti AC e BD non sono congruenti perché, anche presupponendo tangenti le circonferenze con centro in B e D rispettivamente, la metà del segmento BD è minore o al più uguale al raggio delle circonferenze con centri in B e D, mentre la metà del segmento AC è maggiore del raggio delle circonferenze con centri in A e C (questo ci è assicurato dalla visualizzazione, perché le due circonferenze di centri A e C sono chiaramente esterne). Da questo segue che il quadrilatero ABCD non è certamente un quadrato. La tangenza delle due circonferenze con centro in B e D non è invece del tutto assicurata da "quanto appare": come potrebbe la risoluzione del disegno garantire che le due circonferenze siano tangenti e non abbiano, invece, due punti di intersezione? E ancora, se le simmetrie assiali di asse AC e BD, intuitivamente suggerite dalla visione, non fossero rispettate, potremmo avere il punto di intersezione delle rette di AC e BD, diverso dal punto medio di BD, la perpendicolarità apparente di queste rette potrebbe non esserci ecc. (*tutti questi aspetti potrebbero essere analizzati in maniera più fine realizzando la costruzione con un software di Geometria dinamica, imponendo solo l'uguaglianza dei raggi delle 4 circonferenze*).

Dal momento che la figura contiene elementi che percettivamente inducono a considerare proprietà che non si possono dedurre se ci si basa esclusivamente sulle informazioni date nel testo, la sua analisi può essere problematica. La figura risulta quindi *un utile strumento per indagare come studenti del primo biennio della scuola secondaria di secondo grado*, che cominciano a confrontarsi scolasticamente con attività di Geometria razionale, collocate in un sistema assiomatico-deduttivo, *riescano a coordinare aspetti percettivi e conoscenze teoriche*. Più precisamente, obiettivo e senso di questa esperienza – grazie alle argomentazioni sollecitate negli studenti – sono stati quelli di



ISBN 9788835123972

analizzare le modalità di analisi della figura, di rilevare i conflitti tra aspetti visivamente intuitivi nell'interazione con quelli logico-deduttivi e di studiare i tipi di ragionamento attuati per il loro superamento.

## 3. Un quadro teorico cui fare riferimento per questo problema: le teorie di Efraim Fischbein e di Raymond Duval

Molte sono le ricerche, nel panorama internazionale, che si sono occupate di studiare il problema della dinamica concettuale-figurale nell'apprendimento della Geometria, e alle quali abbiamo fatto riferimento nell'impostare uno studio sperimentale che avesse questo come tema centrale.

In particolare ci sono sembrati rilevanti per questo studio la *teoria dei concetti figurali* di E. Fischbein (1993), che chiarisce la natura dei concetti geometrici, e i lavori di R. Duval (1995) sui vari registri di rappresentazione degli oggetti matematici e sui problemi del loro coordinamento. Ci è sembrato che entrambi i modelli, in maniera complementare, potessero fornire strumenti adeguati a interpretare i processi di pensiero degli studenti.

La teoria dei *concetti figurali* di Fischbein sottolinea come i concetti della Geometria abbiano due componenti, una figurale e una concettuale: «un concetto figurale è un'entità mentale che è controllata da un concetto, ma che preserva la sua spazialità» (Fischbein, 1993, p. 142). Di fatto, la conoscenza geometrica si costruisce inizialmente a partire dall'osservazione e dal riconoscimento di forme nella realtà che ci circonda, che inducono in noi la formazione di immagini mentali. Gradualmente, al riconoscimento percettivo di queste forme si aggiungono aspetti teorici per cui la rappresentazione iconica viene sostituita da un'altra arricchita da tutti gli aspetti che caratterizzano un concetto in maniera astratta. Per la Geometria tuttavia quella iconica rimane una componente del concetto, che fa riferimento alle immagini mentali che si sono formate inizialmente. Durante l'evoluzione dell'attività di concettualizzazione, il disegno diventa una rappresentazione sempre più vicina al concetto geometrico, e di questo gli allievi acquistano consapevolezza attraverso attività che fanno cogliere la molteplicità di caratteristiche per una figura, che può corrispondere a diversi disegni, variandone le dimensioni, o altre proprietà non caratteristiche, conservando quindi il richiamo al concetto che essa rappresenta. Avviene così, per esempio, scolasticamente il passaggio dal *disegno* alla *figura*. Troviamo, in questa teoria, una caratterizzazione dei concetti geometrici molto particolare, in quanto in generale un concetto assume caratteristiche di astrazione che lo svincolano in parte dalle possibili rappresentazioni figurali.



ISBN 9788835123972

La componente figurale costituisce comunque un elemento di *completezza*, ma anche di *problematicità* da un punto di vista didattico, nella formazione completa del concetto geometrico. Spesso un'incompleta e poco variata esperienza di chi apprende, a partire da queste rappresentazioni iconiche, può condurre a una visione più limitata o inesatta del concetto figurale. Alcuni studi, più recenti, hanno evidenziato che la componente iconica, ossia l'identificazione di un grafico con un disegno, permane anche in studenti di livello universitario o pre-universitario, e costituisce un ostacolo importante all'apprendimento di concetti nell'ambito del calcolo differenziale (si veda per esempio Ivanjek *et al.*, 2016).

Gli studi di Duval (1995), poi, ci hanno reso consapevoli di come sia necessario *costruire didatticamente* l'armonizzazione tra una visione più intuitiva e una visualizzazione più evoluta della figura geometrica. Duval si concentra sulle condizioni cognitive dell'apprendimento della Geometria, puntando l'attenzione su alcuni dei problemi più spinosi: lo sviluppo della visualizzazione, la differenziazione dei ragionamenti che caratterizzano il discorso geometrico e il suo apprendimento, il coordinamento dei suoi funzionamenti (D'Amore e Duval, 2019). Richiamiamo qui di seguito gli aspetti centrali di questo approccio.

## 4. Gli studi di Duval

### *4.1. Il dire e il vedere*

I matematici adulti spesso nell'insegnare danno per scontato che *vedere* e *capire* siano operazioni mentali non disgiunte: ci sono rappresentazioni mentali di una configurazione geometrica, attraverso i teoremi e le definizioni della teoria, che non hanno neppure bisogno di rappresentazioni iconiche. Per l'allievo invece non è così, va insegnata dal basso questa duplice capacità di "vedere" la figura: da un lato nella sua iconicità, dall'altro attraverso l'esplicitazione e la consapevolezza delle proprietà che la sua costruzione e la teoria ci garantiscono, anche al di là degli aspetti iconici. Per questo motivo, le attività in cui il linguaggio esplicita e descrive la costruzione geometrica, quindi le attività di tipo argomentativo, a scuola sono assolutamente essenziali. J. Mason chiama questo particolare modo di apprendere, fondato sia sull'osservazione della figura sia sul lavoro fondamentale dell'insegnante che, attraverso il linguaggio e l'interazione, guida lo studente a notare gli aspetti salienti di essa, *noticing* (Mason, 2002). In italiano potrebbe essere tradotto con "osservare con consapevolezza" e, per quanto riguarda questo



ISBN 9788835123972

caso, il termine esprime quella capacità di concentrarsi sulle proprietà di una figura geometrica, sia quelle rese esplicite dalla particolare rappresentazione sia quelle per così dire nascoste.

Secondo Duval esistono due modi di esplorare la figura: c'è un'esplorazione visiva di tipo *euristico*, in cui il soggetto può individuare vari elementi di essa, senza necessariamente rifarsi a un'esplicitazione verbale e all'individuazione delle proprietà connesse a quanto si vede; esiste poi un altro modo di vedere, attraverso quella che Duval chiama *decostruzione dimensionale* delle forme, che richiede un'esplicitazione, attraverso il linguaggio, di definizioni e teoremi, in quanto analizza le relazioni tra i vari elementi che compongono la figura. Un esempio eclatante di questo secondo modo di vedere può essere quello con cui noi riusciamo a leggere un'immagine che rappresenta una scena in tre dimensioni in una sua rappresentazione prospettica sul piano. In questo caso immaginiamo nella nostra mente delle rette e il punto di fuga, in maniera tale da riuscire a interpretare, attraverso una *destrutturazione* dell'immagine in due dimensioni e poi in una dimensione, le relazioni tra questi elementi della scomposizione, e riusciamo ad avere una lettura della figura più vicina agli aspetti teorici che non a quanto si possa cogliere da un'esplorazione più intuitiva e di primo livello.

Ancora, come possiamo renderci conto, per esempio, in una rappresentazione 2D di un cubo, che una delle sue diagonali risulta inserita in un triangolo rettangolo i cui lati sono uno spigolo e una diagonale di base? Ciò è possibile soltanto attraverso una *decostruzione* della figura tridimensionale, che nella nostra mente operiamo, isolando il triangolo la cui visione non mette in evidenza sulla figura nel suo complesso questa proprietà.

Nella figura da noi sottoposta agli studenti è possibile compiere un'esplorazione di primo livello, che fa cogliere intuitivamente le relazioni tra i vari elementi della configurazione esaminata: le circonferenze viste come tangenti alle rette, i quadrilateri colti in modo intuitivo, in modo tale da identificarli come quadrilateri con delle proprietà notevoli, anche troppo, arrivando a confondere rombi, quadrati, rettangoli. Solo una lettura più evoluta della figura, che richiede conoscenze geometriche e studi più avanzati, consente di *destrutturare* questa configurazione in unità di dimensione inferiore, fino alle rette, ai segmenti, ai punti. In questo modo ci si riconduce a un consapevole riferimento a definizioni e teoremi, e si risale a quelle che sono le ipotesi possibili da assumere, senza introdurne arbitrariamente altre, attraverso un'esplicitazione delle forme e delle relazioni tra esse *attraverso il linguaggio*. L'aspetto interessante di quanto sostiene Duval è che paradossalmente, come si vede in questo caso da noi studiato, non è sufficiente, per leggere correttamente la figura, partire dalla sua *costruzione*. È piuttosto la capa-



ISBN 9788835123972

cità di ottenerne successivamente una *decostruzione* più consapevole che conduce a individuare quali siano e quali non siano le proprietà che è lecito assumere per essa. Ciò è estremamente interessante dal punto di vista dell'insegnamento: in un primo momento i ragazzi possono scomporre la configurazione, individuando tutte le forme riconoscibili attraverso i loro contorni chiusi. Che cosa manca, però, a questo primo livello? Manca la capacità di immaginare e individuare nella stessa configurazione tutte le configurazioni possibili, variando le relazioni tra i suoi elementi. Ciò richiede, quindi, una conoscenza e un uso della visione che supera la percezione visiva, e che parte, dice Duval, da un'*educazione allo sguardo*. Come guardando un quadro non tutti vediamo la stessa cosa, così nella lettura di una figura è necessario imparare ad andare oltre quello che la nostra percezione ci offre.

### *4.2. Il ruolo del linguaggio*

Per analizzare il ruolo del linguaggio in Geometria, dice Duval, bisogna distinguere tre livelli di operazioni discorsive: la *denominazione*, l'*enunciazione* di proprietà, la *deduzione*. Questa distinzione è essenziale perché il *rapporto del linguaggio con la visualizzazione* cambia radicalmente da un livello all'altro. Secondo Duval, condizione cognitiva per controllare e costruire i concetti figurali in Geometria, è la *sinergia tra visualizzazione e linguaggio. L'analisi di queste difficoltà va quindi operata partendo da un'educazione geometrica elementare*.

Le difficoltà di apprendimento della Geometria razionale traggono origine dal fatto che questi due registri sono utilizzati in modo spesso contrario al loro funzionamento cognitivo normale al di fuori della Matematica. Solo con un insegnamento attento a seguire le tappe, che Duval indica, e descrive molto puntualmente, è possibile costruire gradualmente la capacità di visualizzare correttamente le figure, in relazione alle proprie conoscenze teoriche. Attraverso tali tappe si sviluppa la capacità di analizzare una configurazione "decostruendola", cioè analizzandone i suoi elementi anche in un passaggio dalla dimensione tridimensionale a quella bidimensionale e unidimensionale, in riferimento a quanto esplicitato attraverso il linguaggio. È necessario conciliare una visione della figura centrata sulla sua costruzione con strumenti teorici e un altro modo di guardarla, arricchito da quanto lo sguardo vede. Citiamo Duval: «È la percezione che origina il problema. Non solo essa funziona nella dissociazione tra grandezza e discriminazione visuale delle forme, ma soprattutto impone una maniera comune di vedere le figure che va incontro a due modi, sollecitati nell'insegnamento della Matematica:



ISBN 9788835123972

uno centrato sulla costruibilità con l'aiuto di strumenti, e l'altro centrato sull'arricchimento euristico per farvi apparire forme che non sono quelle che lo sguardo vi vede. Il passaggio dal funzionamento abituale della percezione delle forme a questi due modi di guardare, soprattutto il secondo, può essere una difficoltà per gli allievi» (1995, p. 7).

La comprensione dei contenuti si può quindi costruire solo a partire da questa sinergia tra visualizzazione e linguaggio; lo sviluppo e la coordinazione tra le due forme rappresentative (forme e linguaggio) devono essere considerati come *obiettivi di insegnamento*.

## 5. La nostra sperimentazione

Per i notevoli spunti di riflessione didattica che la figura presentata può fornire, come già detto, ci siamo proposte di presentarla a studenti del biennio della scuola secondaria di II grado, frequentanti i laboratori didattici tenuti presso il Politecnico di Milano sul tema "Argomentazione e dimostrazione". A nostro giudizio, gli studenti dei nostri laboratori costituivano un campione privilegiato tra gli studenti dei primi due anni della scuola secondaria di secondo grado, tutti svolgevano regolarmente nel loro curricolo scolastico un percorso di Geometria razionale con buoni esiti. Per questo motivo, abbiamo ritenuto interessante rilevare e studiare le loro reazioni e risposte. Considerato che, comunque, si trattava di un'attività difficile, abbiamo deciso di organizzarli in piccoli gruppi e di osservare le loro discussioni, rilevando e annotando le prime reazioni degli studenti nei vari gruppi, prima che ciascuno consegnasse le proprie risposte. Successivamente si è proceduto a una discussione collettiva a riguardo.

Abbiamo proposto l'analisi della figura a diversi gruppi, composti ciascuno da 15-20 studenti, operando in tempi successivi. Sin dalle prime esperienze abbiamo notato che gli aspetti percettivi, cioè le proprietà che il disegno lascia intuire, influenzavano molto le risposte dei ragazzi.

Le loro reazioni hanno confermato quasi sempre l'assunzione di ipotesi tacite, oltre le ipotesi esplicitate e scritte sul foglio a lato della figura, *alcune più ricorrenti di altre*. È emersa subito la prevalenza di una lettura percettiva, che metteva in secondo piano il coordinamento con le ipotesi esplicitate e con quanto da esse era possibile dedurre. Quanto alle ipotesi tacite, è necessario precisare *quanto ci aspettavamo dalle prestazioni dei ragazzi*. In effetti, alcuni dati suggeriti dalla visualizzazione in qualche modo assicurano che i segmenti AB e CD non sono congruenti, in quanto è precisato nelle ipotesi che i raggi delle quattro circonferenze sono uguali e nella figura è ben visi-



ISBN 9788835123972

bile nel segmento AC una parte in più della somma dei due raggi. Da questo discende che il quadrilatero ABCD non può essere un quadrato. Le ulteriori proprietà di un generico parallelogrammo o di rombo discenderebbero dalla tangenza delle due circonferenze di centri B e D, dalla perpendicolarità di AC e BD, dalla simmetria, intuibile osservando la figura, rispetto al punto di intersezione di AC e BD. Eravamo quindi convinte che, mentre l'escludere la possibilità di ABCD quadrato fosse giustificabile percettivamente, le altre ipotesi assunte avrebbero dovuto essere considerate di livello diverso, e che *si sarebbe dovuto precisare che la visualizzazione induce a ritenere valide le proprietà che ne derivano, ma che non è possibile affermarlo in base alle informazioni date*.

Ci attendevamo che gli studenti precisassero quali fossero le ipotesi da esprimere a livello linguistico affinché il quadrilatero sia un parallelogramma, e quelle da aggiungere affinché il quadrilatero sia un rombo.

Riguardo a questo, in effetti, le nostre aspettative sono state confermate, ma solo in pochi casi. Per esempio, studenti consapevoli di questa distinzione si sono espressi affermando a proposito della perpendicolarità di AC e BD, o altro di quanto evidenziato, dicendo: "è vero, ma non si può dimostrare".

Poiché la somministrazione della scheda nella prima versione non aveva fatto emergere con chiarezza queste riflessioni da parte di molti ragazzi, abbiamo proposto successivamente con altri studenti versioni rimaneggiate del testo, sempre più analitiche nelle richieste, nel tentativo di *forzare* gli studenti a richiamare la teoria, osservando la figura. Nostro obiettivo prioritario, come si è detto, era *indagare su quanto essi riuscissero a coordinare le informazioni date verbalmente con ciò che la figura induce visivamente*. Le schede, in varie versioni, richiedevano in modo sempre più puntuale di risalire alla matrice teorica che caratterizza le figure in gioco, richiedendo una riflessione più puntuale che rimandasse il più possibile alle definizioni e ai teoremi soggiacenti, che i ragazzi in effetti conoscevano. Proponiamo la seguente versione, la più analitica, che ha dato tuttavia risultati analoghi a quelli delle altre formulazioni, e ha quindi messo in luce maggiormente gli aspetti problematici di quest'attività.



ISBN 9788835123972

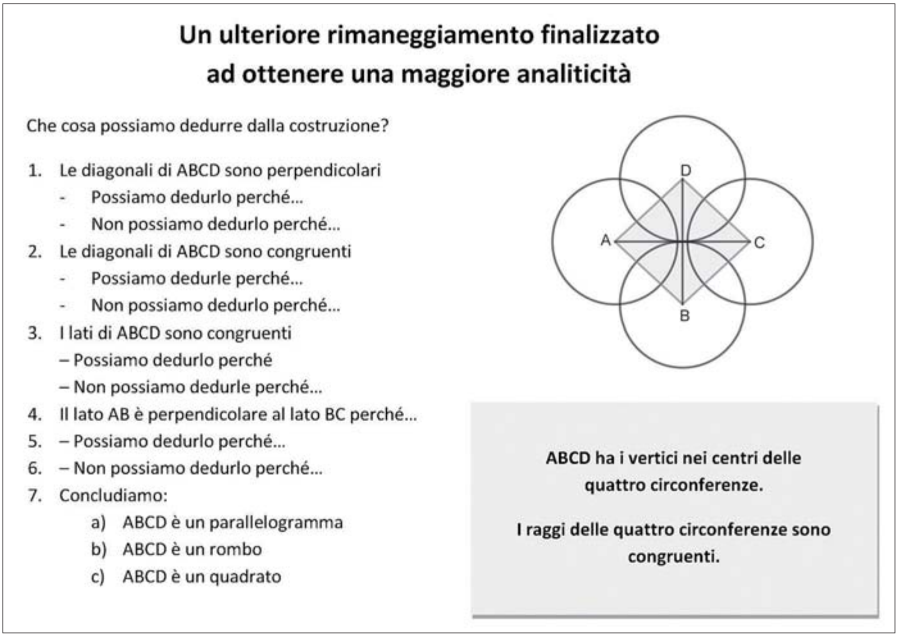



*Fig. 2 – La scheda rimaneggiata nella formulazione più analitica*

Tra i risultati, di cui non possiamo riportare la tabulazione per le dimensioni di questo capitolo, rileviamo che gli asserti più accettati sono stati:

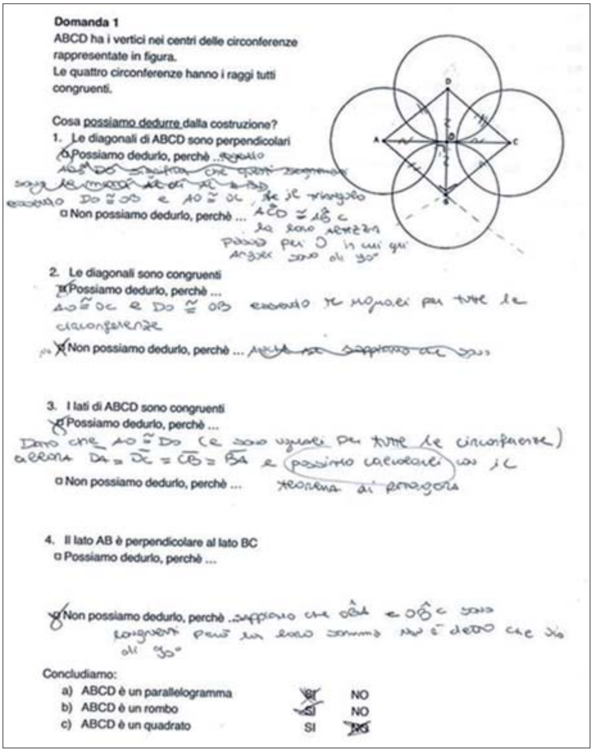
– i lati congruenti a due a due per il quadrilatero ABCD (la maggioranza dei ragazzi ha riconosciuto ABCD come parallelogrammo o rombo, pochi come semplice quadrilatero o come quadrato);
– il punto di intersezione di AB e CD come punto medio di entrambi i segmenti; la tangenza di due delle quattro circonferenze.

Riportiamo qui alcuni protocolli che ci sembrano significativi di quanto esposto:

– in figura 3 lo studente fonda le proprie argomentazioni sul fatto che i raggi delle due circonferenze sono uguali, però deduce da questa premessa più di quanto sarebbe consentito fare sulla base delle sole ipotesi esplicitate;
– in figura 4 gli studenti deducono correttamente che ABCD non sia un quadrato, ma argomentano che sia un rombo a partire da premesse che non è lecito assumere, ossia che i lati siano paralleli.



ISBN 9788835123972



Domanda 1
ABCD ha i vertici nei centri delle circonferenze rappresentate in figura.
Le quattro circonferenze hanno i raggi tutti congruenti.

Cosa possiamo dedurre dalla costruzione?
1. Le diagonali di ABCD sono perpendicolari
- Possiamo dedurlo, perché ...
- Non possiamo dedurlo, perché ...

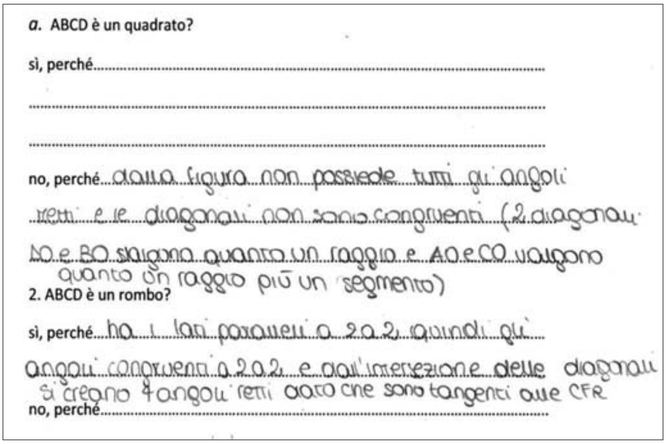
2. Le diagonali sono congruenti
- Possiamo dedurlo, perché ...
- Non possiamo dedurlo, perché ...

3. I lati di ABCD sono congruenti
- Possiamo dedurlo, perché ...
- Non possiamo dedurlo, perché ...

4. Il lato AB è perpendicolare al lato BC
- Possiamo dedurlo, perché ...
- Non possiamo dedurlo, perché ...

Concludiamo:
a) ABCD è un parallelogramma SI NO
b) ABCD è un rombo SI NO
c) ABCD è un quadrato SI NO

*Fig. 3 – Il tentativo di conciliare il metodo dimostrativo che gli studenti stavano apprendendo con assunti in parte forniti e in parte taciti: mettono in atto schemi appresi per dimostrare, senza accorgersi di ipotesi che non era lecito assumere*



*a.* ABCD è un quadrato?

sì, perché...

no, perché dalla figura non possiede tutti gli angoli retti e le diagonali non sono congruenti (2 diagonali DO e BO valgono quanto un raggio e AO e CO valgono quanto un raggio più un segmento)

2. ABCD è un rombo?

sì, perché ha i lati paralleli a 2 a 2 quindi gli angoli congruenti a 2 a 2 e dall'intersezione delle diagonali si creano 4 angoli retti dato che sono tangenti alle CFR

no, perché...

*Fig. 4 – Una gestione in parte consapevole e in parte basata su aspetti percettivi*



ISBN 9788835123972

Questi risultati hanno, anche in questo caso, messo in luce quanto sia lungo e graduale il percorso scolastico che conduce gli studenti ad attuare quello che Duval chiama il *riconoscimento cognitivo degli "oggetti" che le forme visualmente riconosciute rappresentano*. È emerso quindi, in questa esperienza, il *divario cognitivo* tra *conoscere* e *riconoscere*. La dominanza della lettura percettiva della figura ci ha consentito di constatare l'ancora inadeguata (nel biennio della scuola secondaria di secondo grado) capacità di deduzione di proprietà geometriche nel quadro teorico euclideo, e soprattutto la difficoltà di coordinamento tra conoscenza e visione. Abbiamo rilevato anche a volte una mancanza di chiarezza, imprevista, sul significato di *deduzione*. Infatti, avevamo cercato di rendere la scheda il più analitica possibile, apportando modifiche sempre più puntuali al testo verbale, con l'obiettivo di forzare la loro attenzione su quanto venisse *garantito* dalla premessa, e quanto fosse realmente legittimo assumere per vero (cfr. fig. 2). Di fronte alle richieste, poste dopo ciascuna domanda, del tipo: "Possiamo dedurlo perché…/Non possiamo dedurlo perché…", spesso gli studenti confondevano linguisticamente, sul piano definitorio, parallelogramma, rombo e quadrato, e le condizioni sufficienti a caratterizzare queste varie figure. Inoltre, a volte l'escludere che si potesse *dedurre* una proprietà veniva identificato con l'attribuire la *falsità* a quell'enunciato.

Dobbiamo precisare che schede analoghe sono poi state da noi somministrate a studenti del triennio liceale, nelle stesse condizioni laboratoriali, e in quel caso tutte queste criticità apparivano ampiamente superate dal prevalere di una formazione teorica più avanzata. In questi casi ci è parso particolarmente interessante analizzare le loro risposte in merito alla questione: "come modificheresti le ipotesi per poter affermare che…", caso in cui abbiamo trovato risposte ben strutturate rispetto alla variabilità della figura in relazione alle ulteriori ipotesi.

Anche proponendo agli studenti liceali delle classi terza e quarta il compito di analizzare le risposte degli studenti del primo biennio, abbiamo trovato interessanti riscontri su una loro maggiore consapevolezza acquisita nell'ambito della Geometria razionale.

Riportiamo qui un esempio di *lettura* della scheda formulata da ragazzi di seconda da parte di studenti di quarta, in cui appare questa maggiore consapevolezza: si sottolinea come non sia possibile la deduzione di alcune proprietà.



ISBN 9788835123972

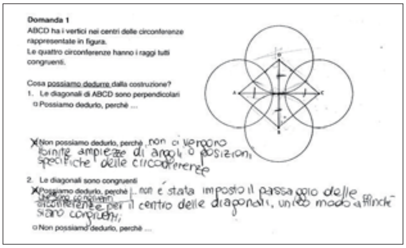



*Fig. 5 – Uno stralcio dei commenti di studenti più grandi nella lettura degli elaborati degli studenti di seconda*

In sintesi, gli elaborati dei ragazzi del biennio hanno mostrato quasi sempre l'assunzione di ipotesi tacite, quali: la *perpendicolarità* tra le rette di AB e CD e la *tangenza* delle circonferenze con centri in B e in D. La caratterizzazione del quadrilatero ABCD in termini di parallelogramma, rombo e quadrato a seconda dei casi, i criteri di riconoscimento della figura adottati, hanno confermato una certa *confusione tra aspetti visivi e linguaggio*, con la sovrapposizione e l'interazione degli aspetti percettivi rispetto alle conoscenze geometriche pregresse. Ci sono state *ipotesi aggiuntive più ricorrenti di altre*: la simmetria della configurazione rispetto al punto di intersezione tra BD e AC e il fatto che il quadrilatero ABCD avesse i lati congruenti e paralleli a due a due, hanno trovato maggiore frequenza. Alcuni, dopo aver assunto che ABCD fosse un parallelogrammo, hanno poi richiamato delle proprietà aggiuntive per affermare che ABCD fosse un rombo, o perché le diagonali fossero bisettrici degli angoli interni, oppure perché fossero perpendicolari tra loro. Quindi, una volta considerate le ipotesi tacitamente assunte, indotte dalla visione della figura, i ragazzi mostravano spesso la capacità di far riferimento ai teoremi studiati per affermare o escludere altre proprietà del quadrilatero ABCD. In diversi elaborati abbiamo trovato per esempio l'affermazione che escludeva che ABCD fosse un quadrato perché le diagonali non erano congruenti, cosa che nel quadrato deve necessariamente avvenire.

Le definizioni di parallelogrammo, rombo e quadrato, sono state più frequentemente ricondotte a una classificazione dovuta alla lettura visiva piuttosto che alle proprietà caratteristiche o definitorie di queste figure. A volte abbiamo trovato incoerenze: per esempio, veniva escluso che ABCD fosse un parallelogrammo e successivamente si affermava che fosse un rombo, il che a nostro giudizio era dovuto più a una confusione di tipo definitorio che non all'incapacità di riconoscere tali figure. Il quadro delle risposte si è presentato quindi in una mescolanza tra influenza degli aspetti visivi letti



ISBN 9788835123972

sull'immagine e tentativi di ricondursi, dovendo argomentare le risposte, a riferimenti alla teoria.

## 6. Conclusioni

In riferimento a quanto esposto, la nostra esperienza e le conseguenti riflessioni, relative all'interpretazione delle difficoltà osservate, suggeriscono alcune indicazioni significative importanti ai fini di una gestione didattica attenta alle difficoltà nella costruzione del pensiero teorico, e a una *valutazione formativa* di come si evolve la conoscenza geometrica.

Ricordando gli studi di Duval, è bene tenere conto che la visualizzazione e la produzione di enunciati in Geometria richiedono funzionamenti cognitivi che sono differenti e più complessi di quelli messi in opera fuori della Geometria. A riguardo, l'esercizio dell'argomentazione sin dall'insegnamento elementare della Geometria offre un contributo essenziale. Anche per l'argomentazione è necessaria un'educazione: la visualizzazione e la produzione di enunciati *in Geometria* richiedono funzionamenti cognitivi che sono differenti e più complessi di quelli messi in opera *fuori della Geometria*, il loro sviluppo e la loro coordinazione devono essere considerati come obiettivi di insegnamento *altrettanto essenziali* quanto gli stessi contenuti matematici.

È questo un contributo per noi estremamente rilevante che gli studi di Duval possono portare alla formazione dei docenti e alla necessità di promuovere e valutare poi scolasticamente l'apprendimento della Geometria razionale e della dimostrazione. Attualmente a scuola, infatti, si verifica spesso una situazione paradossale in cui di fatto nel biennio della scuola secondaria di secondo grado si trascura sempre più l'insegnamento della Geometria razionale, e della dimostrazione in Geometria. È proprio la Geometria, con le sue basi concettuali fortemente radicate nella percezione, a fare le spese di una carenza di formazione matematica più colta, e a nostro giudizio le cause sono proprio da ricercare nella difficoltà didattica di gestire l'armonizzazione di cui abbiamo parlato, tra visione, percezione, e teoria.

Il problema qui sembra interessante da evidenziare anche perché il delicato passaggio dalla Geometria intuitiva a quella razionale, promosso soprattutto dalle attività argomentative, andrebbe gestito in maniera più consapevole dal punto di vista didattico. Forse non sono curate sufficientemente attività, quali quella esaminata, che possano porre gli studenti di fronte alla distinzione tra ciò che induce a pensare la visione della figura e ciò che invece non ci autorizza a trarre come assunto (a riguardo, ricordiamo quelle figure che esasperano addirittura queste situazioni attraverso illusioni ottiche).



ISBN 9788835123972

Sarebbe necessario che l'insegnante disponesse anche di strumenti valutativi che gli consentissero di accertare diversi livelli di competenza degli studenti in questo ambito. Anche i livelli di competenza argomentativa non sono peraltro definiti e condivisi in un Quadro di riferimento comune.

Resta la necessità di seguire soprattutto attraverso una *valutazione formativa* e non solo *sommativa* l'evoluzione dei processi di pensiero a riguardo nel percorso scolastico all'inizio della scuola secondaria di secondo grado.

Inoltre, più specificamente in relazione alla nostra indagine, risultati importanti, di cui tenere conto, ci sembra possano essere:

- l'ancora difficile controllo sul linguaggio specifico nel biennio della scuola secondaria di secondo grado;
- la difficile distinzione tra proprietà osservate e proprietà dimostrate;
- la difficoltà a stabilire le inferenze possibili per dedurre una certa cosa;
- la chiarezza sul significato della parola *dedurre*.

Di fronte a una configurazione contenente aspetti percettivi "forti" sarà interessante accertare la consapevolezza della distinzione tra le varie proprietà delle figure, sondare il significato attribuito dagli studenti alla *deduzione* e selezionare probabili inferenze non collegate a ipotesi esplicitate.

Poiché appare necessario valutare ai vari livelli scolari quanto ancora la percezione giochi un ruolo predominante nel contesto scolastico geometrico (la perpendicolarità, la tangenza giocano un ruolo molto forte percettivamente), sarebbe interessante testare e analizzare i livelli di armonizzazione delle componenti: *rappresentazione di forme e linguaggio* (quindi, la lettura della figura e la gestione linguistica delle competenze teoriche).

Per quanto riguarda *la costruzione di prove standardizzate*, nella costruzione di item che vadano ad accertare le competenze argomentative/dimostrative nella complessità di situazioni geometriche, si potrebbero formulare domande a risposta multipla che non si limitano a testare localmente l'uso di quantificatori, negazione, connettivi logici, ma che permettono di valutare aspetti epistemici più profondi. Infine, nel costruire alternative e distrattori è forse possibile identificare degli indicatori che con analiticità consentono di stabilire un certo livello di competenza acquisita, sul piano dell'armonizzazione figurale/concettuale.

Tutto questo potrebbe a nostro giudizio far parte del patrimonio di formazione dei docenti nella scuola secondaria di secondo grado, ai quali è assegnato un compito molto impegnativo: condurre gradualmente gli studenti da un approccio intuitivo allo studio della Geometria, nel passaggio tra scuola secondaria di primo grado a quella di secondo grado, alla conquista del pensiero logico e alla comprensione della Geometria razionale.



ISBN 9788835123972

## Riferimenti bibliografici


Asenova M. (2018), "Vedere geometricamente: la percezione non iconica nella scuola primaria", *La matematica e la sua didattica*, 26, 2, pp. 173-210.

Boero P., Guala E., Morselli F. (2013), "Crossing the borders between mathematical domains: a contribution to frame the choice of suitable tasks in teacher education", in A.M. Lindmeier, A. Heinze (*eds.*), *Proceedings of the 37th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, PME, Kiel, vol. 2, pp. 97-104.

Bolondi G., Branchetti L., Giberti C. (2018), "A quantitative methodology for analysing the impact of the formulation of a mathematical item on Students Learning Assessment", *Studies in Educational Evaluation*, 58, pp. 37-50.

D'Amore B., Duval R. (2019), "L'educazione dello sguardo in Geometria elementare e in arte figurativa", *La matematica e la sua didattica*, 27, 1, pp. 47-67.

Duval R. (1995), "Les conditions cognitives de l'apprentissage de la géométrie: développement de la visualisation, différenciation des raisonnements et coordination de leur fonctionnement", *Annales de didactique et de sciences cognitives*, 10, pp. 5-53.

Fischbein E. (1993), "The theory of figural concepts", *Educational Studies in Mathematics*, 24, 2, pp. 139-162.

Ivanjek L., Susac A., Planinic M., Andrasevic A. (2016), "Student reasoning about graphs in different contexts", *Physical Review Physics Education Research*, 12, 010106.

Mason J. (2002), *Researching Your Own Practice: the Discipline of Noticing*, The Falmer Press, London.

Sbaragli S., Mammarella I.C. (2010), "L'apprendimento della Geometria", in D. Lucangeli, I.C. Mammarella, *Psicologia della cognizione numerica. Approcci teorici, valutazione e intervento*, FrancoAngeli, Milano, pp. 107-135.




ISBN 9788835123972

# 2. *Apprendimento a spirale in Matematica: alcuni spunti dalle prove INVALSI*

di Simone Banchelli, Rossella Garuti, Nicoletta Nolli

Con questo contributo si studia, prendendo spunto dalle prove INVALSI di Matematica dei gradi 5, 8 e 13, la possibilità di realizzare un *curriculum* a spirale, cioè una didattica disciplinare che, partendo da un approccio intuitivo, prosegue, nel corso degli anni, con approfondimenti ciclici e successivi ritorni e iterazioni, con l'obiettivo di comprendere, rafforzare e sviluppare le idee fondanti che sono alla base della disciplina stessa.

*With this paper, taking inspiration from the Mathematics INVALSI tests of grades 5, 8 and 13, the possibility of creating a spiral curriculum is analyzed, i.e. a disciplinary didactics that, starting from an intuitive approach, continues over the years, with cyclical insights and subsequent returns and iterations, with the aim of understanding, strengthening and developing the founding ideas that are the basis of the discipline itself.*

## 1. Introduzione

Nell'analisi dei processi di apprendimento di Jerome Bruner le discipline sono concepite come un sistema organizzato e coerente di conoscenze e non come un semplice insieme di nozioni. In questa analisi Bruner propone i concetti di struttura e di curricolo a spirale: «l'idea cioè che nell'insegnamento di un argomento si debba partire da una spiegazione "intuitiva" che sia pienamente alla portata dello studente, per poi risalire con moto circolare a una spiegazione più formale o più strutturata finché, con tutti i passaggi che possono risultare necessari, l'allievo abbia capito l'argomento o la materia in tutto il suo potere generativo. […] E si può dimostrare facilmente entro certi limiti interessanti che una caratterizzazione cosiddetta "di livello superiore"



ISBN 9788835123972

di un campo della conoscenza comprende, sostituisce e rende più potente e precisa una caratterizzazione "di livello inferiore"» (Bruner, 1997, p. 133).

Il movimento a spirale permette di comprendere le idee di base connesse alle varie discipline e permette di insegnare qualsiasi problematica a chiunque in ogni età, purché si adegui il materiale da insegnare alla modalità di rappresentazione della realtà di chi apprende.

Questo significa che le stesse strutture di contenuto devono essere mediate da processi pedagogici di tipo operativo, visivo e simbolico.

## 2. Indicazioni nazionali e QdR INVALSI

La costruzione delle competenze matematiche si sviluppa in un percorso iniziato già nella scuola primaria e si completa nel corso del ciclo secondario, realizzando una didattica di tipo elicoidale che riprende gli argomenti approfondendoli di volta in volta (*Matematica 2003. La Matematica per il cittadino*).

Nelle Indicazioni nazionali per il primo ciclo di istruzione (2012)[1] questi aspetti sono rappresentati sia dalla continuità fra i traguardi della scuola primaria e quelli della scuola secondaria di primo grado, sia dalla premessa comune per tutto il primo ciclo, nella quale si indicano gli aspetti epistemologici e di metodo nell'insegnamento-apprendimento della Matematica.

Nel Quadro di riferimento delle prove INVALSI di Matematica[2] gli aspetti di continuità fra i diversi cicli di istruzione sono rappresentati da tre elementi:

- gli *ambiti* di contenuto delle domande INVALSI che sono gli stessi per tutto il percorso di istruzione, dalla scuola primaria alla secondaria di secondo grado;
- le attività matematiche coinvolte durante la risoluzione dei quesiti, *Conoscere*, *Risolvere problemi* e *Argomentare*, che sono anch'esse comuni;
- i *traguardi* per lo sviluppo delle competenze nella secondaria di secondo grado che sono stati costruiti in continuità stretta con i traguardi del primo ciclo.

Pur consapevoli che i processi di insegnamento-apprendimento sono ben più complessi rispetto all'analisi e costruzione di prove standardizzate, alcuni elementi, a nostro avviso molto vicini al concetto di curricolo a spirale introdotto da Bruner, possono essere individuati anche nelle domande INVALSI.

[1] http://www.indicazioninazionali.it/wpcontent/uploads/2018/08/Indicazioni_Annali_Definitivo.pdf, data di consultazione 28/1/2021.

[2] https://invalsi-areaprove.cineca.it/docs/file/QdR_MATEMATICA.pdf, data di consultazione 28/01/2021.



ISBN 9788835123972

La domanda di ricerca che ci poniamo è la seguente: *è possibile individuare nelle prove INVALSI dei gradi 5, 8 e 13 esempi utili per una riflessione sulla costruzione di un curricolo a spirale?*

Nel documento sulle caratteristiche della prova di Matematica al termine del secondo ciclo di istruzione, grado 13, si definiscono di "ricontestualizzazione" quelle domande che propongono situazioni simili a quelle già incontrate nei cicli precedenti, ma che richiedono l'acquisizione di nuovi strumenti o nuovi contenuti matematici.

Per esempio la circonferenza alla scuola primaria è vista come semplice forma senza proprietà, nella scuola secondaria di primo grado diventa un oggetto che ha specifiche proprietà metriche e sintetiche e infine alla scuola secondaria di secondo grado si arricchisce con l'equazione del luogo geometrico che la rappresenta nel piano cartesiano.

Questa caratterizzazione, estesa a tutte le classi al termine di ogni grado scolare, ci sembra in sintonia con l'idea di curricolo a spirale di Bruner. Abbiamo pertanto individuato alcuni aspetti fondanti dell'apprendimento della Matematica e, utilizzando il concetto espresso da Bruner, identificato alcuni esempi paradigmatici, focalizzando l'attenzione sul concetto di proporzionalità che è il "cuore" dell'ambito Relazioni e funzioni.

## 3. Esempi dalle prove INVALSI: ragionamento proporzionale e modelli matematici

### *3.1. Proporzionalità: aspetti didattici e storici*

Il *proportional reasoning* e i problemi di proporzionalità costituiscono un tema di grande interesse in campo educativo per almeno tre ragioni:

- la sua importanza ai fini della formazione matematica di base, tenuto conto sia delle applicazioni immediate sia degli sviluppi negli studi matematici successivi e nelle altre discipline, per esempio la Fisica;
- le difficoltà che incontrano gli allievi, documentate da molte ricerche condotte in vari paesi (Hart, 1981; Karplus, Pulos e Stage, 1983);
- il fatto che il tema ha assunto carattere paradigmatico nella ricerca sui processi di apprendimento (Tourniaire e Pulos, 1985).

Per quanto riguarda il modello matematico della proporzionalità diretta (*proportional modelling*) si può definire la sua padronanza in termini operativi, cioè la capacità di affrontare una varietà ragionevolmente ampia di situazioni problematiche individuando le variabili pertinenti in ciascuna situazione e riconoscendo, come carattere comune, la relazione matematica di



ISBN 9788835123972

proporzionalità diretta che sussiste fra esse. La consapevolezza del *proportional reasoning* e del suo realizzarsi attraverso una strategia moltiplicativa è quindi una condizione necessaria, ma non sufficiente per la padronanza del *proportional modelling* che implica una generalizzazione della relazione matematica che sussiste tra le variabili (Garuti, 1992; Garuti, 1993). Inoltre la padronanza del *proportional modelling* consente di riconoscere rappresentazioni diverse di questa relazione (proporzione, formula, grafico, tabella) e di passare dall'una all'altra.

È utile, inoltre, prendere in considerazione gli aspetti storici relativi al *proportional modelling*. Molti secoli prima dell'acquisizione del modello matematico di proporzionalità, si erano scoperte relazioni di leve (Archimede), velocità e tempo nel moto di caduta dei gravi (Galileo) (Koiré, 1939). Tali relazioni si esprimevano attraverso particolari rappresentazioni: soprattutto verbale e geometrica, utilizzando, per esempio, la similitudine dei triangoli. D'altra parte, nel Rinascimento, si applicavano procedure aritmetiche di risoluzione a classi di problemi di proporzionalità di interesse tecnico o economico, che si sono via via evolute fino alla ricerca del quarto proporzionale nella proporzione $a:b = c:x$ (Toti Rigatelli, 1985; Giusti, 1990).

Nella matematica di oggi la relazione di proporzionalità diretta è un caso particolare di funzione: fissato un numero reale $k$, si tratta di quella funzione che associa a ogni numero reale $x$ il numero $kx$; essa è rappresentata, nel piano cartesiano, dalla retta di equazione $y = kx$.

### *3.2. Esempi dalle prove INVALSI*

Nel nostro lavoro abbiamo scelto di analizzare domande relative ai gradi scolari 5, 8 e 13, in quanto terminali di ogni spezzone dell'intero ciclo di istruzione: primaria, secondaria di I grado e secondaria di II grado.

La domanda di fig. 1 è stata proposta nel 2019 all'interno della prova del grado 5 (classe 5ª scuola primaria) e rappresenta un esempio di *proportional reasoning* che si concretizza nel compito di stimare la costante di proporzionalità che lega la misura come "un po' più del doppio" se lo studente utilizza la relazione fra le misure in centimetri dei due televisori; oppure "un po' meno della metà", se utilizza la relazione fra le misure in pollici e centimetri dello stesso televisore. In entrambi i casi l'approccio è di tipo numerico-operativo.



ISBN 9788835123972

**Per indicare la dimensione dello schermo di un televisore si utilizza la lunghezza della diagonale misurata in pollici. Il pollice è un'unità di misura che si può convertire in centimetri.**

**Completa la tabella scegliendo tra queste misure quella corretta.**

**65 pollici** | **80 pollici** | **90 pollici** | **127 pollici**

| MISURA DELLA DIAGONALE (pollici) | MISURA DELLA DIAGONALE (centimetri) |
|---|---|
| 40 pollici | 101,6 cm |
| ............... | 228,6 cm |

*Fig. 1 – Domanda del grado 5 del 2019*

**D11. La mamma di Luca per fare 2 panini ha usato:**

- **4 fette di pane;**
- **2 fette di prosciutto cotto;**
- **1 mozzarella.**

**Per fare 4 panini ha bisogno di:**

- ……. fette di pane;
- ……. fette di prosciutto cotto;
- ……. mozzarelle.

*Fig. 2 – Domanda del grado 2 del 2011*

È interessante notare che questa domanda trova una sua corrispondenza con una domanda "analoga", vedi fig. 2, proposta nel grado 2 (classe 2ª scuola primaria) nella quale si chiede ai bambini di individuare la costante di proporzionalità (il doppio) attuando un ragionamento di tipo proporzionale (*proportional reasoning*). La domanda del grado 5 rappresenta rispetto



ISBN 9788835123972

a quella del grado 2 una ricontestualizzazione in quanto, pur mantenendo l'approccio numerico-operativo richiede un approfondimento: la consapevolezza che la costante di proporzionalità non sempre è rappresentata da un numero intero e per rispondere correttamente la strada più semplice è quella di stimare questa costante.

La domanda di fig. 3 è stata proposta nel 2018 all'interno della prova del grado 8 (classe 3ª scuola secondaria di primo grado). Lo studente deve associare a una descrizione verbale di una situazione reale il grafico che la rappresenta. In questo caso è necessario un passaggio di rappresentazione dal verbale al grafico. Per rispondere alla domanda lo studente non è chiamato alla ricerca immediata di un risultato numerico, classificabile all'interno del paradigma risolutivo dell'aritmetica (Arzarello, Bazzini e Chiappini, 1994), quanto piuttosto a identificare e riconoscere il grafico che corrisponde alla situazione data, scegliendo e distinguendo tra proporzionalità diretta, funzione lineare e funzione costante (caso particolare della funzione lineare).

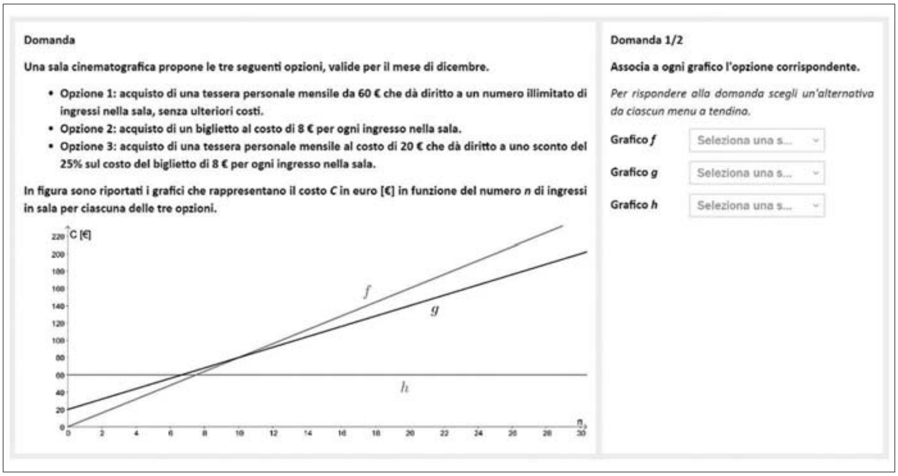



*Fig. 3 – Domanda del grado 8 del 2018*

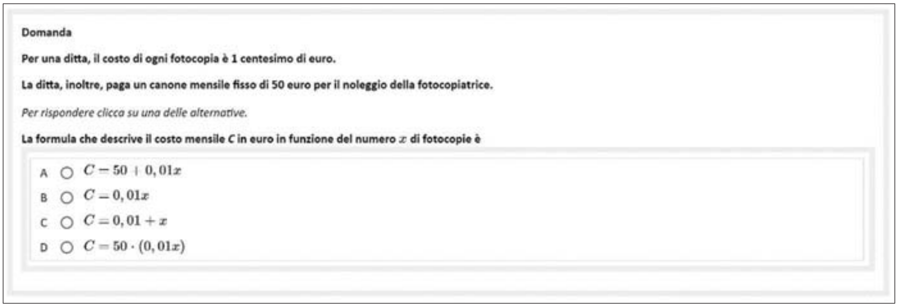
La relazione di proporzionalità in questa domanda viene proposta, rivisitata e ampliata sotto vari punti di vista. Non solo l'aspetto numerico non basta più, ma si chiede allo studente di riflettere sul significato della retta passante per l'origine (la rappresentazione grafica del modello matematico di proporzionalità), contrapposto a quello della retta non passante per l'origine che introduce un modello più generale rispetto a quello proporzionale (la relazione lineare), a cui però è strettamente legato. Il *proportional reasoning* viene quindi ricontestualizzato in termini di nuovi contenuti e nuovi stru-



ISBN 9788835123972

menti matematici: la spirale si avvolge permettendo allo studente di metabolizzare un contenuto matematico noto da un nuovo punto di vista.

Anche la domanda di fig. 4 è stata proposta nel 2018 all'interno della prova del grado 8. In questo caso si richiede di associare a una descrizione verbale di una situazione reale una formula che la rappresenta. È richiesto quindi un passaggio di rappresentazione: dal linguaggio verbale a quello algebrico.



**Domanda**

**Per una ditta, il costo di ogni fotocopia è 1 centesimo di euro.**

**La ditta, inoltre, paga un canone mensile fisso di 50 euro per il noleggio della fotocopiatrice.**

*Per rispondere clicca su una delle alternative.*

**La formula che descrive il costo mensile *C* in euro in funzione del numero $x$ di fotocopie è**

A ○ $C = 50 + 0,01x$
B ○ $C = 0,01x$
C ○ $C = 0,01 + x$
D ○ $C = 50 \cdot (0,01x)$

*Fig. 4 – Domanda del grado 8 del 2018*

Anche in questo caso è l'acquisizione, rispetto al grado 5, di un nuovo strumento interpretativo (quello algebrico) che permette di affrontare il compito proposto dalla domanda. Infatti è l'aspetto di generalizzazione del problema che lo studente deve tenere presente: non viene chiesto un calcolo diretto a partire da dati noti, quanto piuttosto l'individuazione di una formula che permette di ottenere un certo *output* qualunque sia l'*input*. E per farlo occorre riconoscere il corretto schema di calcolo che incorpora sia la parte proporzionale (0,01x), sia la parte costante (50).

La domanda di fig. 5 è stata proposta nel 2019 all'interno della prova del grado 13 (classe 5ª scuola secondaria di secondo grado). Come per la domanda di fig. 3 del grado 8 si richiede di associare a una descrizione verbale di una situazione reale una rappresentazione grafica corrispondente (passaggio verbale-grafico).

In questo caso, però, occorre superare il modello lineare e riconoscere che la situazione è correttamente rappresentata da un modello lineare a tratti, attraverso un calcolo puntuale (per esempio calcolando il costo C per x = 100 km) o attraverso un confronto delle pendenze corrispondenti ai due regimi di costo.

L'individuazione della risposta corretta passa quindi da una metabolizzazione del modello lineare, che il modello lineare a tratti ingloba e ricontestualizza.



ISBN 9788835123972

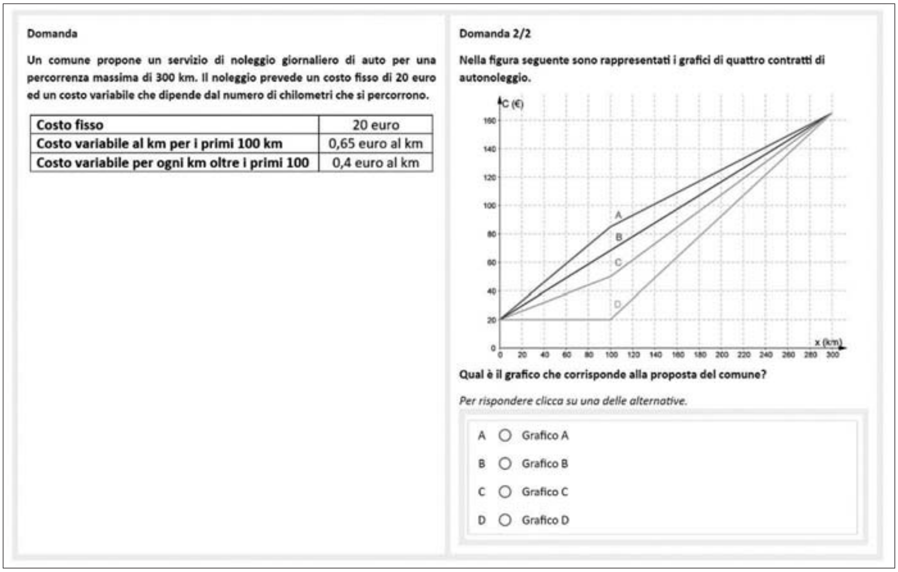



*Fig. 5 – Domanda del grado 13 del 2019*

La domanda di fig. 6 è stata proposta nel 2019 all'interno della prova del grado 13. Come per la domanda di fig. 4 del grado 8 si richiede di associare a una descrizione verbale di una situazione reale una formula corrispondente (passaggio verbale-algebrico).

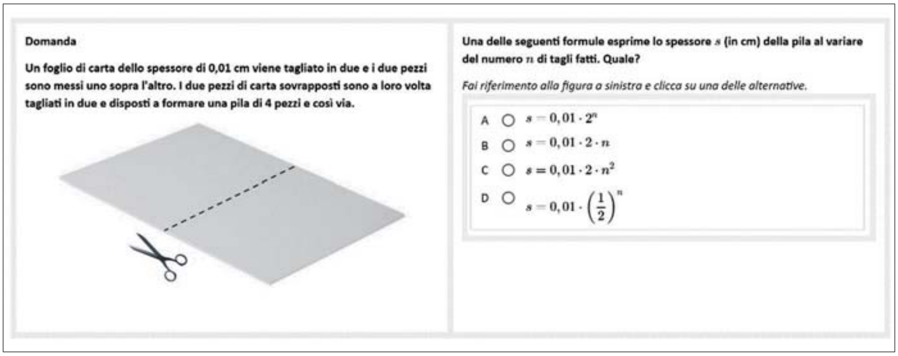



*Fig. 6 – Domanda del grado 13 del 2019*

In maniera analoga a quanto rilevato per la domanda di fig. 5 del grado 13, occorre operare un salto rispetto al modello lineare per riconoscere il corretto modello di crescita esponenziale.



ISBN 9788835123972

In questo caso quindi, la ricontestualizzazione avviene nel passaggio tra modelli di natura profondamente diversa. Mentre nel modello lineare a tratti si riconosce ancora il modello lineare, e in quello lineare il modello proporzionale come caso particolare, nel passaggio al modello esponenziale la "frattura" è più netta: occorre sapere che non tutti i fenomeni di crescita sono dello stesso tipo e che ve ne sono alcuni che possono essere rappresentati da funzioni non lineari.

A tal proposito è interessante notare come dall'analisi dei dati relativi alla percentuale di risposte associate a ciascuna opzione, le risposte sbagliate che hanno avuto le percentuali maggiori sono proprio quelle relative al modello lineare. Questo tipo di errore evidenzia quindi la mancata capacità da parte di questi studenti di superare il modello lineare appreso nei gradi scolari precedenti.

## 4. Conclusioni

Alla domanda di ricerca che ci siamo posti ci sembra quindi di poter rispondere positivamente. In particolare l'idea di "ricontestualizzazione" ci sembra essere un buon paradigma di insegnamento a spirale, inteso come un insegnamento in cui, a partire dai nuclei fondanti la disciplina, il docente conosce cosa è necessario sapere o saper fare per sviluppare competenze da un grado scolare a un altro.

Le domande che abbiamo analizzato mostrano, attraverso una serie di esempi tratti dall'ambito Relazioni e funzioni, come sia possibile partendo da un "germe" sviluppare, riprendere e approfondire contenuti disciplinari di grande importanza, dalla scuola primaria alla scuola secondaria di secondo grado. Questo approccio consente di progettare "percorsi" che possono aiutare gli studenti ad allargare le conoscenze e a sviluppare le competenze in modo stabile e duraturo.

Occorre quindi ri-pensare la propria didattica con la consapevolezza che integrare le conoscenze e il punto di vista acquisito nei primi anni di scuola, in un nuovo punto di vista non fa perdere nulla di quanto appreso prima, ma amplia l'orizzonte di senso e offre una prospettiva superiore.



ISBN 9788835123972

## Riferimenti bibliografici

AA.VV., *Matematica 2003. La Matematica per il cittadino (UMI)*, testo disponibile al sito: https://umi.dm.unibo.it/wp-content/uploads/2020/04/Matematica2003.pdf, data di consultazione 6/4/2021.

Arzarello F., Bazzini L., Chiappini G. (1994), *L'algebra come strumento di pensiero*, Progetto strategico del CNR, Quaderno n. 6, Università di Pavia.

Bruner J. (1997), *La cultura dell'educazione. Nuovi orizzonti per la scuola*, Feltrinelli, Milano.

Garuti R. (1992), "Funzioni come trasformazioni associate a formule, grafici e modelli di fenomeni: riflessioni su un'esperienza in III media", *L'Insegnamento della Matematica e delle Scienze Integrate*, 15, pp. 763-784.

Garuti R. (1993), "Problemi di proporzionalità", in *Scuolaviva*, SEI, Torino.

Giusti E. (a cura di) (1990), *Galileo Galilei, Discorsi e dimostrazioni matematiche su due nuove scienze*, Einaudi, Torino.

Hart K.M. (1981), *Children's understanding of mathematics: 11-16*, John Murray, London.

Karplus R., Pulos S., Stage E.K. (1983), "Proportional reasoning of early adolescents", in R. Lesh, M. Landau (*eds*.), *Acquisition of Mathematics concepts and processes*, Academic Press, New York.

Koiré A. (1939), *Studi galileiani*, Einaudi, Torino.

Toti Rigatelli L. (1985), "Il problema delle parti in manoscritti del XIV e XV secolo", *Mathemata*, *Boethius: Texte Abh. Gesch. Exact. Wissensch, XII*, Steiner, Wiesbaden, pp. 229-236.

Tourniaire F., Pulos S. (1985), "Proportional reasoning: a review of the literature", *Educational Studies in Mathematics*, 16, pp. 181-204.



ISBN 9788835123972

# *3. INVALSI STIV alla ricerca dell'errore perduto*

di Ivan Graziani, Stefano Babini

Il nostro lavoro di ricerca è stato finalizzato ad analizzare le diverse tipologie di errori, ma anche di strategie risolutive, presenti nelle risposte a domande aperte, e pure nella scelta di particolari "distrattori" nelle domande a scelta multipla. Per questa ricerca abbiamo esaminato le risposte fornite da studenti delle scuole secondarie di I e II grado a item dell'ambito relazioni e funzioni, che abbiamo selezionato, grazie alla piattaforma digitale di GESTINV.

Abbiamo scelto di analizzare 7 item, 3 a risposta giustificata, 2 a risposta multipla e 2 univoca, che richiedessero comunque un procedimento scritto o mentale per la risoluzione. Per tale motivo, abbiamo chiesto ai docenti somministratori delle varie scuole di allegare anche eventuali fogli, se presenti, dove gli studenti avevano svolto i calcoli.

La nostra scelta di lavoro, viste anche le esperienze precedenti, è stata quella di operare in verticale soprattutto per analizzare analogie e differenze legate ai diversi ordini e indirizzi di scuola.

Per tale motivo i nostri fascicoletti sono stati somministrati a 228 studenti della terza classe di scuola secondaria di I grado, 245 studenti delle classi seconde e 242 delle classi quarte delle scuole secondarie di II grado. Per le secondarie di II grado abbiamo scelto anche differenti tipologie di indirizzo di studi (licei, tecnici e professionali).

Dai 715 protocolli analizzati sono emerse diverse tipologie di errore, ma anche varie strategie risolutive corrette: abbiamo concentrato il nostro lavoro su entrambe le situazioni, ponendo anche l'attenzione sui particolari distrattori che maggiormente hanno attratto i ragazzi.

In molti casi il nostro lavoro è stato aiutato dai calcoli presenti nei protocolli analizzati anche per le soluzioni fornite nei quesiti a risposta multipla.

In generale non si riscontrano grosse differenze tra i diversi ordini di scuola, limitatamente al numero di errori commessi, aumentano invece, tra i



ISBN 9788835123972

vari ordini e indirizzi, il numero e la varietà di risposte, motivate sia correttamente sia in modo errato, fornite ai vari quesiti.

*The main objective of our research was to analyze different types of errors and to study solution strategies that are in open answers and questions, as well as choosing particular "distractions" in multiple choice questions. For this study we examined answers from students from junior high school and high school. Those answers were selected by item scoping relations and functions using the GESTINV platform.*

*We decided to analyze seven items, three with justify answer, two with multiple answer and two unambiguous, which still required a written or mental solution procedure. For this reason, we asked test administrators from different schools to attach any eventually paper where students may have developed any calculation.*

*Because of past experiences, we decided to work vertically for this kind of study specially because we wanted to analyze possibly similarities and differences related to different school levels and addresses. That is why our booklets were applied in 228 students from third grade of junior high, 245 students from second grade and 242 from forth grade of high school. For high school students we also chose different addresses (Scientific and Classical High Schools, Technical Institutes, Professional Institutes).*

*Many different types of errors emerged from 715 analyzed protocols, but also many correct solutions strategies. We have focused our research on both situations and we also paid attention to particular distractions that attracted students the most.*

*In many cases, we used the calculations that are already in analyzed protocols to help in our study and we also applied them on solutions of multiple answer.*

*In general, the number of errors committed by students did not show significant differences between school levels. However, the number and the diversity of answers, that were motivated correctly or incorrectly increased substantially between different school levels and addresses.*

## 1. Introduzione

Gli errori nascondono spesso tanti aspetti diversi dei processi di apprendimento dei ragazzi. Indagare sui motivi che portano gli studenti a sbagliare deve, secondo noi, essere alla base del processo di insegnamento/apprendimento che ogni docente dovrebbe avere presente nel proprio bagaglio professionale.



ISBN 9788835123972

Non sempre però è facile scoprire tutti gli errori che vengono commessi dagli studenti, soprattutto nelle prove standardizzate.

Per la nostra ricerca, abbiamo analizzato alcune prove INVALSI degli anni passati, trovate per mezzo del sito GESTINV, e abbiamo costruito un nostro fascicolo, dedicato a Relazioni e funzioni, con domande di gradi scolastici differenti (G5, G6, G8 e G10), per analizzare, in particolare, in due aspetti che sono in genere un po' trascurati nella consueta pratica didattica: l'argomentazione e la formalizzazione.

Abbiamo scelto di somministrare il nostro fascicolo alle terze della secondaria di I grado e alle seconde e quarte della secondaria di II grado, analizzando anche le differenze di genere, per vedere se, e in quale modo, potessero influire sui risultati delle prove.

Lavorare sugli errori e sulla loro possibile genesi è una modalità che utilizziamo solitamente anche nella nostra normale prassi didattica per verificare il reale livello di competenza raggiunto dai nostri studenti su determinati argomenti ritenuti normalmente ostici (Babini e Graziani, 2019).

Per il nostro lavoro di raccolta dei dati abbiamo coinvolto anche alcuni nostri colleghi, che ringraziamo per la grande disponibilità, nella somministrazione del fascicolo ai loro studenti.

Dopo l'esame dei risultati dei fascicoli, abbiamo deciso di analizzare in modo più approfondito solo 5 degli item che avevano avuto risultati significativi per il nostro progetto di ricerca.

Abbiamo sempre confrontato i risultati anche con quelli del campione nazionale, rilevato grazie al sito GESTINV.

Nei nostri lavori di ricerca alcuni degli aspetti che consideriamo sempre, anche per i livelli di scuola in cui operiamo, sono quelli della verticalità e della continuità (Graziani e Babini, 2016; Babini e Graziani, 2018). È sempre molto interessante poter analizzare come alcuni aspetti didattici, come quelli legati al "contratto", possano portare a commettere errori differenti nei vari ordini scolastici, ma anche come alcune similitudini portino a pensare che spesso gli apprendimenti siano solo di tipo meccanico e che altri fattori possano entrare in gioco quando una conoscenza non sia ben consolidata e assimilata dagli studenti.



ISBN 9788835123972

## 2. Le fasi di lavoro

### *2.1. Ricerca dei quesiti in coerenza con il nostro intento*

L'intento principale del nostro lavoro è stato quello di analizzare l'andamento di alcune domande nell'ambito Relazioni e funzioni, scelte con differenti livelli di difficoltà e in verticale, per verificare se alcuni concetti matematici potevano essere assimilati correttamente nei diversi gradi di scuola e soprattutto per ricercare errori ricorrenti alle diverse età considerate. Abbiamo scelto anche di vedere se si presentavano differenze tra maschi e femmine.

Per tale motivo la ricerca effettuata sul sito www.GESTINV.it si è orientata verso quesiti che avevano riscontrato particolari difficoltà nel campione nazionale quando erano stati somministrati.

Come nostra consuetudine abbiamo, inoltre, deciso di costruire un unico fascicolo da somministrare senza alcuna differenza per i diversi gradi scolastici esaminati.

### *2.2. Composizione del fascicolo*

Il fascicolo è stato composto con 8 domande equamente distribuite tra i gradi G5, G6, G8 e G10.

Per il nostro studio, incentrato sulla ricerca di tipologie ricorrenti di errori, abbiamo scelto, in particolare, domande, che richiedessero agli studenti di effettuare un'argomentazione o una formalizzazione.

Abbiamo scelto anche due domande, che all'apparenza erano molto simili, ma che si differenziavano per il tipo di risposta richiesta e che erano state somministrate in origine al grado 5 e al grado 8.

Dopo averlo assemblato, abbiamo provato a vedere se poteva essere risolto in un'ora, ma lasciando comunque la scelta della durata ai docenti delle classi interpellate.

### *2.3. Scelta del campione*

Il campione è stato formato da studenti delle classi terze di scuola secondaria di I grado e delle seconde e quarte di alcuni indirizzi di secondaria di II grado.

Le scuole che hanno aderito appartengono tutte alla regione Emilia-Romagna.



ISBN 9788835123972

La collaborazione dei docenti somministratori è stata magnifica.

Le scuole che sono state coinvolte per questo progetto sono state:

– scuole secondarie di I grado di Santa Sofia (FC), di Villafranca (FC), di Longiano (FC) e di S. Giovanni in Persiceto (BO);
– scuole secondarie di II grado – licei: artistico (Parma) e scientifico (Forlì); istituti tecnici: economico (Forlì), per ITAS (Forlì) e tecnologico (Forlì); istituto professionale industria e artigianato di Cesena (FC).

Gli studenti coinvolti sono stati in totale 715: 228 delle scuole secondarie di I grado e 487 delle secondarie di II grado.

## *2.4. Quadro teorico*

Come quadro teorico, per quanto riguarda la tipologia degli errori riscontrati, ci siamo riferiti:

– alle diverse possibili origini degli errori (Binanti, 2001), in particolare alla differenza tra gli sbagli, o errori di distrazione (meno gravi) e gli errori, soprattutto se “di senso” (più gravi);
– alle diverse tipologie di misconcezioni, inevitabili ed evitabili (Sbaragli, 2006, D’Amore e Sbaragli, 2011);
– al contratto didattico, esplicito o implicito, del docente con la classe (Brousseau, 1986; D’Amore, 2003; Zan e Baccaglini-Frank, 2017);
– alla lettura selettiva del testo di un problema (Zan, 2016), con la scelta di “scorciatoie cognitive”, come anche l’individuazione di “parole chiave” (D’Amore e Fandiño Pinilla, 2014), che sembrano permettere di arrivare alla risposta senza aver compreso il problema;
– alla mancanza di abitudine ad argomentare e formalizzare fin dalla scuola primaria (Baccaglini-Frank *et al.*, 2018).

## *2.5. Somministrazione fascicolo*

Il fascicolo è stato somministrato tra i mesi di febbraio e maggio, con date scelte dai docenti somministratori. Sono stati somministrati nelle loro scuole e noi siamo passati a ritirarli per la loro correzione.



ISBN 9788835123972

## 2.6. Analisi dei risultati ottenuti (confronto in verticale)

Dalla correzione dei fascicoli e dall'analisi dei dati ottenuti nel campione abbiamo deciso di concentrare la nostra ricerca solo su cinque dei quesiti, che si sono rivelati particolarmente significativi, per la tipologia di errori presentati sia nel primo sia nel secondo ciclo di istruzione.

Dopo aver osservato le percentuali di risposte corrette ed errate per ogni item, ci siamo concentrati sull'analisi degli errori e abbiamo analizzato in particolare per ognuno dei cinque item selezionati le tipologie di errori commessi nei vari gradi di scuola. Abbiamo poi verificato se la tipologia di errore rimaneva la stessa passando da un grado scolastico all'altro.

Abbiamo suddiviso gli item analizzati in tre tipologie:

– la prima legata alla proporzionalità con un item su una ricetta da sistemare;
– la seconda con una richiesta di formalizzazione con un quesito costituito da tre item;
– la terza con richiesta di argomentazione, costituita da due item simili, ma con tipologie differenti di risposte, e un item con una scelta argomentativa tra due possibili risposte opposte.

### 2.6.1. Primo item

Per la prima tipologia abbiamo scelto un quesito uscito per il grado 5 nel 2016 (fig. 1).

**D10. Osserva la tabella che riporta gli ingredienti per tre e per cinque pizze.**
**Nella colonna degli ingredienti per cinque pizze c'è un errore.**
**Fai una crocetta sull'errore e scrivi accanto il valore corretto.**

| | Ingredienti per **tre** pizze | Ingredienti per **cinque** pizze |
|---|---|---|
| Lievito di birra | 30 g | 50 g |
| Olio d'oliva | 60 ml | 100 ml |
| Farina | 750 g | 1500 g |
| Acqua | 450 ml | 750 ml |
| Passata di pomodoro | 600 g | 1000 g |

*Fig. 1 – Item G05 del 2016*



ISBN 9788835123972

Questo item nel campione nazionale INVALSI, di quinta primaria, aveva registrato il seguente risultato (tab. 1).

*Tab. 1 – Risultato campione nazionale G05 – 2016*

| *Risposte corrette* | *Risposte errate* | *Risposte omesse* | *Risposte non valide* |
|---|---|---|---|
| 26,7% | 55,6% | 17,6% | 0,2% |

Il nostro campione, composto da studenti più grandi, ha evidenziato difficoltà, soprattutto nei gradi 8 e 10, mentre non si registrano differenze significative rispetto ai risultati del campione nazionale nel grado 12 (grafici in figg. 2-4).

In ogni caso, le principali difficoltà riscontrate sono state quelle legate a una lettura parziale del testo (Zan, 2016), senza la comprensione della richiesta della domanda, forse anche perché ritenuta all'apparenza facile.

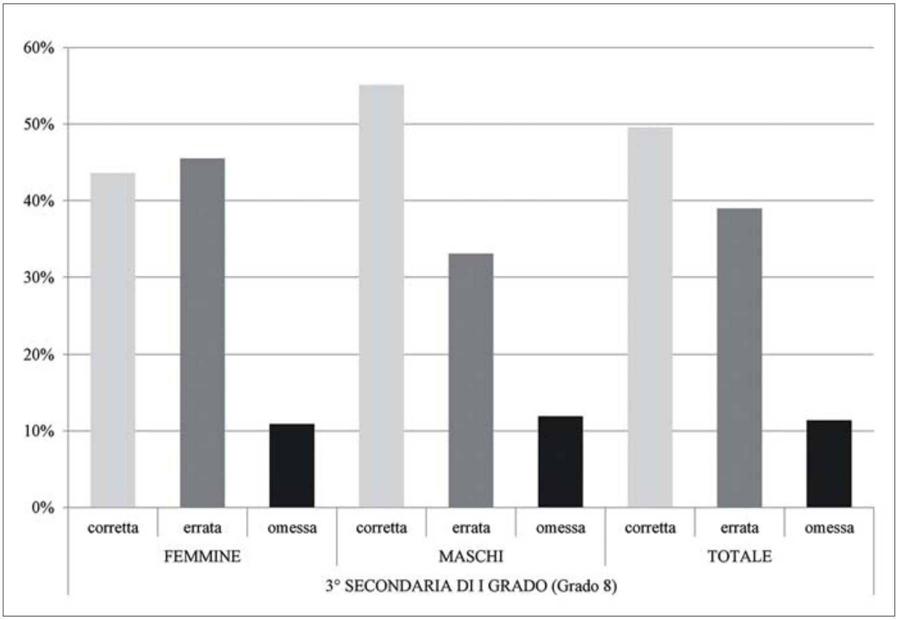



*Fig. 2 – Risultato nostro campione 3ª secondaria I grado*



ISBN 9788835123972

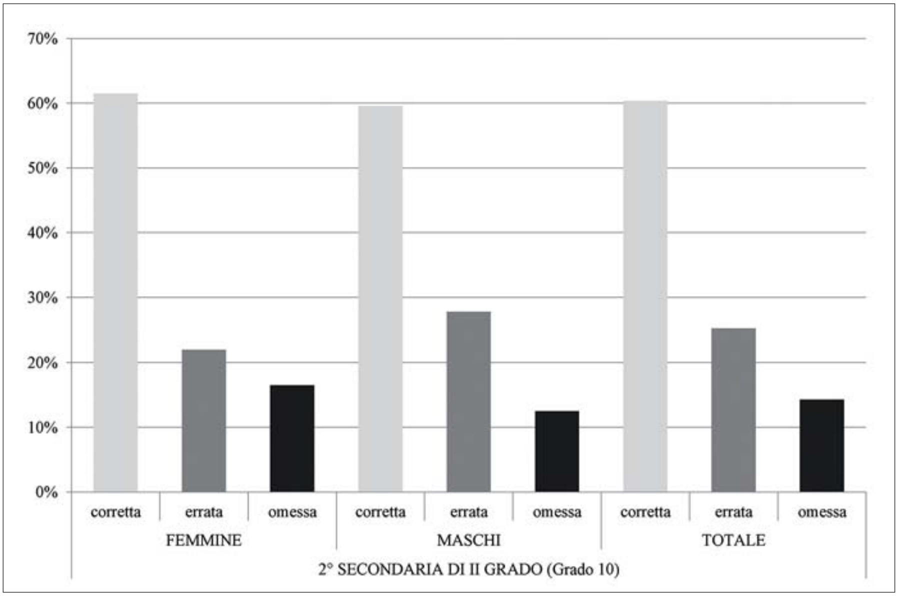



*Fig. 3 – Risultato nostro campione 2ª secondaria II grado*

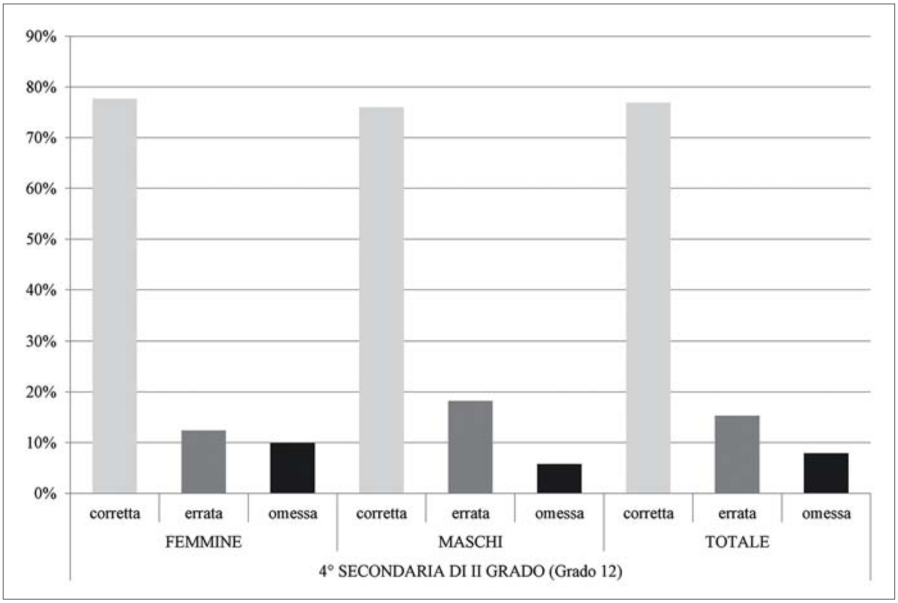



*Fig. 4 – Risultato nostro campione 4ª secondaria II grado*



ISBN 9788835123972

Anche dall'analisi dei risultati dei diversi indirizzi delle classi seconde e quarte del II grado, emergono difficoltà, soprattutto nel tecnico e nel professionale, che non ci aspettavamo di incontrare (grafici in figg. 5 e 6).

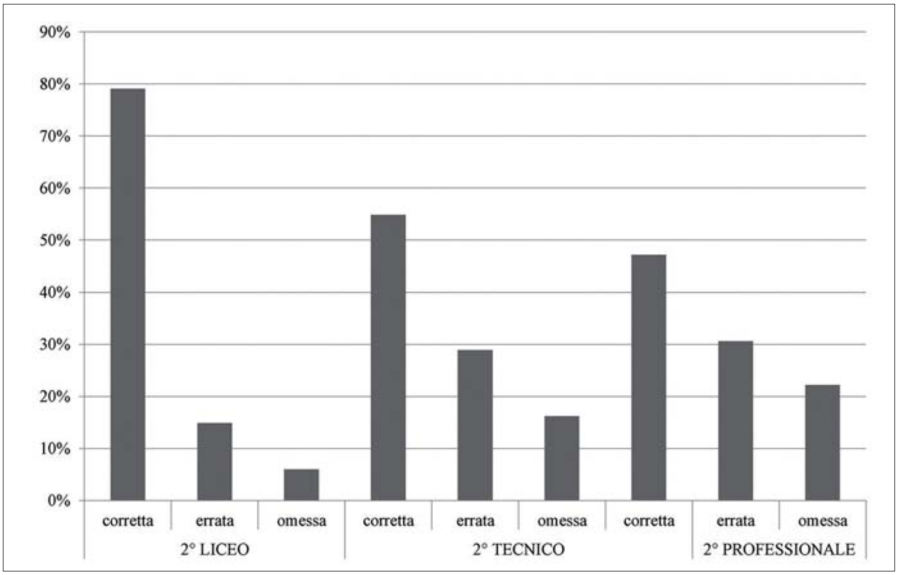



*Fig. 5 – Confronto per tipo di 2ª secondarie di II grado*

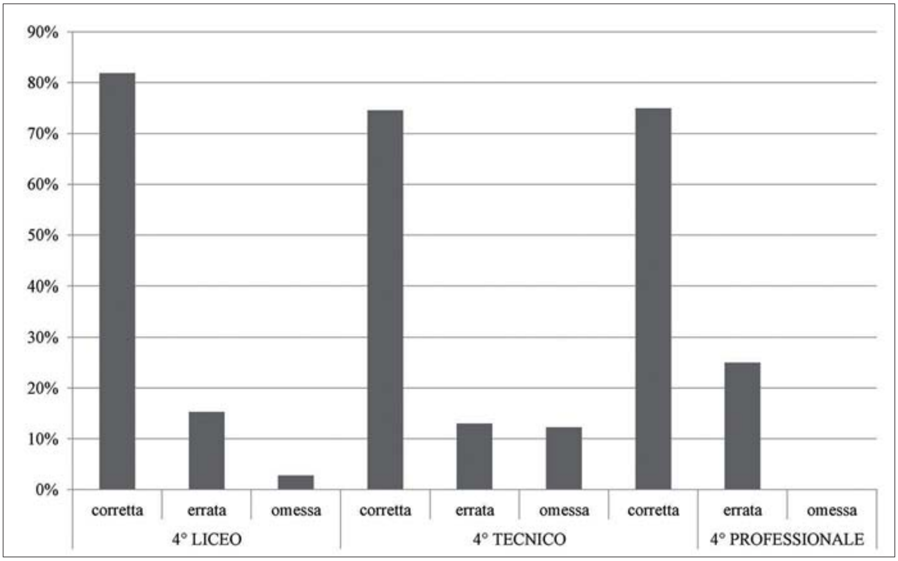



*Fig. 6 – Confronto per tipo di 4ª secondarie di II grado*



ISBN 9788835123972

Osservando le tipologie di errori commessi, abbiamo notato che quelli ricorrenti sono comuni in tutti gli ordini di scuola da noi esaminati:

– errori di calcolo (fig. 7);
– lettura parziale o fuorviante (Zan, 2016) del testo o della tabella (figg. 8-9).

| | Ingredienti per tre pizze | Ingredienti per cinque pizze | |
|---|---|---|---|
| | | | 10 5=50<br>20 5=100<br>150 5=750 |
| Lievito di birra | 30 g : 3 = 10 | 50 g | |
| Olio d'oliva | 60 ml : 3 = 20 | 100 ml | |
| Farina | 750 g : 3 = 150 | ~~1500~~ g × 750 g | |
| Acqua | 450 ml : 3 = 150 | 750 ml | |
| Passata di pomodoro | 600 g : 3 = 200 | 1000 g | 200 5= 100 |

*Fig. 7 – Esempio da una prova di 3ª secondaria I grado*

| | Ingredienti per tre pizze | Ingredienti per cinque pizze |
|---|---|---|
| Lievito di birra | 30 g | ~~50~~ g 90 g |
| Olio d'oliva | 60 ml | ~~100~~ ml 120 ml |
| Farina | 750 g | 1500 g |
| Acqua | 450 ml | ~~750~~ ml 900 ml |
| Passata di pomodoro | 600 g | ~~1000~~ g 1200 g |

*Fig. 8 – Esempio da una prova di 3ª secondaria I grado*

| | Ingredienti per tre pizze | Ingredienti per cinque pizze |
|---|---|---|
| Lievito di birra | 30 g | 50 g |
| Olio d'oliva | 60 ml | 100 ml |
| Farina | 750 g 900 g· | 1500 g |
| Acqua | 450 ml | 750 ml |
| Passata di pomodoro | 600 g | 1000 g |

*Fig. 9 – Esempio da una prova di 2ª secondaria II grado*

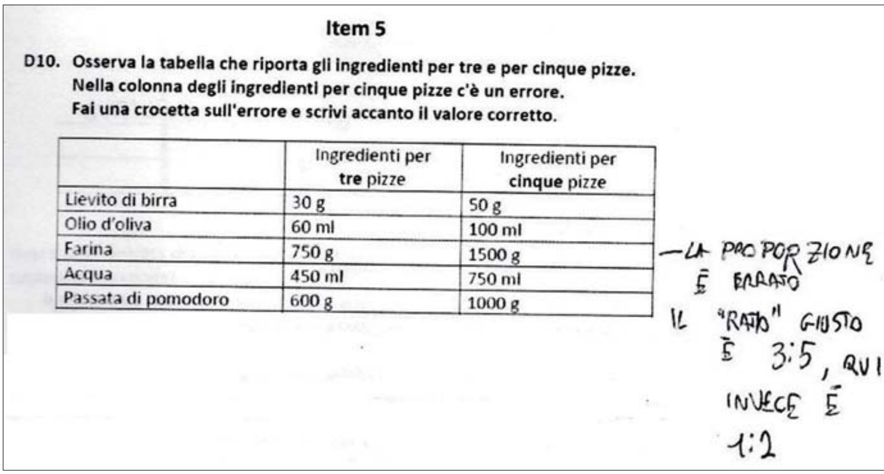
Questi casi, che nel nostro campione corrispondono a circa il 15% delle risposte non corrette, sono definiti da Binanti (2001) più "sbagli", o anche errori di distrazione, e sono solitamente considerati meno gravi rispetto agli errori di tipo concettuale, o di senso.



ISBN 9788835123972

Questi errori hanno considerato soprattutto il dato centrale che è riconoscibile come uno la metà dell'altro, senza vedere che gli ingredienti erano per 3 o per 5 persone. Errori di questo tipo, catalogabili come derivati da una "lettura selettiva del testo di un problema" (Zan, 2016), ne abbiamo trovati in tutti e tre i gradi e corrispondono circa al 20% delle risposte non corrette:

– errori di comprensione del testo (fig. 10);
– errori di difficile classificazione (fig. 11).



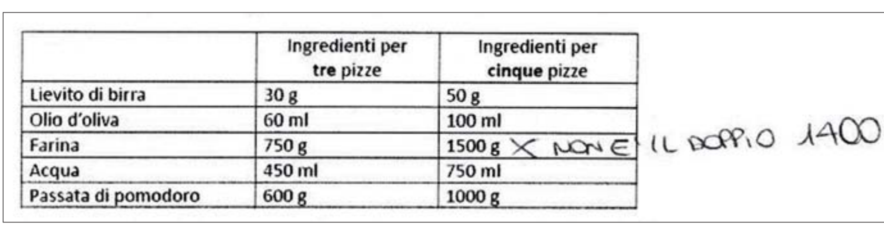
**Item 5**

**D10. Osserva la tabella che riporta gli ingredienti per tre e per cinque pizze. Nella colonna degli ingredienti per cinque pizze c'è un errore. Fai una crocetta sull'errore e scrivi accanto il valore corretto.**

| | Ingredienti per **tre** pizze | Ingredienti per **cinque** pizze |
|---|---|---|
| Lievito di birra | 30 g | 50 g |
| Olio d'oliva | 60 ml | 100 ml |
| Farina | 750 g | 1500 g |
| Acqua | 450 ml | 750 ml |
| Passata di pomodoro | 600 g | 1000 g |

— LA PROPORZIONE È ERRATO
IL "RATIO" GIUSTO È 3:5, QUI INVECE È 1:2

*Fig. 10 – Esempio da una prova di 2ª secondaria II grado*



| | Ingredienti per **tre** pizze | Ingredienti per **cinque** pizze |
|---|---|---|
| Lievito di birra | 30 g | 50 g |
| Olio d'oliva | 60 ml | 100 ml |
| Farina | 750 g | 1500 g X NON E IL DOPPIO 1400 |
| Acqua | 450 ml | 750 ml |
| Passata di pomodoro | 600 g | 1000 g |

*Fig. 11 – Esempio da una prova di 4ª secondaria II grado*

In questi casi, per la verità non molti per questo item (circa l'8%), forse non è stata compresa correttamente la richiesta posta dalla domanda, probabilmente per una sua errata individuazione nel testo.

Errori come questo, sono difficili da comprendere e da classificare, anche perché provenienti da studenti con almeno 12 anni di scolarizzazione. Al massimo, visto che forse non hanno capito la domanda hanno comunque provato a dare una risposta per "contratto didattico" (Brousseau, 1986).



ISBN 9788835123972

### 2.6.2. Secondo item

Per la seconda tipologia abbiamo scelto un quesito uscito per il grado 10 nel 2016 (fig. 12).

**D4.** **Una sorgente di montagna alimenta continuativamente un serbatoio con 5 m$^3$ di acqua ogni settimana. Oggi il serbatoio contiene 100 m$^3$ di acqua e un villaggio inizia a prelevare 7 m$^3$ di acqua alla settimana.**

**a.** **Completa la seguente tabella relativa al numero *n* di m$^3$ di acqua contenuti nel serbatoio in funzione del numero *t* di settimane a partire da oggi:**

| t (settimane) | n (m$^3$) |
|---|---|
| 0 | 100 |
| 1 | … |
| 2 | … |
| 3 | … |
| 4 | … |

**b.** **Scrivi un'espressione che rappresenti il numero *n* di m$^3$ di acqua contenuti nel serbatoio in funzione del numero *t* di settimane.**

**Risposta:** *n* = ………………………………………

**c.** **Dopo quante settimane il serbatoio sarà vuoto?**

A. ☐ 20 settimane
B. ☐ 50 settimane
C. ☐ 98 settimane
D. ☐ 102 settimane

*Fig. 12 – Quesito G10 del 2015*

Questo quesito nel campione nazionale INVALSI aveva registrato i seguenti risultati per i tre item (tab. 2).

*Tab. 2 – Risultato campione nazionale G10 – 2015*

| *Item* | *Risposte corrette* | *Risposte errate* | *Risposte omesse* |
|---|---|---|---|
| a | 55,8% | 32,8% | 11,4% |
| b | 16,4% | 43,8% | 39,8% |
| c | 56,4% | 35,1% | 8,5% |



ISBN 9788835123972

Gli item a e c, che avevano registrato risultati migliori anche nel campione nazionale, hanno ottenuto nel nostro campione esiti generalmente molto positivi, senza peraltro significative differenze tra i diversi gradi scolastici e tra i vari indirizzi di scuola secondaria di II grado (grafici in figg. 13 e 14).

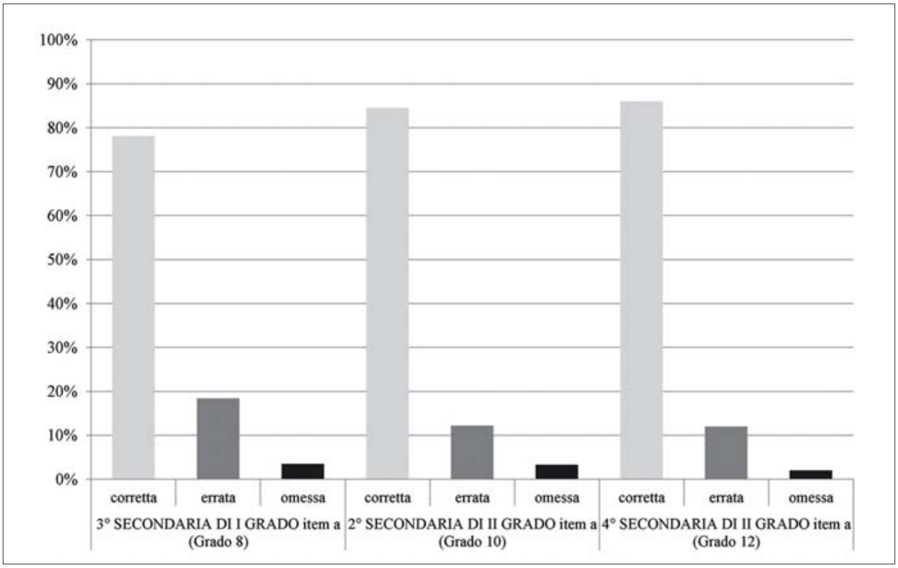



*Fig. 13 – Confronto secondarie di I e II grado – Item a*

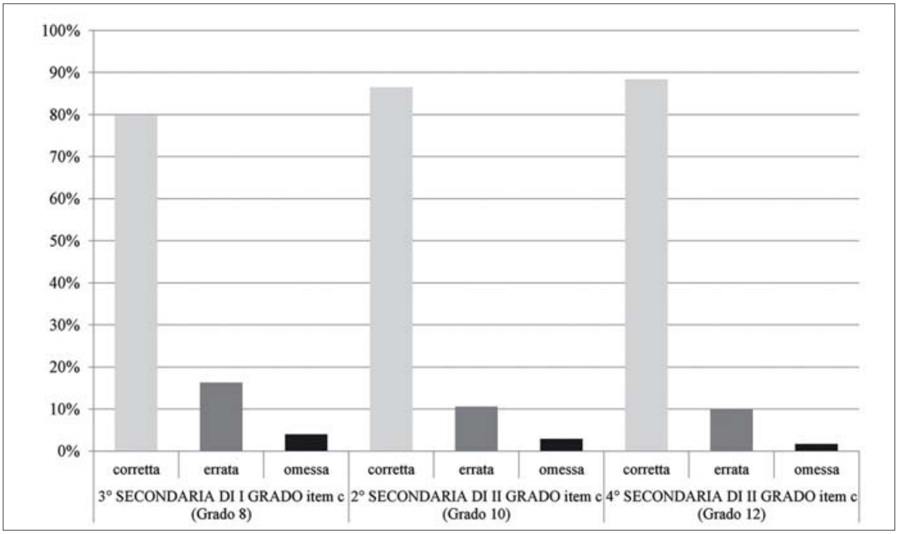



*Fig. 14 – Confronto secondarie di I e II grado – Item c*



ISBN 9788835123972

Più interessanti sono i risultati relativi all'item b riportati nelle tabelle seguenti. Abbiamo, per questo motivo, preso in esame solo gli errori commessi in questo item.

Nei grafici in figura 15, 16 e 17 abbiamo riportato le differenze per genere riscontrate nei differenti gradi di istruzione analizzati nella nostra ricerca. Emerge una non significativa differenza nel grado 8, mentre nel grado 10, e in misura minore anche nel 12, è significativamente migliore il risultato dei maschi con una percentuale maggiore di omissioni nel campione femminile.

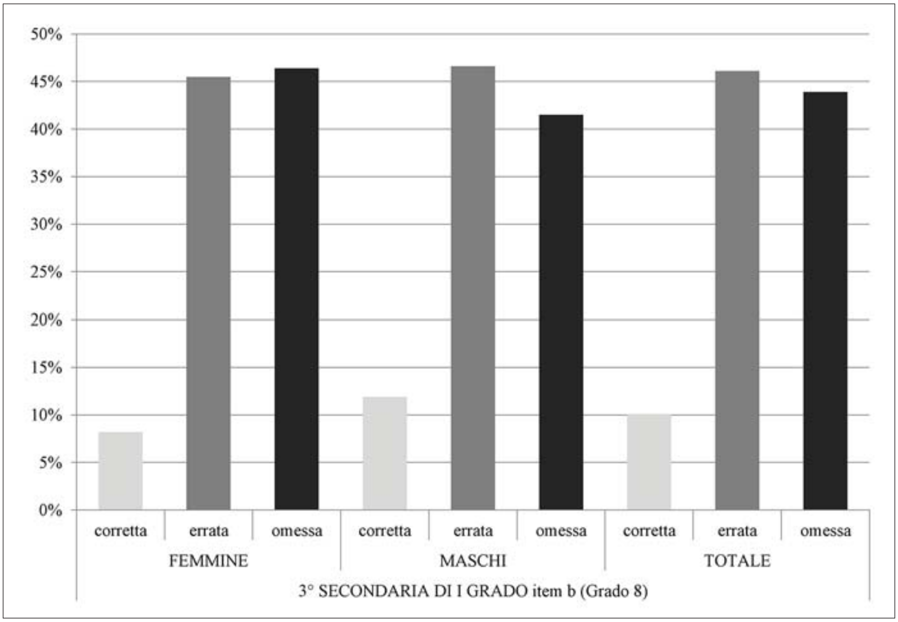



*Fig. 15 – Confronto 3ª secondaria di I grado per genere – Item b*



ISBN 9788835123972

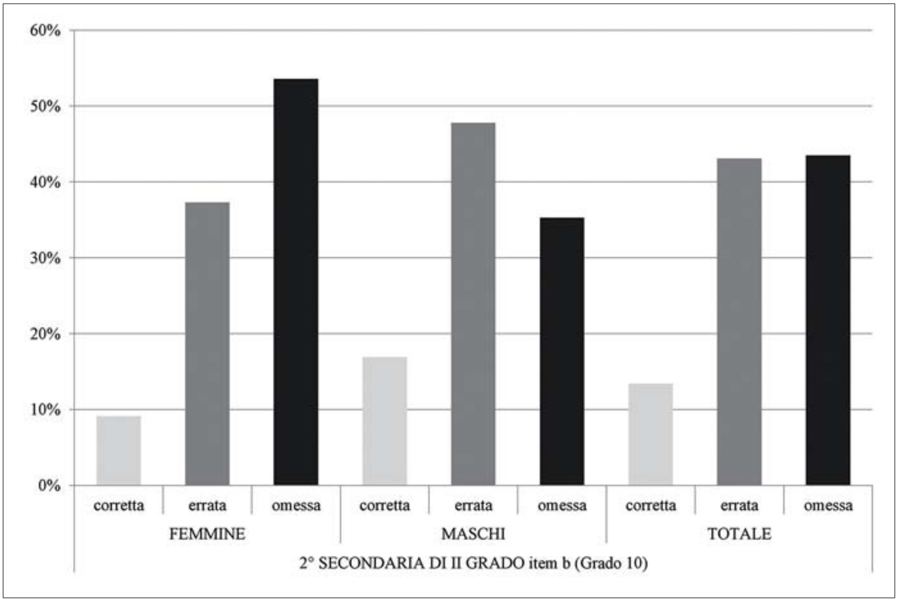



*Fig. 16 – Confronto 2ª secondaria di II grado per genere – Item b*

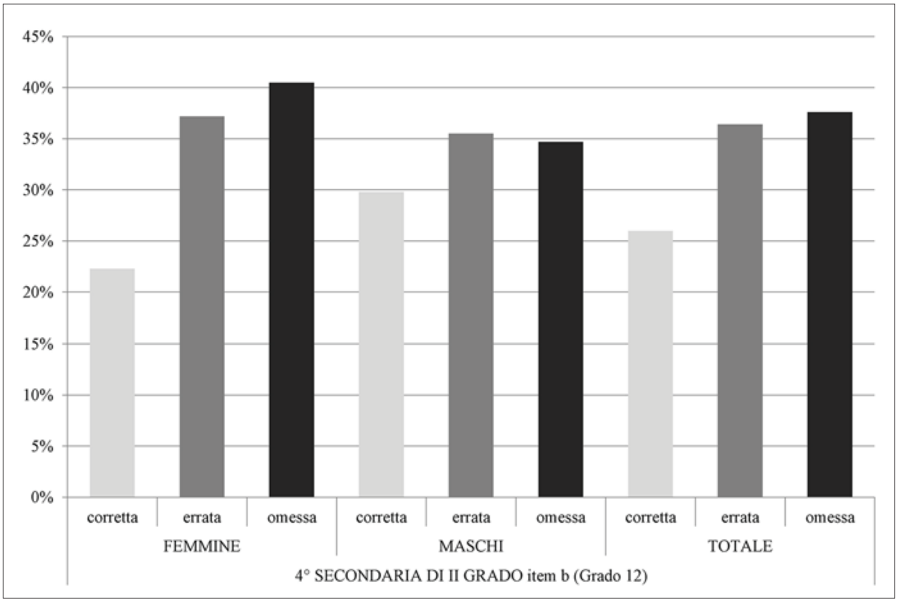



*Fig. 17 – Confronto 4ª secondaria di II grado per genere – Item b*



ISBN 9788835123972

Nei grafici in figure 18 e 19 sono riportati i risultati dei gradi 10 e 12 nei diversi indirizzi (liceo, tecnico e professionale). Risulta evidente la differenza tra i licei e i tecnici, ma soprattutto tra i licei e i professionali. Tale differenza si accresce inoltre al crescere del grado scolastico.

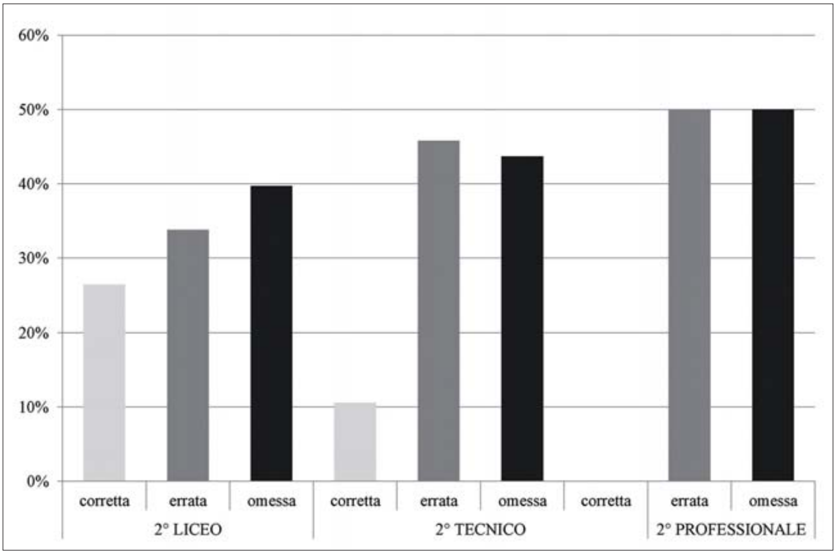



*Fig. 18 – Confronto 2ª secondaria di II grado – Item b*

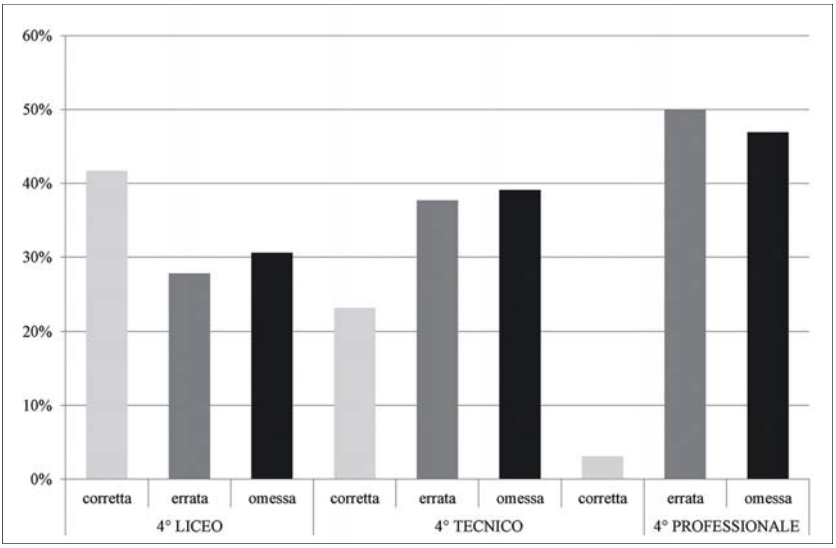



*Fig. 19 – Confronto 4ª secondaria di II grado – Item b*



ISBN 9788835123972

Nelle tabelle 3 e 4 riportiamo il confronto per indirizzo e per genere nelle classi seconde e quarte secondarie di secondo grado.

In questo item, a tutti i livelli, oltre a essere alte le percentuali degli errori, sono particolarmente elevate anche le omissioni. Questo anche a testimonianza che uno dei problemi principali degli studenti, oltre alla complessità riscontrata nelle argomentazioni, risulta ancora più preoccupante quella relativa alle difficoltà nelle formalizzazioni.

*Tab. 3 – Confronto per indirizzo e genere nelle classi 2ª secondarie di secondo grado*

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | *2ª liceo* | | | | |
| | *Femmine* | | | *Maschi* | | | *Totale* | |
| *Corretta* | *Errata* | *Omessa* | *Corretta* | *Errata* | *Omessa* | *Corretta* | *Errata* | *Omessa* |
| 16,7% | 38,1% | 45,2% | 42,3% | 26,9% | 30,8% | 26,5% | 33,8% | 39,7% |
| | | | | *2ª tecnico* | | | | |
| | *Femmine* | | | *Maschi* | | | *Totale* | |
| *Corretta* | *Errata* | *Omessa* | *Corretta* | *Errata* | *Omessa* | *Corretta* | *Errata* | *Omessa* |
| 4,7% | 35,9% | 59,4% | 15,4% | 53,8% | 30,8% | 10,6% | 45,8% | 43,7% |
| | | | | *2ª professionale* | | | | |
| | *Femmine* | | | *Maschi* | | | *Totale* | |
| *Corretta* | *Errata* | *Omessa* | *Corretta* | *Errata* | *Omessa* | *Corretta* | *Errata* | *Omessa* |
| 0,0% | 50,0% | 50,0% | 0,0% | 50,0% | 50,0% | 0,0% | 50,0% | 50,0% |

*Tab. 4 – Confronto per indirizzo e genere nelle classi 4ª secondarie di secondo grado*

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | *4ª liceo* | | | | |
| | *Femmine* | | | *Maschi* | | | *Totale* | |
| *Corretta* | *Errata* | *Omessa* | *Corretta* | *Errata* | *Omessa* | *Corretta* | *Errata* | *Omessa* |
| 30,9% | 34,5% | 34,5% | 76,5% | 5,9% | 17,6% | 41,7% | 27,8% | 30,6% |
| | | | | *4ª tecnico* | | | | |
| | *Femmine* | | | *Maschi* | | | *Totale* | |
| *Corretta* | *Errata* | *Omessa* | *Corretta* | *Errata* | *Omessa* | *Corretta* | *Errata* | *Omessa* |
| 15,6% | 37,5% | 46,9% | 29,7% | 37,8% | 32,4% | 23,2% | 37,7% | 39,1% |
| | | | | *4ª professionale* | | | | |
| | *Femmine* | | | *Maschi* | | | *Totale* | |
| *Corretta* | *Errata* | *Omessa* | *Corretta* | *Errata* | *Omessa* | *Corretta* | *Errata* | *Omessa* |
| 0,0% | 100,0% | 0,0% | 3,3% | 46,7% | 50,0% | 3,1% | 50,0% | 46,9% |

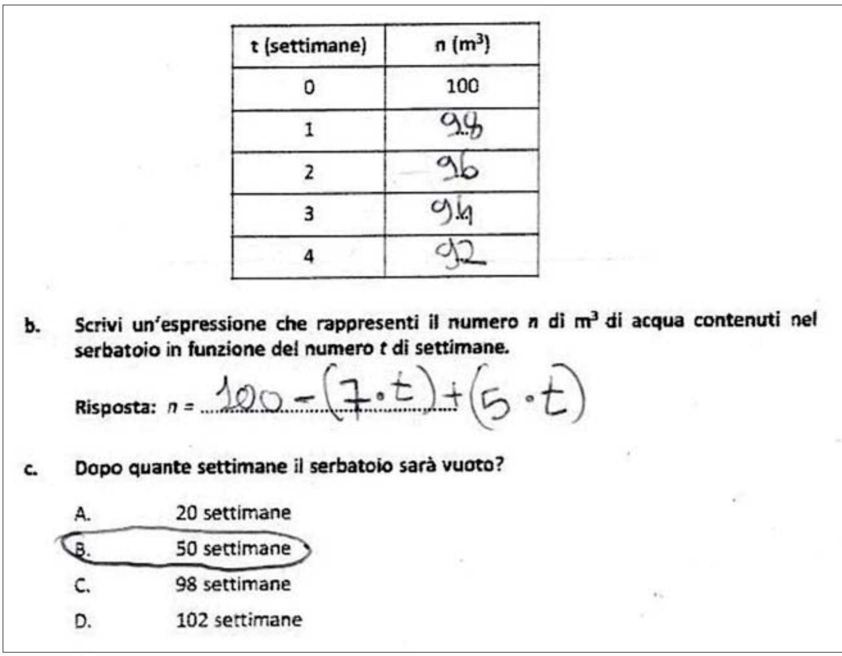
In tutti gli errori effettuati dagli studenti emerge una scarsa abitudine alla formalizzazione, anche quando si è compreso il senso della domanda. Spesso viene data una risposta più per "contratto didattico" e quindi perché ci



ISBN 9788835123972

si aspetta di doverla dare nelle modalità già viste in classe, ma in contesti didattici differenti.

Nel primo caso (fig. 20) in una prova di terza secondaria di I grado si può osservare come lo studente abbia compreso il senso della domanda, ma poi trovi difficoltà a formalizzarla in modo più semplice riguardo al parametro t.



| t (settimane) | n ($m^3$) |
|---|---|
| 0 | 100 |
| 1 | 98 |
| 2 | 96 |
| 3 | 94 |
| 4 | 92 |

**b.** **Scrivi un'espressione che rappresenti il numero *n* di $m^3$ di acqua contenuti nel serbatoio in funzione del numero *t* di settimane.**

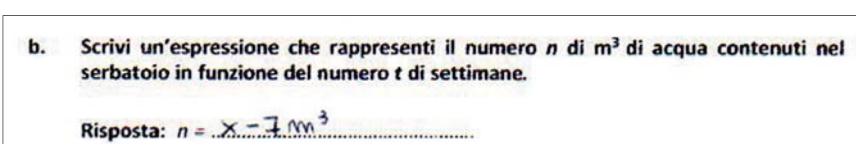
**Risposta:** $n = 100 - (7 \cdot t) + (5 \cdot t)$

**c.** **Dopo quante settimane il serbatoio sarà vuoto?**

A. 20 settimane
B. 50 settimane
C. 98 settimane
D. 102 settimane

*Fig. 20 – Esempio di una prova di 3ª secondaria di I grado*

In altri casi, invece, ci sono veri e propri errori nella formalizzazione (figg. 21-22).



**b.** **Scrivi un'espressione che rappresenti il numero *n* di $m^3$ di acqua contenuti nel serbatoio in funzione del numero *t* di settimane.**

**Risposta:** $n = x - 7\,m^3$

*Fig. 21 – Esempio di una prova di 3ª secondaria di I grado*

Qui è anche un chiaro esempio di contratto didattico: si tratta di un'espressione con incognite, quindi "ci vuole x" (terza sec. I).



ISBN 9788835123972

**b.** **Scrivi un'espressione che rappresenti il numero *n* di m³ di acqua contenuti nel serbatoio in funzione del numero *t* di settimane.**

**Risposta:** *n* = [300 : 2·(3)]]

*Fig. 22 – Esempio di una prova di una 2ª secondaria di II grado*

Nel secondo caso invece si ha una formalizzazione estrema con tante parentesi, ma mancano le lettere (seconda sec. II).

Si hanno poi esempi (figg. 23-24) con eccessi di uguaglianze, altro problema scolastico in quanto spesso il segno uguale viene visto quasi esclusivamente nel senso procedurale.

Nel secondo caso, inoltre, non si ravvisa alcun senso della formalizzazione e in più viene messo un risultato finale (2ª sec. II).

**a.** **Completa la seguente tabella relativa al numero *n* di m³ di acqua contenuti nel serbatoio in funzione del numero *t* di settimane a partire da oggi:**

| t (settimane) | n (m³) |
|---|---|
| 0 | 100 |
| 1 | 98 |
| 2 | 96 |
| 3 | 94 |
| 4 | 92 |

**b.** **Scrivi un'espressione che rappresenti il numero *n* di m³ di acqua contenuti nel serbatoio in funzione del numero *t* di settimane.**

**Risposta:** *n* = t = n + 5 − 7

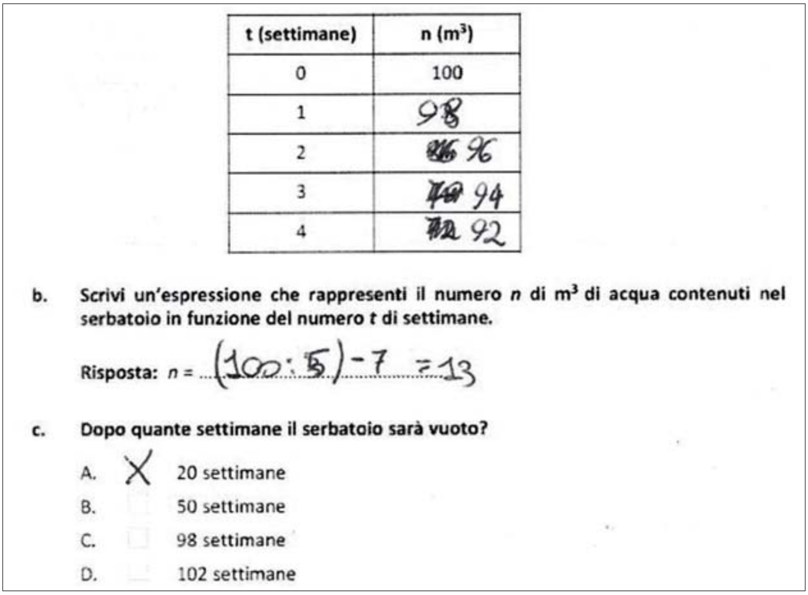
**c.** **Dopo quante settimane il serbatoio sarà vuoto?**

A. ☐ 20 settimane
B. ☒ 50 settimane
C. ☐ 98 settimane
D. ☐ 102 settimane

*Fig. 23 – Esempio di una prova di una 2ª secondaria di II grado*



ISBN 9788835123972



| t (settimane) | n (m³) |
|---|---|
| 0 | 100 |
| 1 | 98 |
| 2 | ~~96~~ 96 |
| 3 | ~~40~~ 94 |
| 4 | ~~12~~ 92 |

**b.** **Scrivi un'espressione che rappresenti il numero *n* di m³ di acqua contenuti nel serbatoio in funzione del numero *t* di settimane.**

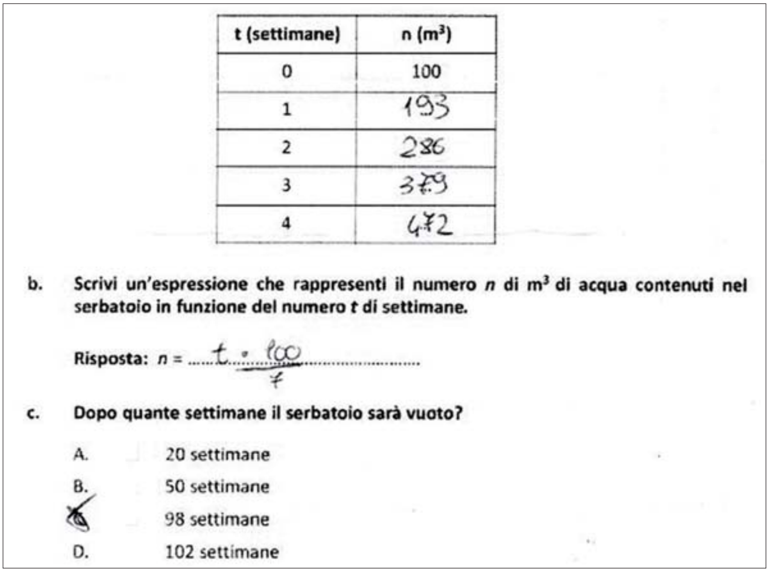
**Risposta:** $n =$ (100 : 5) − 7 = 13

**c.** **Dopo quante settimane il serbatoio sarà vuoto?**

A. X 20 settimane
B. 50 settimane
C. 98 settimane
D. 102 settimane

*Fig. 24 – Esempio di una prova di una 2ª secondaria di II grado*

In una 4ª secondaria di II grado uno studente è ricorso addirittura a una frazione (fig. 25), mentre un altro ha inserito persino delle parole (fig. 26).



| t (settimane) | n (m³) |
|---|---|
| 0 | 100 |
| 1 | 193 |
| 2 | 286 |
| 3 | 379 |
| 4 | 472 |

**b.** **Scrivi un'espressione che rappresenti il numero *n* di m³ di acqua contenuti nel serbatoio in funzione del numero *t* di settimane.**

**Risposta:** $n = \frac{t \cdot 100}{7}$

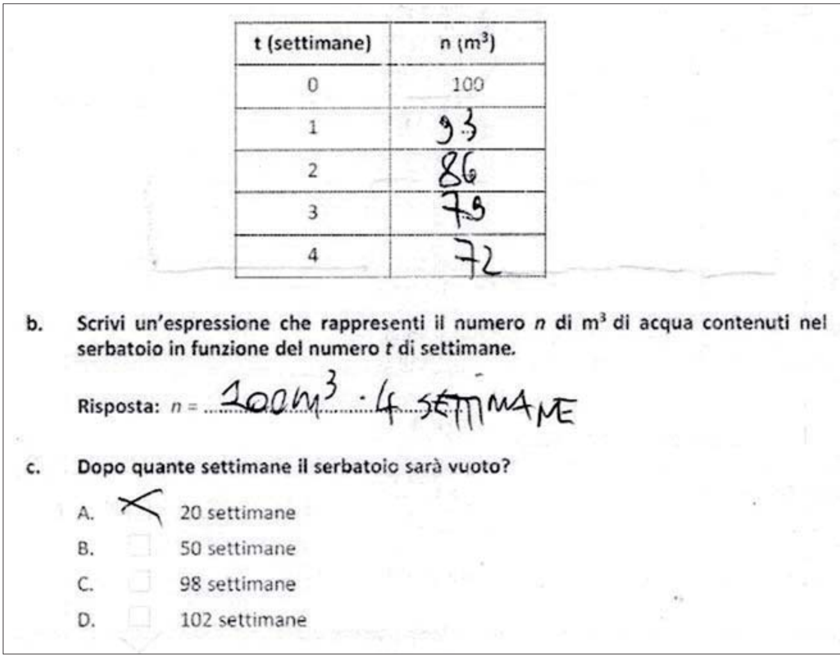
**c.** **Dopo quante settimane il serbatoio sarà vuoto?**

A. 20 settimane
B. 50 settimane
C. X 98 settimane
D. 102 settimane

*Fig. 25 – Esempio di una prova di una 4ª secondaria di II grado*



ISBN 9788835123972



| t (settimane) | n (m$^3$) |
|---|---|
| 0 | 100 |
| 1 | 93 |
| 2 | 86 |
| 3 | 79 |
| 4 | 72 |

**b.** **Scrivi un'espressione che rappresenti il numero *n* di m$^3$ di acqua contenuti nel serbatoio in funzione del numero *t* di settimane.**

**Risposta:** $n$ = $100m^3 \cdot 4$ SETTIMANE

**c.** **Dopo quante settimane il serbatoio sarà vuoto?**

A. X 20 settimane
B. ☐ 50 settimane
C. ☐ 98 settimane
D. ☐ 102 settimane

*Fig. 26 – Esempio di una prova di una 4ª secondaria di II grado*

## *2.6.3. Terzo item*

Terzo e quarto item sono molto simili come stimoli in quanto si riferiscono sempre a sequenze riferite ai cosiddetti numeri quadrati.

Entrambi questi item e anche il successivo fanno parte della terza tipologia.

Nel terzo (fig. 27) viene presentata una sequenza data da triangoli, mentre nel quarto (fig. 40) la sequenza è di quadratini.

Cambia tuttavia la richiesta e anche la modalità di risposta.

Però i risultati delle risposte degli studenti ai due item sono sensibilmente diversi fra loro sia per quel che riguarda il nostro campione, sia per il campione nazionale INVALSI: nel terzo item sono molto pochi gli studenti che rispondono correttamente, mentre nel quarto la situazione è decisamente migliore.



ISBN 9788835123972

**D21. Queste sono le prime tre figure di una sequenza.**

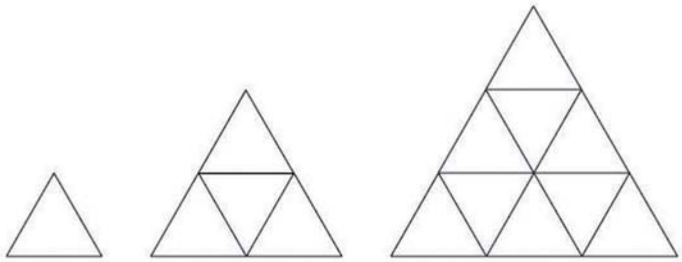


fig. 1 fig. 2 fig. 3 ...

**Il lato del triangolo di figura 2 è il doppio di quello di figura 1 e la sua area è quattro volte più grande. Il lato del triangolo di figura 3 è il triplo di quello di figura 1 e l'area è nove volte più grande.**

**a) Un triangolo formato da 30 triangoli uguali a quello di figura 1 appartiene alla sequenza?**

☐ Sì

☐ No

**b) Giustifica la tua risposta:**

..........................................................................................

..........................................................................................

..........................................................................................

*Fig. 27 – Item G08 del 2010*

*Tab. 5 – Risultato campione nazionale G08 – 2010*

| *Item* | *Risposte corrette* | *Risposte errate* | *Risposte omesse* |
|---|---|---|---|
| a | 53,1% | 34,3% | 12,6% |
| b | 16,8% | 47,9% | 35,3% |

Anche in questo caso abbiamo preso in considerazione solamente i risultati ottenuti nell'item b.

Nei successivi grafici possiamo osservare i risultati dell'item b sia per grado scolastico sia per genere.

Non si riscontrano differenze significative nella secondaria di I grado (grafico in fig. 28), mentre per il grado 10 (grafico in fig. 29) si registrano maggiori errori per le femmine e invece nel grado 12 i risultati sono lievemente peggiori (5%) per i maschi (grafico in fig. 30).



ISBN 9788835123972

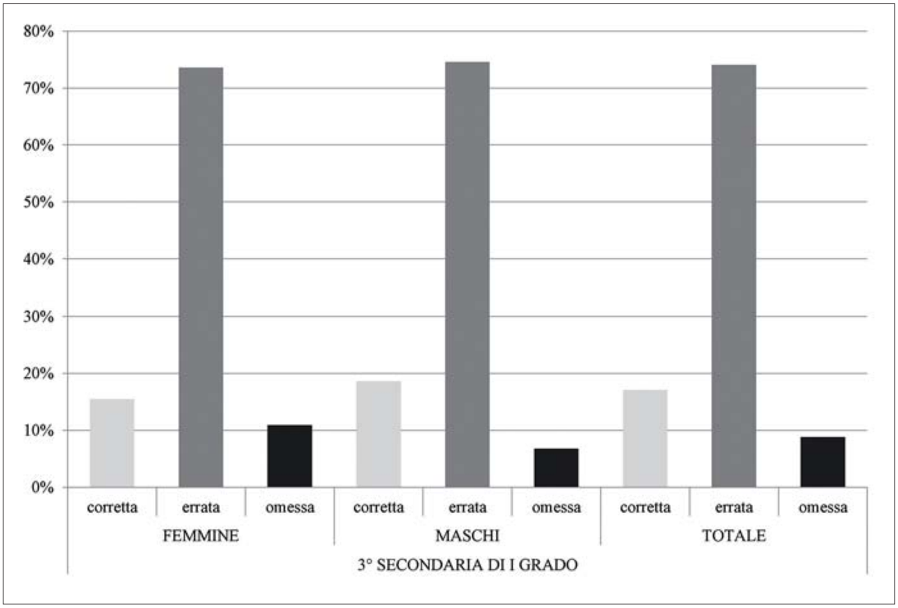



*Fig. 28 – Confronto 3ª secondaria di I grado per genere – Item b*

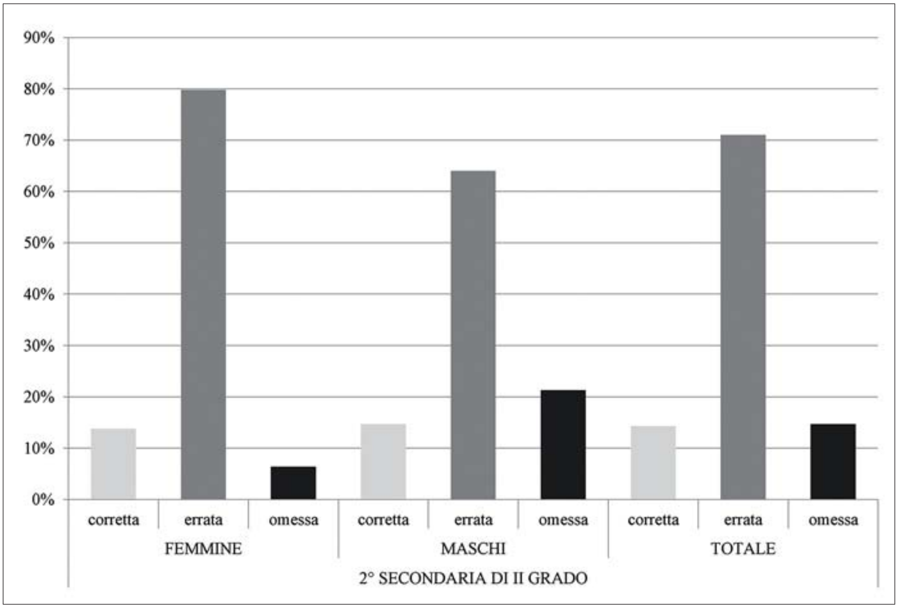



*Fig. 29 – Confronto 2ª secondaria di II grado per genere – Item b*



ISBN 9788835123972

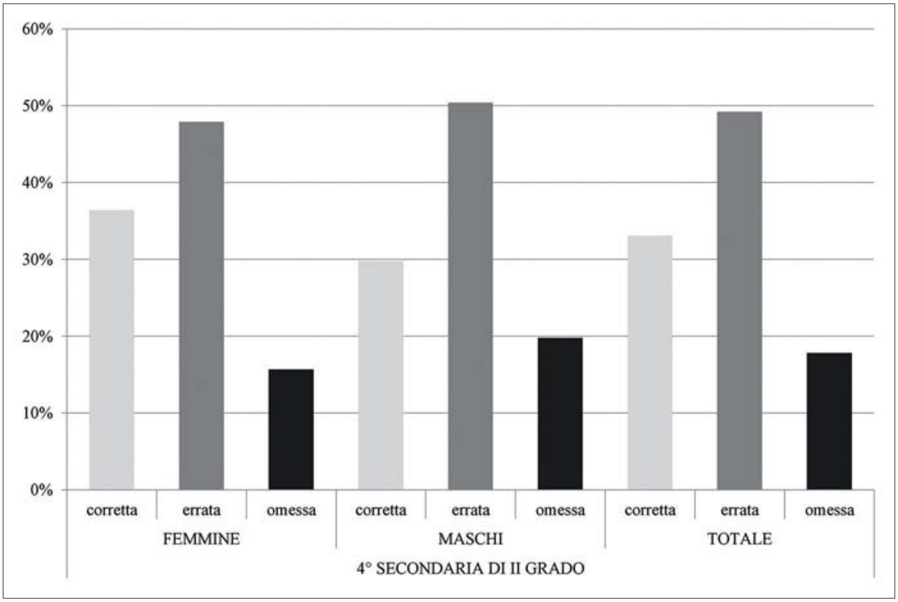



*Fig. 30 – Confronto 4ª secondaria di II grado per genere – Item b*

Nei grafici in figura 31 e 32 sono rappresentati i risultati relativi ai diversi indirizzi delle II secondarie di secondo grado.

Come per gli altri item analizzati sono evidenti le differenze tra il liceo e gli altri due indirizzi, ma stupisce soprattutto il livello basso di risposte corrette registrate negli istituti tecnici sia nelle seconde (grafico in fig. 31) sia nelle quarte classi (grafico in fig. 32).

Dall'analisi complessiva, come già visto, è migliore il risultato dei liceali, anche se globalmente risponde bene solo un terzo dei ragazzi.

Nelle seconde i maschi rispondono meglio delle femmine, mentre per i professionali si registra una percentuale elevata di omissioni.

Nelle quarte il risultato è nettamente migliore nei licei, con i maschi che rispondono correttamente per oltre il 75%, mentre rimangono le difficoltà già riscontrate nei tecnici e, ancora di più, nei professionali.



ISBN 9788835123972

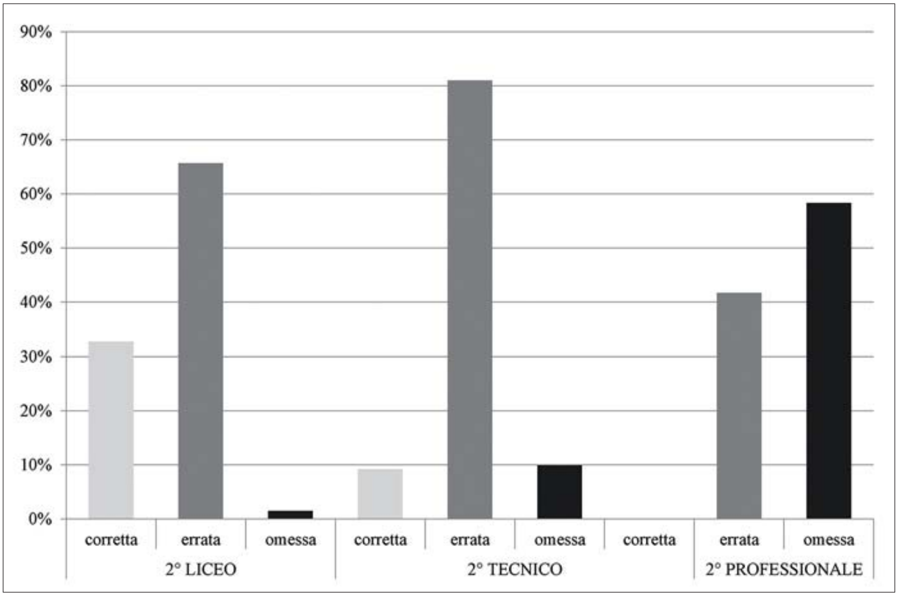



*Fig. 31 – Confronto 2ª secondaria di II grado – Item b*

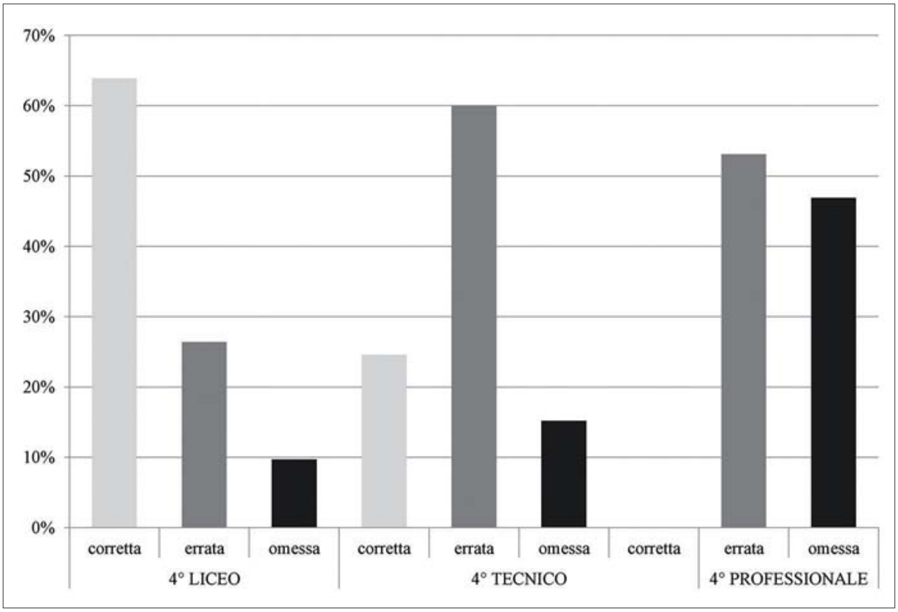


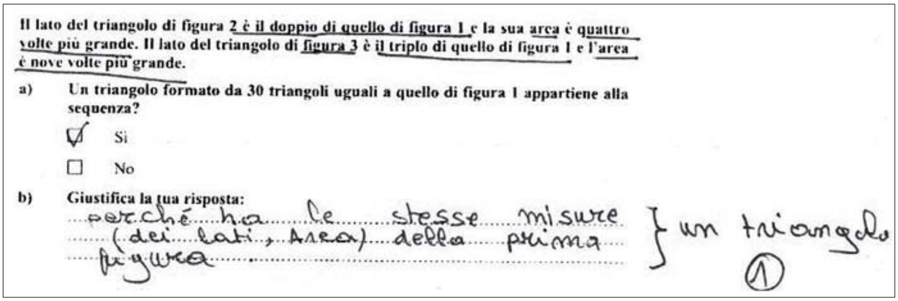

*Fig. 32 – Confronto 4ª secondaria di II grado – Item b*



ISBN 9788835123972

Per quanto riguarda gli errori si nota una grossa difficoltà ad argomentare, anche per gli studenti più grandi. Si hanno diverse tipologie di argomentazioni alcune molto "fantasiose", dopo quanto da loro sottolineato nel testo della domanda (fig. 33), altre con alcuni calcoli e poco "senso" matematico, legati probabilmente ancora al "contratto didattico" implicito (fig. 34) nelle classi terze della secondaria di I grado.

Alcune difficoltà possono essere legate anche a misconcezioni sui significati di area e perimetro.


Il lato del triangolo di figura 2 è il doppio di quello di figura 1 e la sua area è quattro volte più grande. Il lato del triangolo di figura 3 è il triplo di quello di figura 1 e l'area è nove volte più grande.

a) Un triangolo formato da 30 triangoli uguali a quello di figura 1 appartiene alla sequenza?

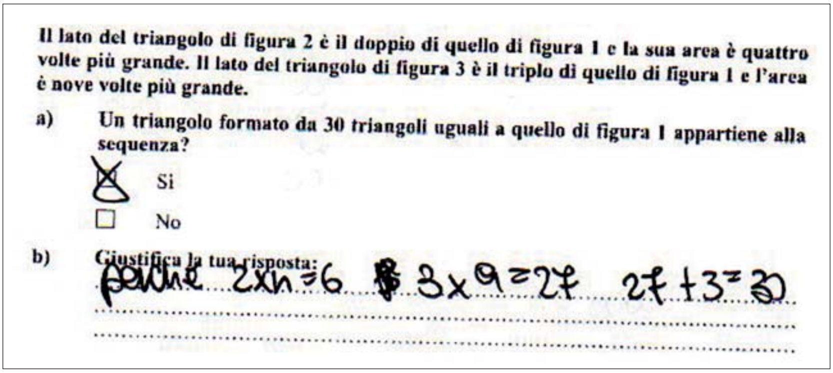
Sì

No

b) Giustifica la tua risposta:

perché ha le stesse misure (dei lati, Area) della prima figura } un triangolo 1

*Fig. 33 – Esempio di una prova di 3ª secondaria di I grado*


Il lato del triangolo di figura 2 è il doppio di quello di figura 1 e la sua area è quattro volte più grande. Il lato del triangolo di figura 3 è il triplo di quello di figura 1 e l'area è nove volte più grande.

a) Un triangolo formato da 30 triangoli uguali a quello di figura 1 appartiene alla sequenza?

Sì

No

b) Giustifica la tua risposta:

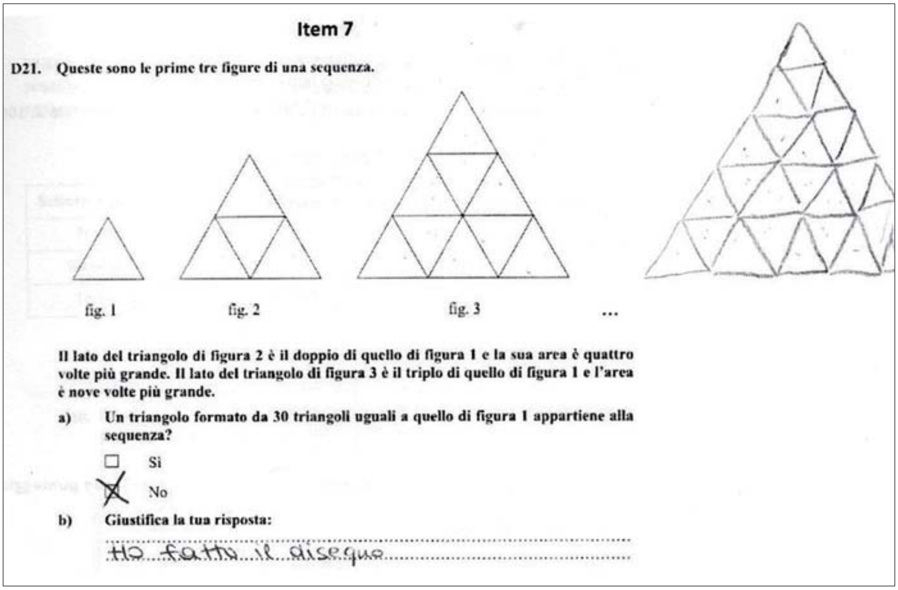
perché 2xn=6 3x9=27 27+3=30

*Fig. 34 – Esempio di una prova di 3ª secondaria di I grado*

Alcune risposte invece sono più artistiche che argomentative (fig. 35), oppure con molte lettere e anche poco senso dell'area di un triangolo (fig. 36) nelle classi seconde della secondaria di II grado, forse proprio per qualche misconcezione su area e perimetro (D'Amore e Sbaragli, 2011).



ISBN 9788835123972



**Item 7**

**D21. Queste sono le prime tre figure di una sequenza.**

fig. 1 fig. 2 fig. 3 ...

**Il lato del triangolo di figura 2 è il doppio di quello di figura 1 e la sua area è quattro volte più grande. Il lato del triangolo di figura 3 è il triplo di quello di figura 1 e l'area è nove volte più grande.**

**a) Un triangolo formato da 30 triangoli uguali a quello di figura 1 appartiene alla sequenza?**

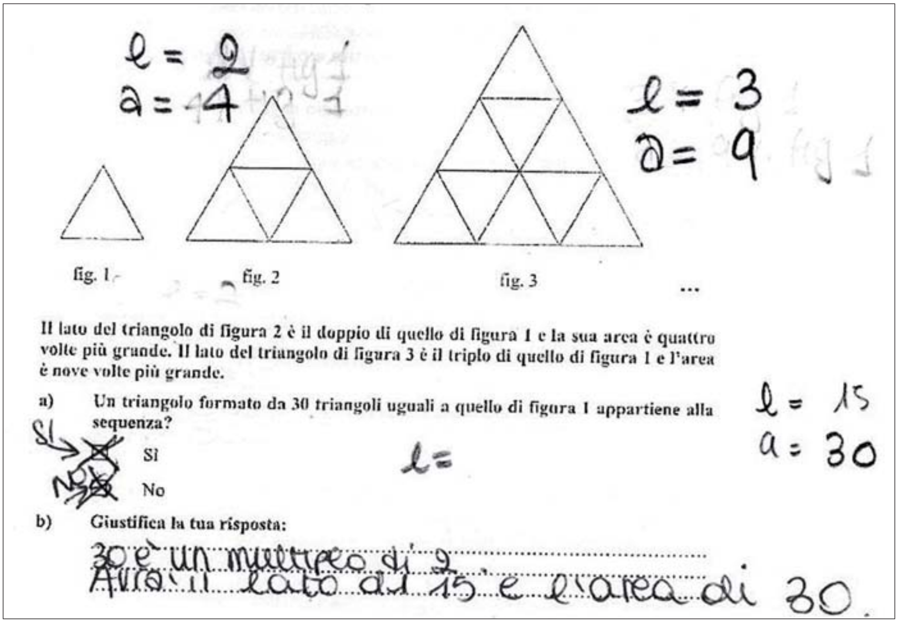
☐ Sì

☒ No

**b) Giustifica la tua risposta:**

Ho fatto il disegno

*Fig. 35 – Esempio di una prova di una 2ª secondaria di I grado*



l = 2
a = 4

l = 3
a = 9

fig. 1 fig. 2 fig. 3 ...

Il lato del triangolo di figura 2 è il doppio di quello di figura 1 e la sua area è quattro volte più grande. Il lato del triangolo di figura 3 è il triplo di quello di figura 1 e l'area è nove volte più grande.

a) Un triangolo formato da 30 triangoli uguali a quello di figura 1 appartiene alla sequenza?

l = 15
a = 30

l =

SI ☒ Sì

NO ☒ No

b) Giustifica la tua risposta:

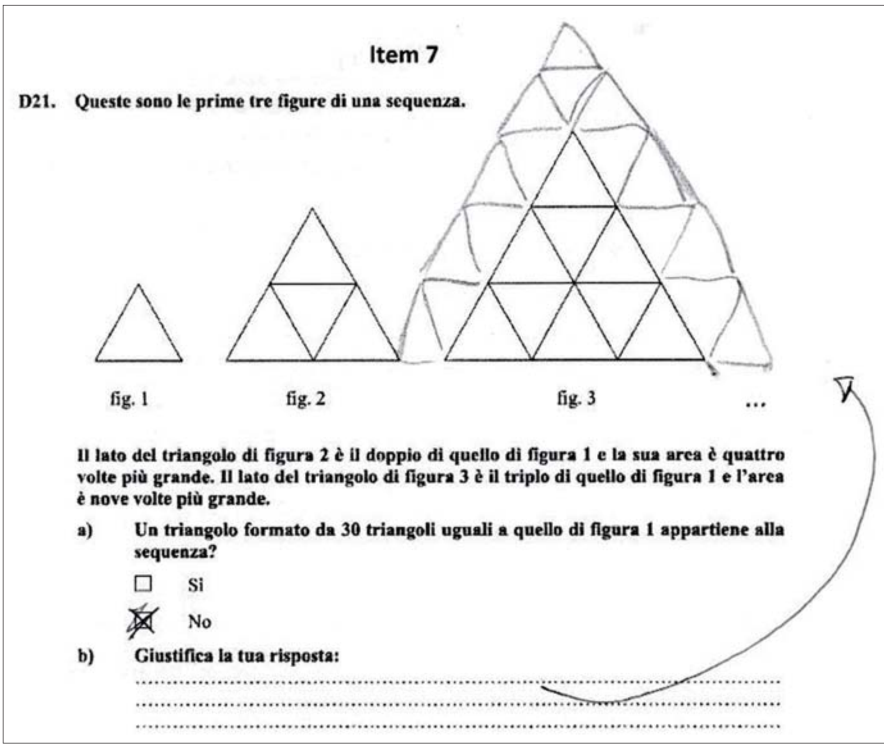
30 è un multiplo di 2.
Avrà il lato di 15 e l'area di 30.

*Fig. 36 – Esempio di una prova di una 2ª secondaria di II grado*



ISBN 9788835123972

Anche in quarta secondaria di II grado si disegna e si indica, ma non si argomenta (fig. 37) o si argomenta in vari modi, magari creativi ma sempre con poco senso matematico (figg. 38-39). In tutti questi casi sembra che gli studenti provino a rispondere comunque perché previsto dal contratto didattico, utilizzando le strategie che possono avere già osservato in qualche altro contesto o esercizio svolto in classe.



**Item 7**

**D21. Queste sono le prime tre figure di una sequenza.**

fig. 1 fig. 2 fig. 3 …

**Il lato del triangolo di figura 2 è il doppio di quello di figura 1 e la sua area è quattro volte più grande. Il lato del triangolo di figura 3 è il triplo di quello di figura 1 e l'area è nove volte più grande.**

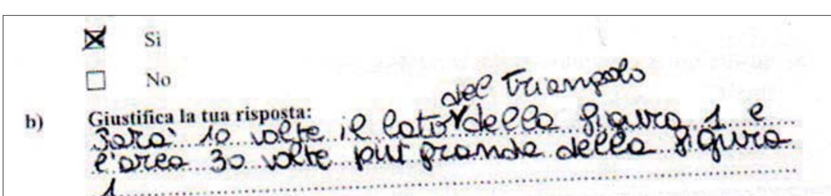
**a) Un triangolo formato da 30 triangoli uguali a quello di figura 1 appartiene alla sequenza?**

☐ Si

☒ No

**b) Giustifica la tua risposta:**

*Fig. 37 – Esempio di una prova di una 4ª secondaria di II grado*



☒ Si

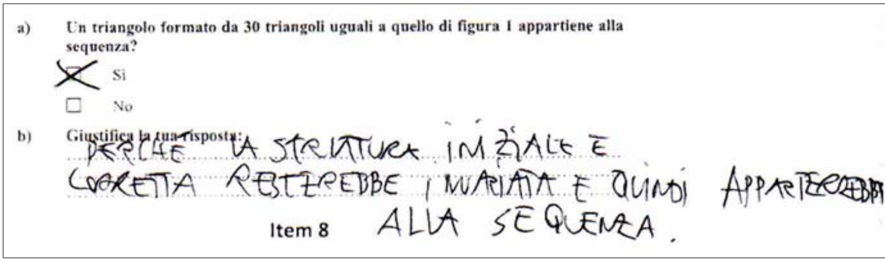
☐ No

b) Giustifica la tua risposta: Sarà 10 volte il lato del Triangolo della figura 1 e l'area 30 volte più grande della figura 1

*Fig. 38 – Esempio di una prova di una 4ª secondaria di II grado*



ISBN 9788835123972


a) Un triangolo formato da 30 triangoli uguali a quello di figura 1 appartiene alla sequenza?

☒ Sì

☐ No

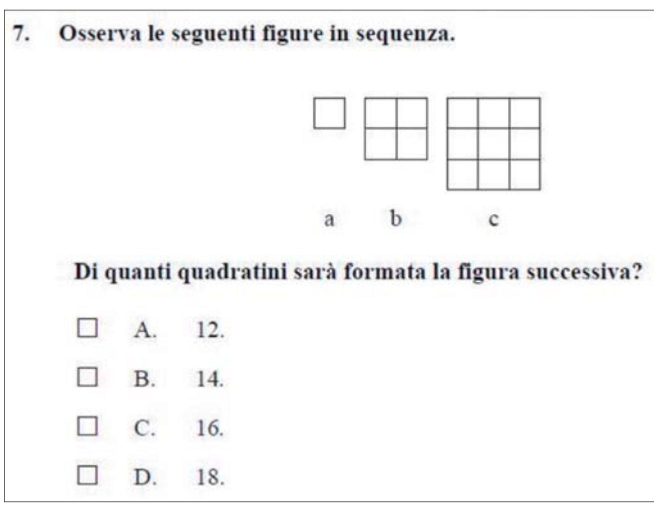
b) Giustifica la tua risposta: PERCHÉ LA STRUTTURA INIZIALE È CORRETTA RESTEREBBE INVARIATA E QUINDI APPARTEREBBE ALLA SEQUENZA.

Item 8

*Fig. 39 – Esempio di una prova di una 4ª secondaria di II grado*

### *2.6.4. Quarto item*

Questo item (fig. 40) aveva il grosso vantaggio della risposta multipla, ma nel campione nazionale (tabella 6) non aveva avuto risultati positivi. Molto meglio è andato nel nostro campione.


**7. Osserva le seguenti figure in sequenza.**



**Di quanti quadratini sarà formata la figura successiva?**

☐ A. 12.

☐ B. 14.

☐ C. 16.

☐ D. 18.

*Fig. 40 – Item G05 del 2009*

*Tab. 6 – Risultato campione nazionale G05 – 2009*

| *Risposte corrette* | *Risposte errate* | *Risposte omesse* |
|---|---|---|
| 38,8% | 60,5% | 0,7% |

Nei grafici in figure 41, 42 e 43 sono rappresentati i risultati per genere e per grado scolastico.



ISBN 9788835123972

Possiamo osservare che per tutti i gradi i risultati sono stati positivi e nettamente migliori rispetto all'item precedente. Per le secondarie di I e II grado non si registrano differenze significative tra i sessi.

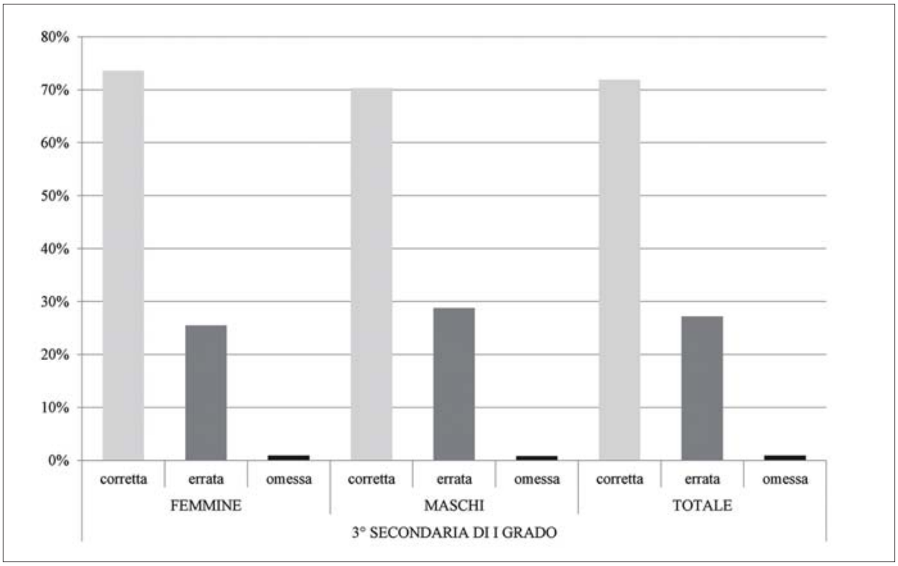



*Fig. 41 – Confronto 3ª secondaria di I grado per genere*

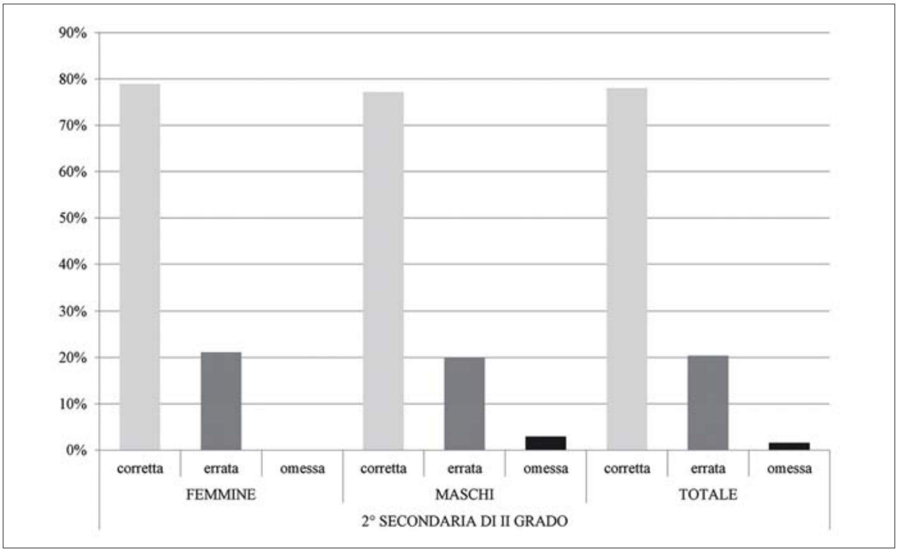



*Fig. 42 – Confronto 3ª secondaria di II grado per genere*



ISBN 9788835123972

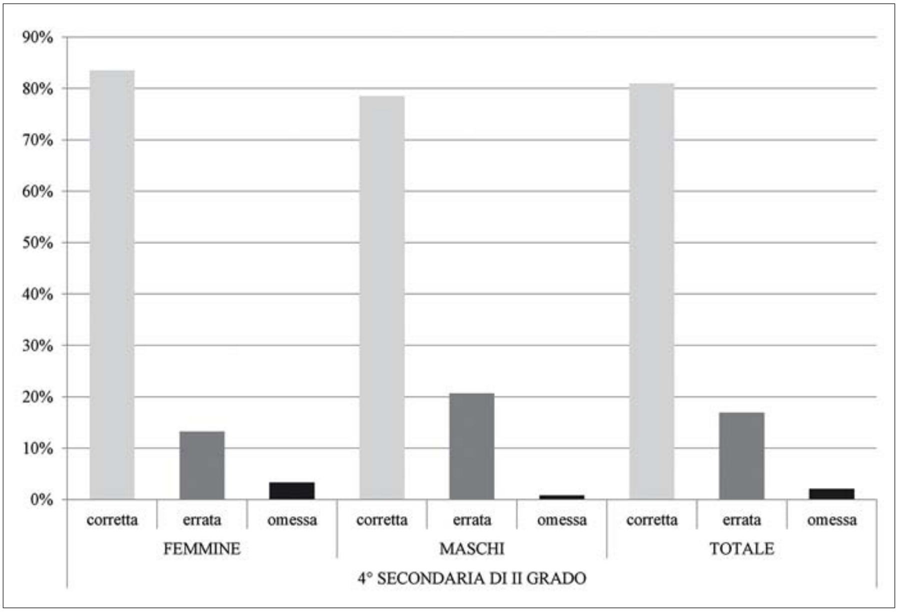



*Fig. 43 – Confronto 4ª secondaria di II grado per genere*

Nei grafici successivi (grafici in figg. 44 e 45) sono riportati i risultati delle 2ª e 4ª secondarie di secondo grado, che evidenziano anche se in modo meno marcato rispetto all'item precedente le differenze tra i licei e i tecnici e i professionali.

Anche analizzando i risultati dei diversi indirizzi si può comunque notare il risultato nettamente migliore rispetto all'item precedente.

Calano drasticamente per questo item le omissioni, soprattutto per la tipologia di risposta che porta in ogni caso a "tentare la sorte".



ISBN 9788835123972

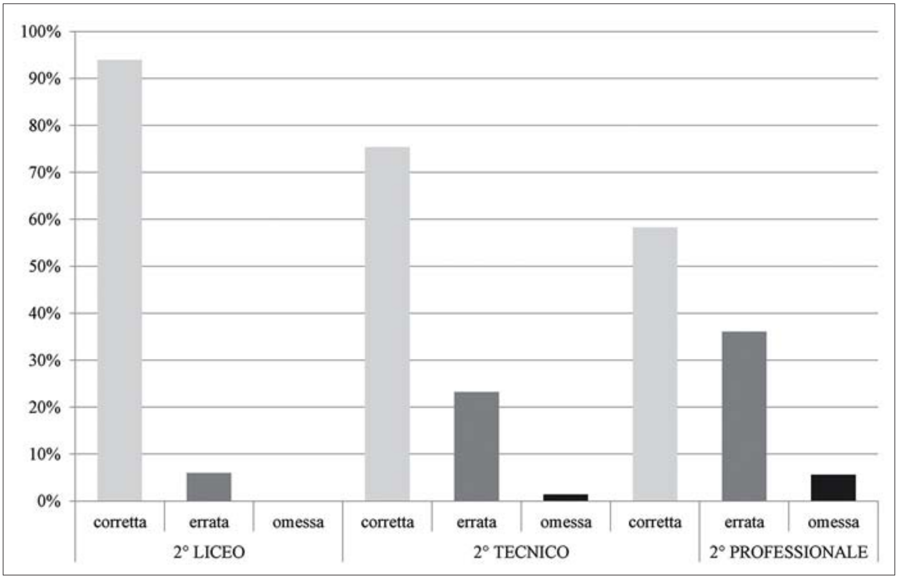



*Fig. 44 – Confronto 2ª secondaria di II grado*

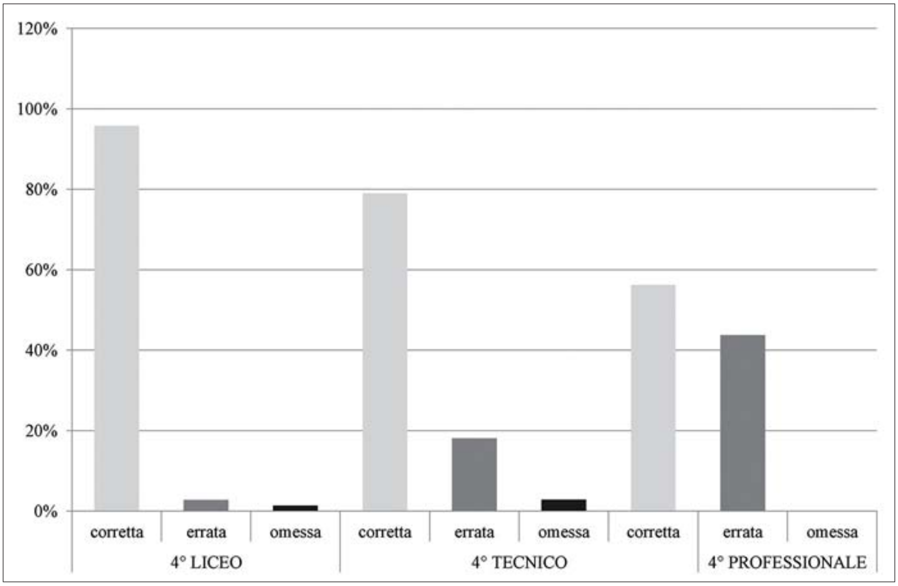



*Fig. 45 – Confronto 4ª secondaria di II grado*

Non si registrano differenze significative tra i sessi, anche se è leggera la prevalenza di risposte corrette per i maschi nelle classi seconde.



ISBN 9788835123972

Anche per questo item ci sono stati alcuni tentativi di elaborazione grafica, come quello di una terza secondaria di I grado con trasformazione della figura da quadrato a rettangolo (fig. 46), quindi senza tenere in particolare conto il contesto della domanda e soprattutto il fatto che il numero 12 non sia un quadrato perfetto. Si sono più ispirati al loro disegno, sbagliato, rispetto alla sequenza rappresentata nella figura.

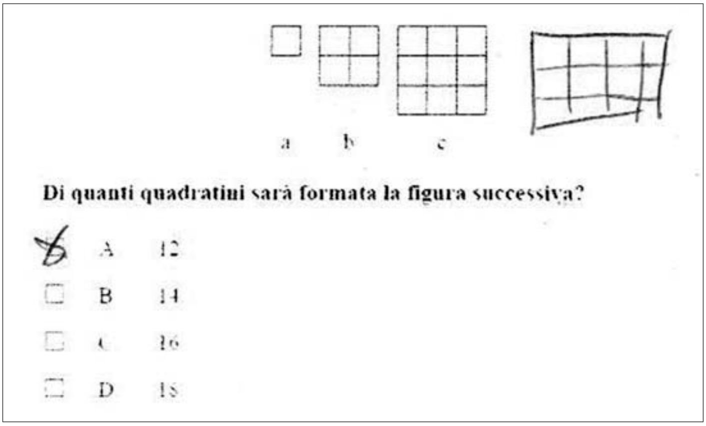



*Fig. 46 – Esempio di una prova di 3ª secondaria di I grado*

In una classe seconda secondaria di II grado (fig. 47), abbiamo potuto osservare una sequenza di numeri, suggerita probabilmente da qualcosa di simile ricordato per qualche ragione, o dettato dal contratto didattico, che tuttavia non conduce a una risposta corretta.

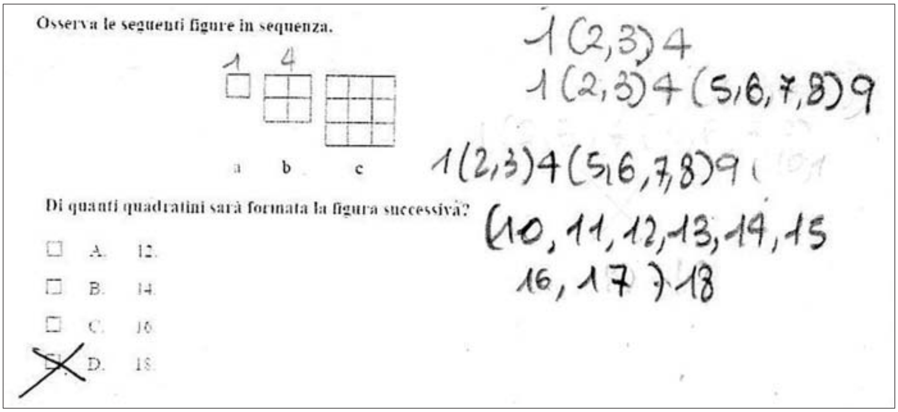



*Fig. 47 – Esempio di una prova di una 2ª secondaria di II grado*



ISBN 9788835123972

### 2.6.5. *Quinto item*

In questo item (fig. 48) si chiedeva di argomentare su una situazione all'apparenza molto ovvia, ma con risvolti non sempre prevedibili.

**D14. La somma di due numeri naturali *a* e *b* è pari. Se aggiungo 1 a entrambi i numeri, come sarà ora la somma? Scegli una delle due risposte e completa la frase.**

☐ La somma sarà pari perché ........................................................................................

.......................................................................................................................

.......................................................................................................................

.......................................................................................................................

☐ La somma sarà dispari perché ....................................................................................

.......................................................................................................................

.......................................................................................................................

.......................................................................................................................

*Fig. 48 – Item G08 del 2014*

*Tab. 7 – Risultato campione nazionale G08 – 2014*

| *Risposte corrette* | *Risposte errate* | *Risposte omesse* |
|---|---|---|
| 48,0% | 41,1% | 10,9% |

Nei grafici in figure 49, 50 e 51 sono riportati i risultati relativi alle risposte fornite per l'item 5, con riguardo alle differenze per genere, nei tre gradi scolastici della nostra ricerca.

Nella secondaria di I grado non ci sono differenze significative di genere per quanto riguarda le risposte corrette, mentre sono maggiori le omissioni nel campione maschile.

Nei due gradi della secondaria di II grado, abbiamo potuto osservare risposte maggiormente corrette (superiori al 5%) per le femmine rispetto ai maschi.



ISBN 9788835123972

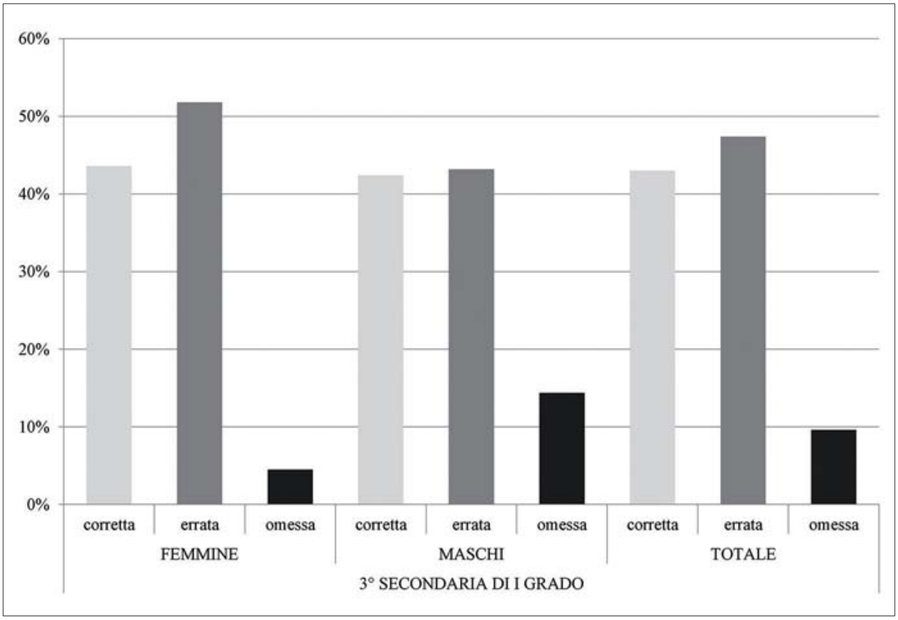



*Fig. 49 – Confronto 3ª secondaria di I grado per genere*

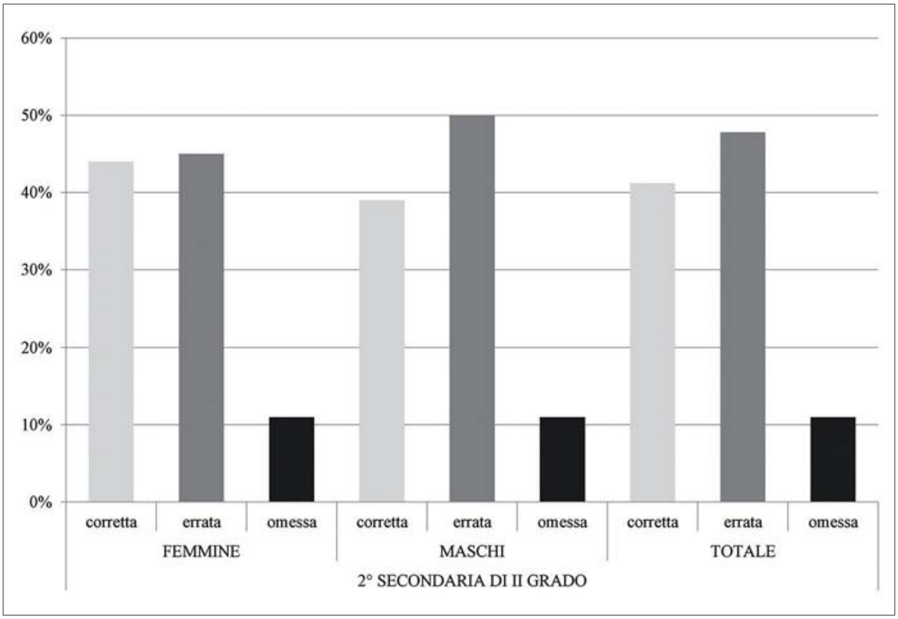



*Fig. 50 – Confronto 2ª secondaria di II grado per genere*



ISBN 9788835123972

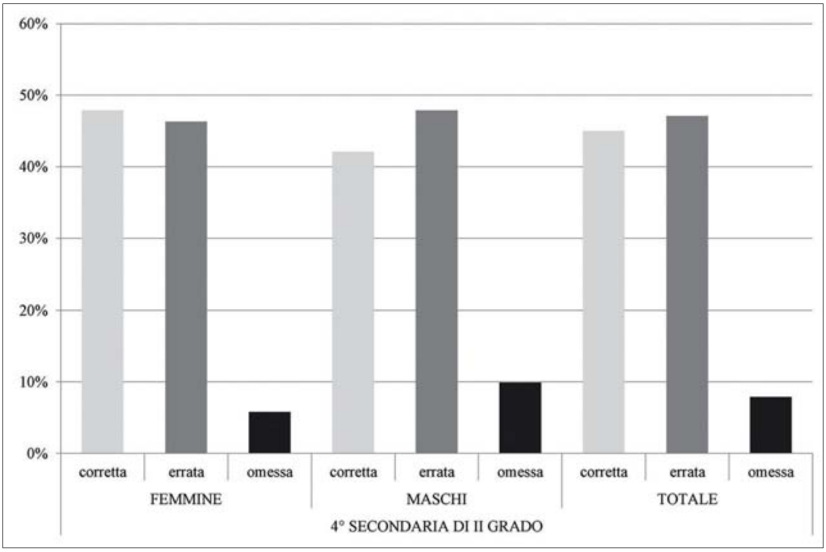



*Fig. 51 – Confronto 4ª secondaria di II grado per genere*

I successivi grafici 52 e 53 sono relativi alle differenze nei diversi indirizzi delle classi seconde e quarte secondarie di secondo grado.

Sono più marcate le differenze tra i tre indirizzi che si riscontrano nelle classi quarte, ma anche per le classi seconde i risultati dei licei sono significativamente migliori rispetto agli altri due indirizzi.

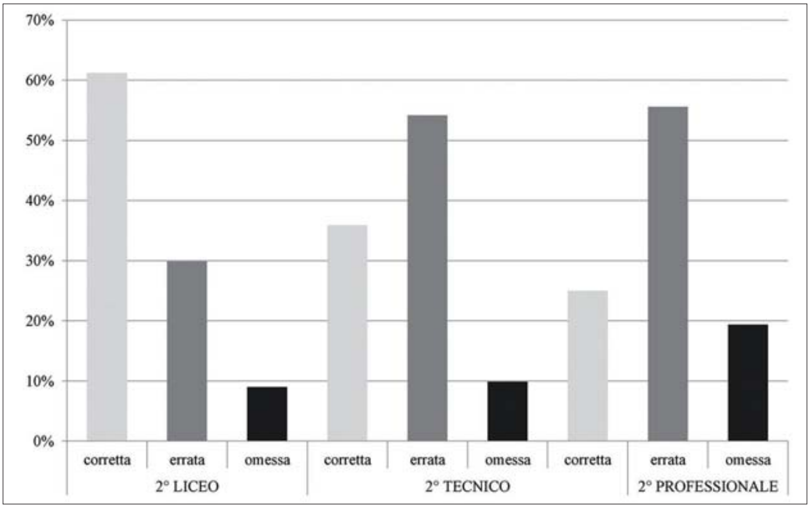



*Fig. 52 – Confronto 2ª secondaria di II grado*



ISBN 9788835123972

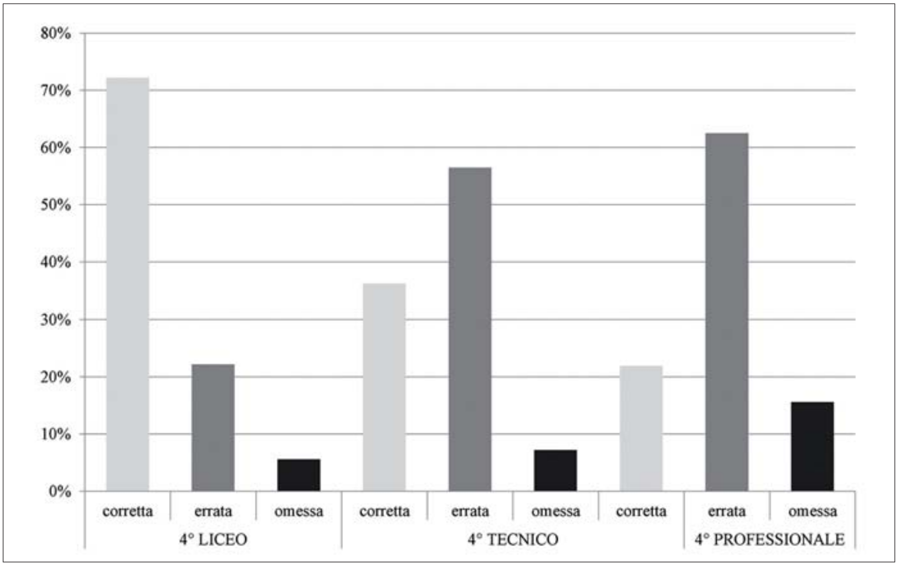



*Fig. 53 – Confronto 2ª secondaria di II grado*

Nelle tabelle 8 e 9 sono riportati i confronti per genere e indirizzo nelle due classi della secondaria di II grado.

Nella seconda liceo sono sensibilmente migliori i risultati delle femmine, cosa che non accade negli altri due indirizzi.

Nelle classi quarte di tutti gli indirizzi, invece, sono sempre migliori in modo significativo i risultati dei maschi rispetto a quelli delle femmine.

*Tab. 8 – Confronto per indirizzo e genere nelle classi 2ª secondarie di secondo grado*

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | *2ª liceo* | | | | |
| | *Femmine* | | | *Maschi* | | | *Totale* | |
| *Corretta* | *Errata* | *Omessa* | *Corretta* | *Errata* | *Omessa* | *Corretta* | *Errata* | *Omessa* |
| 63,4% | 26,8% | 9,8% | 57,7% | 34,6% | 7,7% | 61,2% | 29,9% | 9,0% |
| | | | | *2ª tecnico* | | | | |
| | *Femmine* | | | *Maschi* | | | *Totale* | |
| *Corretta* | *Errata* | *Omessa* | *Corretta* | *Errata* | *Omessa* | *Corretta* | *Errata* | *Omessa* |
| 32,8% | 56,3% | 10,9% | 38,5% | 52,6% | 9,0% | 35,9% | 54,2% | 9,9% |
| | | | | *2ª professionale* | | | | |
| | *Femmine* | | | *Maschi* | | | *Totale* | |
| *Corretta* | *Errata* | *Omessa* | *Corretta* | *Errata* | *Omessa* | *Corretta* | *Errata* | *Omessa* |
| 25,0% | 50,0% | 25,0% | 25,0% | 56,3% | 18,8% | 25,0% | 55,6% | 19,4% |



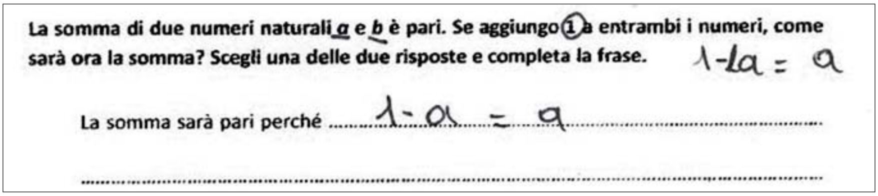
ISBN 9788835123972

*Tab. 9 – Confronto per indirizzo e genere nelle classi 4ª secondarie di secondo grado*

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *4ª liceo* | | | | | | | | |
| *Femmine* | | | *Maschi* | | | *Totale* | | |
| *Corretta* | *Errata* | *Omessa* | *Corretta* | *Errata* | *Omessa* | *Corretta* | *Errata* | *Omessa* |
| 69,1% | 23,6% | 7,3% | 82,4% | 17,6% | 0,0% | 72,2% | 22,2% | 5,6% |
| *4ª tecnico* | | | | | | | | |
| *Femmine* | | | *Maschi* | | | *Totale* | | |
| *Corretta* | *Errata* | *Omessa* | *Corretta* | *Errata* | *Omessa* | *Corretta* | *Errata* | *Omessa* |
| 31,3% | 64,1% | 4,7% | 40,5% | 50,0% | 9,5% | 36,2% | 56,5% | 7,2% |
| *4ª professionale* | | | | | | | | |
| *Femmine* | | | *Maschi* | | | *Totale* | | |
| *Corretta* | *Errata* | *Omessa* | *Corretta* | *Errata* | *Omessa* | *Corretta* | *Errata* | *Omessa* |
| 0,0% | 100,0% | 0,0% | 23,3% | 60,0% | 16,7% | 21,9% | 62,5% | 15,6% |

La maggior parte degli errori è legata, come anche in alcuni casi precedenti, alla mancanza di abitudine ad argomentare.

Tra gli errori commessi dagli studenti, uno di quelli che ci ha colpiti di più è stato quello con una formalizzazione "rivoluzionaria" in una terza secondaria di I grado (fig. 54), legata forse al periodo di lavoro sul calcolo letterale, in cui la prova è stata somministrata e quindi anche a un'intromissione del contratto didattico, come inteso da Brousseau (1986).


La somma di due numeri naturali a e b è pari. Se aggiungo 1 a entrambi i numeri, come sarà ora la somma? Scegli una delle due risposte e completa la frase. 1-1a = a

La somma sarà pari perché 1-a = a

*Fig. 54 – Esempio di una prova di 3ª secondaria di I grado*

Sempre in una classe terza secondaria di I grado (fig. 55), ma non solo, abbiamo trovato errori legati a letture parziali del testo o mancanza di comprensione della richiesta posta dalla domanda.

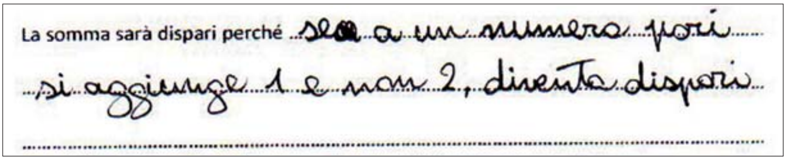
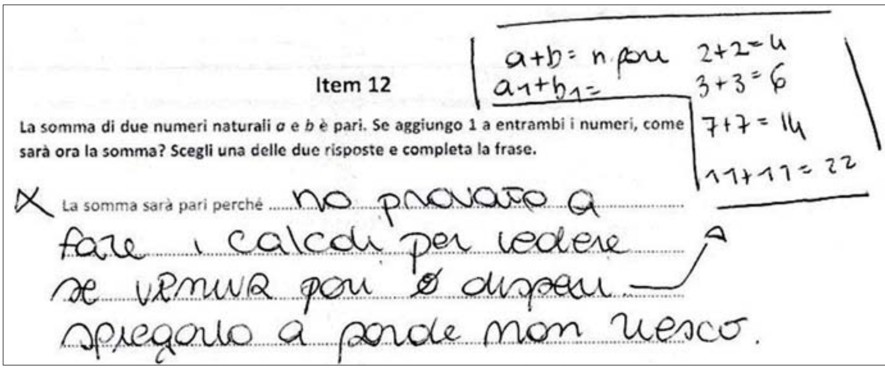

La somma sarà dispari perché se a un numero pari si aggiunge 1 e non 2, diventa dispari

*Fig. 55 – Esempio di una prova di 3ª secondaria di I grado*



ISBN 9788835123972

In una quarta secondaria di II grado abbiamo visto invece tentativi di argomentazioni con tante parole e numeri (fig. 56) oppure con una spiegazione (fig. 57), che però non risponde alla domanda, con anche l'ammissione della difficoltà di argomentare (fig. 56).


Item 12

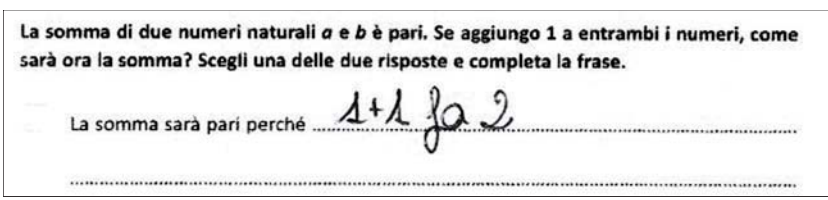
La somma di due numeri naturali *a* e *b* è pari. Se aggiungo 1 a entrambi i numeri, come sarà ora la somma? Scegli una delle due risposte e completa la frase.

$a+b=$ n pari
$a_1+b_1=$

2+2=4
3+3=6
7+7=14
11+11=22

X La somma sarà pari perché ho provato a fare i calcoli per vedere se veniva pari o dispari a spiegarlo a parole non riesco.

*Fig. 56 – Esempio di una prova di una 4ª secondaria di I grado*


**La somma di due numeri naturali *a* e *b* è pari. Se aggiungo 1 a entrambi i numeri, come sarà ora la somma? Scegli una delle due risposte e completa la frase.**

La somma sarà pari perché 1+1 fa 2

*Fig. 57 – Esempio di una prova di una 4ª secondaria di II grado*

## 3. Conclusioni

Dall'analisi dei risultati abbiamo potuto osservare come, andando dalla terza secondaria di I grado alla quarta di II grado la tipologia di errori tende a rimanere molto simile e sempre riconducibile a situazioni didattiche che non hanno abituato fin da piccoli ad argomentare e soprattutto a formalizzare (Baccaglini-Frank *et al.*, 2018).

Ovviamente si nota una diminuzione della percentuale di risposte errate all'aumentare del grado di scuola, anche se questo non sempre accade.

Inoltre, non si rilevano, in generale, delle differenze significative per quanto riguarda il genere, tranne in alcuni casi in cui ci sono differenze lievi (5% in più per le femmine).



ISBN 9788835123972

La maggior parte degli errori è anche collegata alla mancata comprensione del testo, che può essere legata o a una sua lettura frettolosa o parziale (Zan, 2016), o all'inganno dell'individuazione di alcune "parole chiave" (D'Amore e Fandiño Pinilla, 2014), che andrebbero abolite, secondo noi, dalla prassi didattica fin dalla scuola primaria. Abbiamo potuto osservare anche la grande difficoltà degli studenti dei due cicli di istruzione a formalizzare, sia con lettere sia graficamente, utilizzando figure.

Secondo noi gli studenti dovrebbero essere abituati fin dalla scuola Primaria a formalizzare, anche con semplici argomentazioni orali, per aiutarli ad acquisire una comprensione più profonda e una più corretta visione della Matematica.

Alcuni concetti possono, inoltre, essere meglio assimilati dagli studenti se vengono abituati fin dalla scuola primaria a lavorare per problemi e, sicuramente, anche ricorrendo ad attività di tipo laboratoriale (Graziani, 2019), come suggerito pure dalle Indicazioni nazionali del I ciclo di istruzione.

Occorre abituare i ragazzi a lavorare anche a gruppi o a coppie e soprattutto non si può pensare di continuare a insegnare ai ragazzi nello stesso modo in cui è stato insegnato a noi.

I tempi sono decisamente cambiati e con loro anche gli studenti, il loro mondo e loro interessi. Come diceva Einstein, «non possiamo pretendere che le cose cambino, se continuiamo a fare le stesse cose».

## Riferimenti bibliografici


Babini S., Graziani I. (2018), "Analysis of errors on area and perimeter in some INVALSI questions", *EDiMaST*, 4, pp. 609-622.

Babini S., Graziani I. (2019), "Tempo, errori, paura di sbagliare e valutazione: gli ostacoli che non fanno amare la matematica", *La matematica in atto: didattica e valutazione*, *Quaderni GRIMeD*, 5, pp. 174-183.

Baccaglini-Frank A., Di Martino P., Natalini R., Rosolini G. (2018), *Didattica della matematica*, Mondadori, Milano.

Binanti L. (a cura di) (2001), *Pedagogia, epistemologia e didattica dell'errore*, Rubbettino, Soveria Mannelli.

Brousseau G. (1986), *La relation didactique: le milieu*, Actes de la IVème Ecole d'Eté de didactique des mathématiques, IREM, Paris, pp. 54-68.

D'Amore B. (2003), *Le basi filosofiche, pedagogiche, epistemologiche e concettuali della Didattica della Matematica*, Pitagora, Bologna.

D'Amore B., Fandiño Pinilla M.I. (2014), "Illusioni, panacee, miti nell'insegnamento-apprendimento della matematica", *Difficoltà in matematica*, 11, 1, pp. 89-109.

D'Amore B., Sbaragli S. (2011), *Principi di base di Didattica della matematica*, Pitagora, Bologna.




ISBN 9788835123972

Graziani I., Babini S. (2016), “Pitag’ORA PRO NOBIS”, *EdiMaST*, 2, 2, pp. 315-338.
Graziani I. (2019), “Progettare attività di recupero efficaci in matematica”, *Archimede*, 1, pp. 8-14.
Sbaragli S. (2006), *Le misconcezioni in aula. Articolo di divulgazione*, NRD Dipartimento di Matematica, Università di Bologna.
Zan R. (2016), *I problemi di matematica*, Carrocci, Roma.
Zan R., Baccaglini-Frank A. (2017), *Avere successo in matematica. Strategie per l’inclusione e il recupero*, Utet, Torino.



ISBN 9788835123972

# *4. Analisi delle difficoltà di comprensione del testo nei quesiti INVALSI di Matematica*

di Stefania Pancanti

In questo capitolo si descrive un Quadro di riferimento teorico che permette l'analisi del testo di un quesito attraverso la definizione di alcuni criteri di classificazione del testo stesso e a partire da tale classificazione, consente l'individuazione di eventuali difficoltà di comprensione del testo che gli studenti possono incontrare durante il processo interpretativo del quesito. Nel II Seminario "I dati INVALSI: uno strumento per la ricerca" è stata già presentata la parte di questo Quadro di riferimento relativa alla teoria dei modelli mentali, alla linguistica e alla teoria delle rappresentazioni semiotiche e qui sarà affrontata invece la parte relativa della teoria della conoscenza matematica e del problem solving.

Per quanto riguarda la teoria della conoscenza matematica, il Quadro di riferimento teorico proposto fa riferimento alla classificazione proposta da Hiebert e Lefevre di conoscenza concettuale e conoscenza procedurale. Per la teoria del problem solving, il Quadro di riferimento attinge dai lavori di Polya e, in modo più specifico, dai contributi di Schoenfeld. Si introduce inoltre la caratterizzazione di operatività di un testo che riguarda la possibilità di un testo di poter essere compreso correttamente anche quando le conoscenze necessarie alla comprensione non sono tutte già possedute prima della lettura del testo stesso.

A partire da tale Quadro di riferimento teorico sono definiti i criteri di classificazione che permettono di mettere in relazione le caratteristiche del testo con le possibili cause che nel processo interpretativo possono ostacolarne la comprensione.

Questo Quadro di riferimento teorico sarà applicato ad alcuni esempi di quesiti tratti dalle prove INVALSI ed è stato utilizzato per la realizzazione di interventi didattici diretti a favorire la comprensione del testo nei problemi di Matematica.



ISBN 9788835123972

*In this paper we describe a Theoretical Framework that allows the analysis of a text by the definition of some classification criterions and, applying this classification, allows the identification of possible text comprehension difficulties that can hinder the interpretation process of the students. In the II Seminar "I dati INVALSI: uno strumento per la ricerca" a first part of this Theoretical Framework has been presented in relation with the theory of Mental Models, Linguistics and the theory of Semiotic Representations and in this work a second part related to the theory of Mathematical Knowledge and Problem-Solving is described.*

*With regard Mathematical Knowledge, this Theoretical Framework refers to the classification proposed by Hiebert and Lefevre in Conceptual Knowledge and Procedural Knowledge. In particular, in Conceptual Knowledge the classification method concerns the identification of the knowledge nodes necessary for text comprehension but focus is on the relationships between these nodes. In relation to Problem-Solving, the reference is Polya's works and, more specifically, Schoenfeld' s contributions. Furthermore, the characterization of Operativity of a Text is introduced as a property of a text being able to be correctly understood even when the knowledge necessary for understanding is not already possessed before reading the text itself.*

*Adopting this Theoretical Framework, it is possible to define classification criterions of a text that allow to link text characteristics with the possible causes of a not correct construction of the mental model by the interpretation process.*

*This Theoretical Framework will be applied to some examples of INVALSI Mathematical texts. Furthermore the proposed Theoretical Framework has been applied for the realization of didactic interventions aimed to improving text comprehension in mathematical problems.*

## 1. Introduzione

Nell'ambito di un'attività di ricerca sviluppata nel corso del dottorato[1] è stato ideato un Quadro di riferimento per l'analisi a priori delle difficoltà di comprensione del testo nei problemi di Matematica con l'obiettivo di evi-

[1] Dottorato di ricerca in Informatica, sistemi e telecomunicazioni, indirizzo Telematica e società dell'informazione, sotto-indirizzo Applicazioni telematiche, Università di Firenze, ciclo XXVI. Nell'attività di ricerca svolta nell'ambito di questo dottorato è stato affrontato un problema di formazione per gli insegnanti di matematica in relazione alle difficoltà linguistiche e di comprensione del testo nei quesiti INVALSI e OCSE-PISA, progettando sia i contenuti del corso sia un prototipo di percorso di formazione in modalità e-learning.



ISBN 9788835123972

denziare come le difficoltà di comprensione del testo possano essere causa di insuccesso nelle risposte date dagli studenti.

## 2. Quadro di riferimento teorico

Il Quadro di riferimento teorico e i criteri di classificazione che vengono proposti per osservare e interpretare tali difficoltà è stato sviluppato attingendo da diversi ambiti di ricerca che sono il problem solving, la conoscenza matematica, la teoria delle rappresentazioni semiotiche e la linguistica. In Pancanti (2019) è stata presentata la parte del Quadro di riferimento relativa alla linguistica e alla teoria delle rappresentazioni semiotiche mentre in questo contributo, per i criteri di analisi che saranno descritti, sono presentate le parti relative alla conoscenza matematica e al problem solving.

### *2.1. La conoscenza matematica*

Le classificazioni più recenti della conoscenza matematica sono riconducibili al filosofo inglese Ryle (1949), che distingue due tipi di conoscenza, rispettivamente come *knowing that*, "sapere che cosa", e *knowing how*, "sapere come". Successivamente lo psicologo cognitivista Anderson (1983), parla di conoscenza dichiarativa per la prima e conoscenza procedurale per la seconda. Per conoscenza dichiarativa intende una forma inerte di conoscenza dei singoli fatti, non tra loro correlati mentre parla della conoscenza procedurale come conoscenza di operatori e di condizioni su tali operatori che garantiscano il raggiungimento di determinati obiettivi. Saranno James Hiebert e Patricia Levefre nel 1986 che proporranno la distinzione tra conoscenza concettuale e conoscenza procedurale.

#### *2.1.1. La conoscenza concettuale*

La conoscenza di tipo concettuale è caratterizzata come una conoscenza ricca di relazioni. Rispetto alla conoscenza dichiarativa di Anderson, fatti conosciuti sono visti in relazione gli uni agli altri: infatti la conoscenza concettuale può essere visualizzata come un grafo formato da nodi e archi (relazioni o link), dove i nodi rappresentano singoli fatti o proposizioni. Lo sviluppo della conoscenza concettuale avviene attraverso la costruzione di nuove relazioni tra nodi esistenti oppure tra un nodo già presente in memoria e un nuovo nodo di conoscenza.



ISBN 9788835123972

Una relazione tra due nodi di conoscenza è di livello primario se la relazione che connette le diverse informazioni è costruita allo stesso livello di astrattezza al quale appartengono le informazioni di partenza. Per esempio, nell'addizione tra numeri decimali, devono essere conosciuti i due fatti seguenti: primo, i valori posizionali prima della virgola sono unità, decine, centinaia e così via; secondo, quando si addizionano o sottraggono numeri decimali si devono allineare rispetto alla posizione della virgola. Se gli studenti mettono in relazione questi due fatti significa che hanno realizzato una comprensione dell'algoritmo dell'addizione in colonna ma il livello di questa relazione si definisce primario perché rimane all'interno dello stesso contesto dei numeri decimali.

Alcune relazioni sono costruite a un livello di astrattezza più elevato. Queste relazioni permettono di legare informazioni che sono in apparenza non collegate. Riprendendo l'esempio precedente della somma tra numeri decimali, possiamo metterlo in relazione alla somma di frazioni decimali. In questo caso si sommano le frazioni con lo stesso denominatore e in questo modo si ottiene la somma operando sui diversi valori posizionali. Questo tipo di relazione è di livello riflessivo perché mette in relazione ambiti matematici differenti, che sono il calcolo decimale e il calcolo frazionario.

### *2.1.2. La conoscenza procedurale*

La conoscenza procedurale fa riferimento a due aspetti: uno che riguarda il linguaggio formale della Matematica e quindi la sintassi, mentre l'altro riguarda gli algoritmi o procedure per la risoluzione dei quesiti. Per quanto riguarda questa seconda parte, è possibile distinguere ulteriormente in procedure che lavorano su simboli, realizzando sostanzialmente manipolazioni simboliche, e procedure che lavorano su oggetti concreti, diagrammi visuali oppure su immagini mentali.

## 2.2. Sul problem solving

Nella letteratura matematica l'attività di risoluzione di problemi è suddivisa in fasi e una o più di tali fasi riguardano proprio la comprensione del problema. Polya in *How to solve it* (1945) e successivamente in *Come risolvere i problemi di matematica. Logica ed euristica nel metodo matematico* (2016) propone le seguenti fasi: comprendere il problema; progettare un piano; implementare il piano; controllo e verifica.



ISBN 9788835123972

Ogni fase individuata da Polya è generata da una o più domande. In relazione alla fase di comprensione del problema, le domande che si pone Polya sono: *Che cosa non si conosce? Quali sono i dati? Quali sono le condizioni? È possibile soddisfare la condizione? La condizione è sufficiente per determinare quello che non si conosce? È ridondante? È contraddittoria? Disegna una figura e introduci notazioni adatte. Separa le varie parti della condizione e prova a scriverle.*

Successivamente Schoenfeld in *Mathematical Problem Solving* (1985) classifica le fasi del problem solving nel seguente modo: analisi, rappresentazione, esplorazione, implementazione e verifica. La fase di analisi, relativa alla comprensione del testo, è descritta nel modo seguente:

1) disegna un diagramma se è possibile;
2) esamina casi speciali:
   a) scegli alcuni valori speciali per fare qualche esempio del problema;
   b) prova a settare ogni parametro intero a 1; 2; 3; : : :, per osservare se il modello è induttivo;
3) prova a semplificare il problema sia attraverso proprietà di simmetria sia attraverso condizioni quali, per esempio, la riduzione;
4) riformula il problema nel modo più conveniente: scegli la prospettiva che userai e riscrivi il problema in una forma matematica più adatta alla sua manipolazione.

Queste due posizioni rispetto alla comprensione di un problema sono riconducibili l'una all'altra in quanto non si preoccupano della mancata comprensione e dei fattori che possono determinare particolari casi di mancanza di comprensione: Polya risulta troppo orientato alla soluzione del problema mentre Schoenfeld, pur riconoscendo nella comprensione del testo un momento preliminare e distinto rispetto alla risoluzione, non è in grado di descrivere ed esplicitare tutti gli aspetti di un testo che possono condurre a una mancata comprensione, quali, per esempio, la conoscenza matematica necessaria per la sua comprensione e il tipo di rappresentazioni mentali prodotte.

## 3. Sulla comprensione del testo di un quesito

Secondo la teoria dei modelli mentali (Johnson-Laird, 1988), descritta in Pancanti (2019), la comprensione di un testo è raggiunta quando il lettore costruisce un unico[2] modello mentale del testo stesso.

[2] Secondo la Teoria dei modelli mentali, ogni processo interpretativo si conclude se si raggiunge un unico modello mentale. Su uno stesso testo però è possibile attivare diversi



ISBN 9788835123972

Mentre in un contesto narrativo il tipo di modello mentale costruito può essere lasciato al lettore, nel caso delle prove standardizzate l'autore, che pone il quesito, si aspetta la costruzione di un certo tipo di modello, in base ai suoi obiettivi valutativi. Questo significa che, a livello di comprensione del testo, l'autore ha in mente un determinato modello mentale, che potremmo chiamare "canonico", frutto di un processo interpretativo del testo da lui considerato corretto. Il lettore potrà seguire un proprio processo interpretativo, ma il modello finale dovrà essere consistente con quello "canonico". In questo caso potremo affermare che la comprensione del testo è stata raggiunta e che il lettore è un lettore modello (Eco, 1979). Al contrario, dire che un lettore non è un lettore modello rispetto a un certo quesito significa constatare che il modello mentale prodotto dal suo processo interpretativo non è consistente con il modello "canonico" dell'autore.

Il nostro obiettivo è mettere in relazione alcune caratteristiche del testo, mediante le quali avviene la classificazione del quesito, e le possibili cause che intervengono nel processo interpretativo del *lettore* e che non gli permettono di diventare un lettore modello (Eco, 1994).

## 4. Difficoltà di comprensione: una proposta di classificazione dei quesiti

Le caratteristiche di un testo alle quali faremo riferimento per la classificazione dei quesiti e per la successiva identificazione di difficoltà di comprensione del testo sono le seguenti: *conoscenza matematica*, distinta in *conoscenza concettuale e conoscenza procedurale*, e *operatività*.

### *4.1. Conoscenza matematica*

Come introdotto nel Quadro di riferimento teorico, per la conoscenza matematica sarà utilizzata la classificazione proposta in Hiebert e Lefevre (1986) di conoscenza concettuale e conoscenza procedurale.

Il quesito sarà classificato rispetto ai due tipi di conoscenza, analizzando le conoscenze relative agli ambiti matematici a cui il testo fa riferimento, analizzando i termini che intervengono nel testo e la domanda del quesito. Inoltre si farà riferimento agli strumenti e alle conoscenze necessarie per la

processi interpretativi che possono portare alla costruzione di modelli mentali finali diversi ma comunque utili alla comprensione del testo stesso.



ISBN 9788835123972

risoluzione del quesito stesso, andando a verificare la misura in cui tali conoscenze siano necessarie per la comprensione del testo.

### 4.1.1. *Conoscenza concettuale*

La procedura per la classificazione di un quesito rispetto alla conoscenza concettuale inizia con l'individuazione dei nodi di conoscenza necessari alla comprensione. Tali conoscenze sono rappresentate, secondo il modello che Hiebert propone per la conoscenza concettuale, come un grafo, dove i nodi costituiscono i fatti, le proposizioni e i concetti, mentre gli archi rappresentano le relazioni che intercorrono tra i nodi. La classificazione della conoscenza concettuale avviene non tanto rispetto ai nodi di conoscenza che intervengono nel testo ma al tipo di relazione tra tali nodi necessaria per la comprensione del quesito. In questa classificazione si distinguono relazioni tra nodi conosciuti oppure relazioni tra uno o più nodi conosciuti e uno o più nodi non conosciuti. Si tratta di definire cosa si intende per nodo conosciuto, che possiamo anche indicare come nodo di conoscenza attivato, e nodi non conosciuti o non attivati. Negli esempi che seguiranno si considerano i nodi conosciuti e non conosciuti in base alle Indicazioni nazionali o alla Linee guida riferite a un ben determinato livello scolastico. Si possono però definire anche "nodi conosciuti e non conosciuti" rispetto alla classe in cui si lavora oppure rispetto al singolo studente (Pancanti, 2015).

Classificare il testo di un quesito rispetto alla conoscenza concettuale significa, una volta individuati i nodi di conoscenza necessari alla comprensione del quesito, andare ad analizzare il tipo di relazione tra tali nodi. Una prima classificazione delle possibili relazioni tra i nodi di conoscenza è la seguente:

a) relazione tra nodi conosciuti: vengono collegati nodi di conoscenza che risultano già attivi rispetto a una delle tre categorie descritte precedentemente. Questo significa che il testo del quesito chiede allo studente di utilizzare nodi di conoscenza già attivati;
b) relazione tra nodi non conosciuti: vengono collegati uno o più nodi conosciuti a un nodo o più nodi non conosciuti cioè si aggiunge al grafo un'informazione, una proprietà ulteriore non evidente rispetto all'ambito a cui si riferisce il testo.

Un secondo tipo di classificazione delle possibili relazioni tra nodi di conoscenza è:

– relazione riflessiva: si mettono in relazione fatti che non sono per loro natura interconnessi e quindi il legame va oltre il contesto dei singoli fatti matematici. Rientrano in questo livello anche quelle relazioni che



ISBN 9788835123972

permettono di evidenziare fatti o proprietà di validità generale all'interno del singolo contesto;
- relazione primaria: una relazione si dice primaria se non riflessiva. In questo senso, una relazione primaria lega fatti appartenenti al medesimo ambito matematico e tale relazione non rappresenta una proprietà generalizzabile a tale ambito.

### *4.1.2. Conoscenza procedurale*

Hiebert distingue la conoscenza procedurale in *linguaggio matematico e sintassi* e *algoritmi*. Sostanzialmente si fa riferimento al tipo di espressioni del linguaggio matematico che intervengono nel testo e a eventuali loro manipolazioni.

Per quanto riguarda poi gli *algoritmi*, questi sono ulteriormente classificati in algoritmi che operano manipolazioni simboliche e algoritmi che operano su oggetti non simbolici, come oggetti concreti, immagini mentali o diagrammi.

Facendo riferimento alla definizione di trattamento che propone Duval (1995) per un sistema semiotico, proponiamo di modificare la classificazione degli *algoritmi* nel seguente modo: trattamenti numerici, se la trasformazione di rappresentazione avviene all'interno del registro numerico, trattamenti simbolici, se il trattamento riguarda un registro simbolico come per esempio il registro del calcolo letterale o il registro algebrico, e infine trattamenti grafici se la trasformazione di rappresentazione avviene all'interno del registro grafico.

## *4.2. Operatività*

La caratteristica di operatività di un testo riguarda la possibilità, per la comprensione del testo, di costruire un modello mentale consistente con quello atteso dall'*autore*, anche quando le conoscenze necessarie alla comprensione non sono tutte già attivate prima della lettura del testo stesso. Questo significa che la comprensione del testo può essere raggiunta attraverso un approccio di tipo operativo che il testo stesso suggerisce.

In un testo operativo, la struttura del testo e i suoi sotto-testi verbali e figurali permettono un'interpretazione di tipo operativo, che potremmo distinguere in "tipo diretto" se il testo indirizza a svolgere procedure operazionali e "tipo indiretto" se le procedure a cui il testo fa riferimento non sono operazionali (per esempio, potrebbe richiedere la rappresentazione di diver-



ISBN 9788835123972

se figure geometriche). In particolare, la costruzione del modello mentale del testo si realizza attraverso la costruzione di sotto modelli, ciascuno con una propria rappresentazione, la quale aiuta e favorisce l'attivazione delle conoscenze necessarie alla comprensione. Quindi è la costruzione dei sotto modelli e l'individuazione delle loro relazioni reciproche che permette la costruzione di un modello mentale unico.

Questa caratteristica del testo si definisce a partire dalla fase di comprensione di un problema di Polya (1945) e, in modo più specifico, dai contributi di Schoenfeld (1985), dove sono descritte le fasi del problem solving. La fase corrispondente alla comprensione del testo in Shoenfeld è l'analisi. Facendo riferimento alla descrizione di tale fase, introdotta nel Quadro di riferimento teorico, nella nostra caratterizzazione di operatività di un testo si propone la modifica dei punti 2 e 3 nel seguente modo:

I esamina casi speciali, scegliendo alcuni valori o situazioni particolari per fare qualche esempio del problema;

I.i se sono presenti uno o più parametri interi, prova a dare a ogni parametro i valori 1; 2; 3; : : :, per osservare se il modello è induttivo;

II prova a semplificare il problema sia attraverso proprietà di simmetria sia attraverso il rilassamento di vincoli.

## 5. Dalle caratteristiche del testo alle difficoltà di comprensione

Facendo riferimento alla teoria dei modelli mentali di Jhonson-Laird descritta in Pancanti (2019), esistono tre tipi fondamentali di rappresentazione mentale: la rappresentazione proposizionale, il modello mentale e le immagini. Il processo di comprensione avviene mediante il passaggio attraverso tre livelli di rappresentazione del testo: il primo è il livello di rappresentazione grafema; il secondo è il livello di rappresentazione proposizionale; infine il terzo livello è proprio la rappresentazione mediante un modello mentale.

Per esplicitare la relazione tra le caratteristiche con cui classifichiamo il testo di un quesito e le possibili cause di difficoltà nel processo interpretativo si propone di:

- considerare le situazioni in cui non si raggiunge il secondo livello di rappresentazione (rappresentazione proposizionale);
- considerare le situazioni in cui non si raggiunge il terzo livello di rappresentazione cioè la costruzione di un unico modello mentale.



ISBN 9788835123972

### *5.1. Difficoltà nella rappresentazione proposizionale (o di secondo livello)*

Per quanto riguarda i testi dei quesiti, se si verificano difficoltà di secondo livello, è possibile che la funzione che fornisce il significato del testo dia un “risultato” sbagliato o non dia nessun risultato e quindi non si realizzi correttamente la rappresentazione proposizionale. Ricordiamo che la rappresentazione proposizionale si ottiene come risultato di un processo attivato utilizzando il significato delle singole parole e le relazioni sintattiche all’interno del testo (Pancanti, 2019).

Se il quesito è classificato come linguaggio matematico e sintassi, la presenza di espressioni numeriche e/o simboliche richiede una propria decodifica sia a livello di simboli che di trattamento. Tutto questo può essere di ostacolo al raggiungimento del secondo livello (rappresentazione proposizionale) perché tali espressioni possono essere non decodificate dal punto di vista del significato dei segni operazionali oppure della struttura sintattica dell’espressione oppure del significato dei simboli che intervengono. Se nel testo del quesito è presente anche un trattamento numerico o simbolico le difficoltà di decodifica possono essere legate alla trasformazione semiotica all’interno del registro numerico o simbolico[3].

### *5.2. Difficoltà nella costruzione del modello mentale (o di terzo livello)*

La costruzione di un nuovo modello mentale è avviata ogni volta che si inserisce un’asserzione che non ha precedenti referenti nel modello (né espliciti né impliciti). Attraverso opportune procedure ricorsive, sarà possibile aggiungere al modello corrente altre entità, proprietà e relazioni quando il riferimento è a entità già presenti nel modello stesso oppure sarà possibile riunificare i diversi modelli mentali prodotti in un unico modello nel momento in cui un’asserzione pone in relazione entità che vi appartengono (Johnson-Laird, 1988).

Se, però, il *lettore* non riconosce le relazioni intercorrenti tra i modelli mentali generati, non sarà possibile la loro riunificazione. Ma anche nel caso in cui le procedure ricorsive permettano la riunificazione dei modelli mentali in un unico modello, l’obiettivo della comprensione può non essere

[3] Nel Quadro di riferimento proposto, le conversioni, facendo riferimento alla semantica del testo, possono causare difficoltà nel processo interpretativo per quanto riguarda la costruzione del modello mentale. Saranno quindi trattate nel paragrafo successivo.



ISBN 9788835123972

raggiunto se l'asserzione che pone in relazione entità appartenenti a modelli mentali diversi non è corretta rispetto al processo interpretativo dell'*autore*. In questo caso il modello mentale prodotto non sarà consistente con quello "canonico" (Pancanti, 2019).

Nella classificazione di un quesito, le caratteristiche del testo che rimandano a possibili difficoltà nella costruzione del modello mentale possono riguardare la conoscenza concettuale, la conoscenza procedurale, per quanto riguarda i trattamenti grafici, e l'operatività.

Quando la classificazione di un quesito rispetto alla conoscenza concettuale è del tipo "relazione tra nodi conosciuti", il *lettore* può non possedere tale relazione e quindi il processo interpretativo produrrà due modelli mentali che non possono essere riunificati. Se il quesito è classificato poi di "livello riflessivo" e il *lettore* possiede la relazione solo a un "livello primario" è possibile che il modello mentale prodotto non sia compatibile con quello "canonico".

Se la classificazione è del tipo "relazione tra nodi non conosciuti", il raggiungimento di un unico modello mentale può essere ostacolato dal fatto che il *lettore* può non distinguere i nodi di conoscenza che devono essere già attivati durante il processo interpretativo, da quelli che il processo risolutivo del quesito ha lo scopo di attivare oppure distingue i nodi conosciuti da quelli non conosciuti ma si ferma perché pensa di dover già disporre del loro reciproco collegamento, quando invece la costruzione della relazione è lo scopo del quesito stesso.

Per quanto riguarda la conoscenza procedurale, nel caso di classificazione del quesito rispetto alla caratteristica "linguaggio matematico e sintassi" è possibile incontrare difficoltà nella costruzione del modello mentale, dovute alla non individuazione dei referenti a cui la scrittura si riferisce nel modello corrente oppure per la presenza nel testo di conversioni tra l'espressione matematica e la parte verbale del testo (Duval, 1995) oppure si possono avere difficoltà nella conversione tra scrittura numerico-simbolica e uno o più sotto-testi figurali.

Nel caso in cui il quesito sia classificato come "trattamento grafico", tale classificazione potrebbe indicare un'eventuale difficoltà interpretativa nelle trasformazioni semiotiche tra sotto-testi figurali diversi all'interno dello stesso quesito.

Se poi il testo è operativo, è possibile che il *lettore*, per completare la costruzione del modello mentale, debba recuperare le referenze del testo attraverso una parte procedurale che può consistere nell'affrontare esempi particolari, modificare il valore di un parametro oppure rilassare certi vincoli, non necessariamente nella direzione della soluzione del quesito. Se il lettore non



ISBN 9788835123972

individua nel testo questa caratteristica è possibile che non riesca a mettere in relazione i fatti riportati nel testo, non raggiungendo quindi un unico modello mentale. Se invece il *lettore* conosce la possibilità di un approccio operativo ma non interpreta correttamente le informazioni ottenute, il modello mentale prodotto non risulterà compatibile con quello "canonico".

## 6. Esempi di classificazione e individuazione delle difficoltà di comprensione

Sono riportati i testi dei quesiti, la parte della Guida alla lettura che li riguarda, i risultati del campione e la classificazione del quesito rispetto agli aspetti più significativi per l'individuazione delle difficoltà di comprensione del testo.

**D32.** Calcola l'espressione $\dfrac{1-\frac{1}{7}}{1+\frac{1}{7}}$ e scrivi il risultato sotto forma di un'unica frazione.

Risposta: ..................................

*Fig. 1 – INVALSI secondaria di II grado 2016/2017*

Questo quesito, per quanto riguarda la conoscenza procedurale, si classifica come "linguaggio e sintassi" per la presenza nel testo dell'espressione che il quesito chiede di calcolare. La difficoltà di comprensione può riguardare l'interpretazione della struttura sintattica dell'espressione poiché presenta tre linee di frazione e due segni di operazione. La difficoltà sta nell'individuare, per le linee di frazione, i rispettivi numeratori e denominatori, considerando anche il fatto che, in riferimento al concetto di frazione, il *lettore* si può attendere un numeratore e un denominatore intero. Di conseguenza si possono avere ulteriori difficoltà nell'individuazione degli operandi corretti delle altre operazioni. Questo tipo di difficoltà possono causare il non raggiungimento della rappresentazione proposizionale del testo o di una rappresentazione proposizionale non compatibile rispetto a quell'attesa nel modello canonico dell'*autore*. Inoltre il quesito si classifica come "algoritmi, trattamento numerico" non per la presenza di un trattamento esplicito da interpretare nel testo ma per il riferimento al tipo di risultato atteso. Il *lettore* per poter mettere in relazione l'espressione numerica del testo con la parte verbale "scrivi il risultato sotto forma di un'unica frazione" deve sapere che



ISBN 9788835123972

è possibile trasformare l'espressione numerica del testo in un'unica frazione, anche senza essere in grado di individuarne esplicitamente il trattamento. In mancanza di questa relazione si possono avere difficoltà nella costruzione di un unico modello mentale.

*Tab. 1 – Guida alla lettura secondaria di II grado 2016/2017*

<table>
<tr><th>Caratteristiche</th><th>Descrizione e commento</th></tr>
<tr><td>
Ambito prevalente<br>Numeri<br><br>
Scopo della domanda<br>Operare con le frazioni<br><br>
Processo prevalente<br>Conoscere e utilizzare algoritmi e procedure<br><br>
Linee guida e Indicazioni nazionali<br>Le operazioni con i numeri interi e razionali.<br>Operare con i numeri interi e razionali e valutare l'ordine di grandezza dei risultati.<br>Calcolo mentale, con carta e penna, mediante strumenti) con i numeri interi, con i numeri razionali sia nella scrittura come frazione che nella rappresentazione decimale<br><br>
Traguardo<br>Si muove con sicurezza nel calcolo numerico e simbolico; applica correttamente le proprietà delle operazioni con i numeri reali; realizza ordinamenti, calcola ordini di grandezza ed effettua stime numeriche e approssimazioni. Risolve equazioni e disequazioni<br><br>
Dimensione<br>Conoscere
</td><td>
Risposta corretta: $\frac{3}{4}$ o qualunque frazione equivalente come per esempio $\frac{6}{8}$<br><br>
La domanda richiede un calcolo relativamente semplice fra numeri razionali rappresentati sotto forma di frazioni<br><br>
Risultati del campione
<table>
<tr><th></th><th>Item</th><th>Mancante</th><th>Errata</th><th>Corretta</th></tr>
<tr><td>G</td><td>D32</td><td>22,9%</td><td>30,5%</td><td>46,6%</td></tr>
<tr><td>L</td><td>D32</td><td>14,0%</td><td>24,4%</td><td>61,6%</td></tr>
<tr><td>T</td><td>D32</td><td>22,2%</td><td>33,7%</td><td>44,1%</td></tr>
<tr><td>P</td><td>D32</td><td>40,3%</td><td>37,3%</td><td>22,4%</td></tr>
</table>
</td></tr>
</table>

Fonte: INVALSI (2017)



ISBN 9788835123972

**D14.** **L'insegnante chiede: "Se $n$ è un numero naturale qualsiasi, cosa si ottiene addizionando i tre numeri $2n+1$, $2n+3$ e $2n+5$ ?"**
**Mario afferma: "Si ottiene sempre il triplo di uno dei tre numeri".**
**Luisa risponde: "Si ottiene sempre un numero dispari".**
**Giovanni dice: "Si ottiene sempre un multiplo di 3".**
**Chi ha ragione?**

- ☐ A. Tutti e tre
- ☐ B. Solo Mario
- ☐ C. Solo Luisa
- ☐ D. Solo Giovanni

*Fig. 2 – INVALSI secondaria di II grado 2010/2011*

Il secondo quesito si classifica, rispetto alla conoscenza concettuale, come "relazione tra nodi non conosciuti" e di "livello riflessivo". I nodi di conoscenza a cui si fa riferimento nel testo sono i numeri naturali dispari e la loro scrittura simbolica, il calcolo letterale e le proprietà di divisibilità dei numeri naturali. Poiché si vanno a studiare proprietà sulla somma di numeri dispari consecutivi che non sono necessariamente evidenti rispetto all'ambito aritmetico in questione, il quesito si classifica come "relazione tra nodi non conosciuti". Il livello del quesito è poi "riflessivo" perché le proprietà di divisibilità sulla somma di tre numeri dispari consecutivi costituiscono proprietà che possono essere estese a tutti i numeri dispari.

Se la classificazione è del tipo "relazione tra nodi non conosciuti", il raggiungimento di un unico modello mentale può essere ostacolato dal fatto che il *lettore* può non distinguere i nodi di conoscenza che devono essere già attivati prima della lettura del testo, da quelli che il processo risolutivo del quesito ha lo scopo di attivare. Quest'ultimi, in questo caso, sono le proprietà di divisibilità della somma di tre numeri dispari consecutivi. Se il quesito è classificato di "livello riflessivo", il *lettore* può possedere la relazione solo a un "livello primario" cioè non riuscire a vedere le proprietà di divisibilità della somma di tre numeri dispari consecutivi come estendibile a ogni valore del parametro n e quindi è possibile che il modello mentale prodotto non sia compatibile con quello "canonico".

Il quesito si classifica, infine, come operativo di tipo diretto perché per la comprensione del testo è possibile procedere provando a dare valori interi successivi a *n*.



ISBN 9788835123972

*Tab. 2 – Guida alla lettura secondaria di I grado 2010/2011*

| *Caratteristiche* | *Descrizione e commento* |
|---|---|
| **Ambito prevalente**<br>Relazioni e funzioni<br><br>**Processo prevalente**<br>Acquistare progressivamente forme tipiche del pensiero matematico (*congetturare, verificare, giustificare, definire, generalizzare,…*)<br><br>**Compito**: Saper interpretare una formula<br><br>**Nuovo obbligo di istruzione**: Utilizzare le tecniche e le procedure del calcolo aritmetico e algebrico<br><br>**Risultati del campione** | **Risposta corretta**: A<br>$2n + 1 + 2n + 3 + 2n + 5 = 6n + 9 = 3(2n + 3)$<br>Ciò che si ottiene, quindi, è il triplo del numero ($2n + 3$). Trattandosi del triplo di un numero dispari sia Giovanni sia Luisa sia Mario hanno ragione |

| *Risultati in Italia* | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | *Opzioni* | | | |
| *Item* | *Mancata risposta* | *A* | *B* | *C* | *D* |
| D14 | 2,1 | 14,6 | 8,4 | 68,0 | 6,9 |

Fonte: INVALSI (2011)

In questo modo si possono osservare i numeri ottenuti, provando a riconoscere delle proprietà comuni a tali risultati. Oppure è possibile prima semplificare il problema limitandoci al caso della somma dei primi due numeri e poi andare ad analizzare cosa significa e cosa provoca, in termini numerici, addizionare anche il terzo addendo. In questo modo diventa evidente come la comprensione di un problema operativo possa essere aiutata da un approccio procedurale, non immediatamente finalizzato alla risoluzione del problema. Se il *lettore* non individua nel testo questa caratteristica è possibile che non riesca a mettere in relazione i fatti riportati nel testo stesso, non raggiungendo quindi un unico modello mentale. Se invece il *lettore* riconosce la possibilità di un approccio operativo ma non interpreta correttamente le informazioni ottenute al variare del valore del parametro, il modello mentale prodotto non risulterà compatibile con quello "canonico".

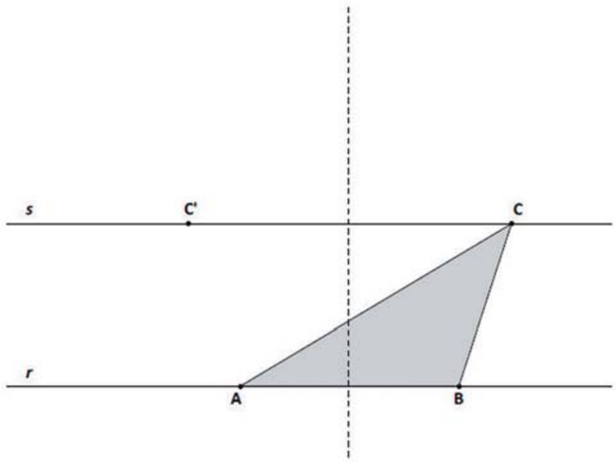
Questo quesito costituisce un esempio di testo operativo di tipo indiretto: infatti è possibile procedere attraverso l'esame di casi particolari, modificando la posizione del punto C′ sulla retta *s*. In questo modo la comprensione del testo può essere facilitata da una fase procedurale dove i diversi tipi di triangoli ABC′ sono confrontati con il triangolo ABC e dove le proprietà rispetto alla misura della base e dell'altezza vengono analizzate. Si osserva che la conoscenza delle proprietà della misura della base e dell'altezza



ISBN 9788835123972

dei triangoli ABC′ rispetto ad ABC possono non essere attivate prima della lettura del testo, ma possono essere prodotte proprio dalla fase procedurale prima descritta.

**D3.** **ABC è uno degli infiniti triangoli aventi la base AB sulla retta *r* e il terzo vertice in un punto qualunque della retta *s* parallela a *r* e passante per C.**




**Fra gli infiniti triangoli descritti sopra, quali hanno la stessa area di ABC?**

A. ☐ Soltanto il triangolo ABC', simmetrico di ABC rispetto all'asse di AB

B. ☐ Soltanto il triangolo isoscele di base AB

C. ☐ Soltanto il triangolo rettangolo in A e il triangolo rettangolo in B

D. ☐ Tutti gli infiniti triangoli di base AB

*Fig. 3 – INVALSI secondaria di II grado 2011/2012*

Se il *lettore*, trovandosi davanti a un testo operativo, non mette in atto procedure efficaci che permettano di attivare i nuovi nodi di conoscenza, attraverso i quali per esempio è possibile mettere in relazione le aree dei triangoli ABC′ con l'area del triangolo iniziale ABC, può non essere in grado di costruire un unico modello mentale del testo oppure può costruire un unico modello mentale che non risulterà consistente con quello "canonico" atteso dall'*autore*.



ISBN 9788835123972

*Tab. 3 – Guida alla lettura secondaria di II grado 2011/2012*

| *Caratteristiche* | *Descrizione e commento* |
|---|---|
| | **Risposta corretta**: D<br>Lo studente qui dovrebbe “vedere” che, al variare della posizione di C sulla retta s, parallela alla retta *r* su cui giace la base AB dei triangoli, l’altezza dei triangoli considerati non varia, così come non varia la base<br>Le opzioni A, B, C dovrebbero funzionare da distrattori per gli studenti che non hanno ancora consolidato discrete abilità di esplorazione dinamica mentale, assai importanti in Matematica. Probabilmente lo sviluppo e il consolidamento di tale abilità potrebbe essere favorita dall’abitudine all’uso di software di Geometria dinamica come strumenti di esplorazione e osservazione di proprietà e “fatti” geometrici<br>**Risultati del campione** |

| *A* | *B* | *C* | *D* | *Non risponde* |
|---|---|---|---|---|
| 53,3 | 7,8 | 7,2 | 28,1 | 3,4 |

Fonte: INVALSI (2012)

## 7. Attività di intervento su testi operativi

Sono presentate due tipi di attività di intervento sugli ultimi due quesiti analizzati per il primo biennio della secondaria di secondo grado. Queste attività costituiscono, rispettivamente, un esempio di intervento nel caso di testo operativo diretto e di testo operativo indiretto.

Per il testo operativo di tipo diretto viene proposta un’attività che permette di esplicitare l’approccio procedurale suggerito dal testo attraverso l’utilizzo del foglio elettronico. Ciascuna proprietà numerica descritta dalle affermazioni di Luisa, Mario e Giovanni viene esplicitata attraverso la costruzione di tabelle che permettono l’esplorazione numerica di tali proprietà attraverso l’utilizzo delle funzioni del foglio di calcolo.

Per il testo operativo indiretto, invece, viene proposta un’attività che utilizza un software di Geometria dinamica per l’esplorazione dei sotto modelli, utilizzando il “trascinamento” per lo studio dinamico della costruzione.

Nei paragrafi successivi sono riportate le schede di attività consegnate ai ragazzi.



ISBN 9788835123972

### *7.1. Attività di intervento sul testo operativo di tipo diretto*

Leggi il seguente quesito:

**D14.** **L'insegnante chiede: "Se *n* è un numero naturale qualsiasi, cosa si ottiene addizionando i tre numeri 2*n*+1, 2*n*+3 e 2*n*+5 ?"**
**Mario afferma: "Si ottiene sempre il triplo di uno dei tre numeri".**
**Luisa risponde: "Si ottiene sempre un numero dispari".**
**Giovanni dice: "Si ottiene sempre un multiplo di 3".**
**Chi ha ragione?**

☐ A. Tutti e tre

☐ B. Solo Mario

☐ C. Solo Luisa

☐ D. Solo Giovanni

Ci sono termini che non conosci o parti del testo che non ti sono chiare? Se sì, quali?

Puoi decidere di rispondere al quesito subito e svolgere l'attività seguente per verificare la tua risposta oppure puoi prima svolgere l'attività seguente e poi rispondere successivamente. La risposta al quesito deve essere comunque motivata. Per ciascuna affermazione costruisci la relativa tabella e poi, facendo riferimento ai risultati ottenuti, per ciascuna tabella rispondi alle seguenti domande:

Prova a modificare il valore iniziale di *n* e a ricalcolare più volte la tabella.

Quali valori ottieni, nelle diverse prove, nell'ultima colonna della tabella? Questi risultati forniscono informazioni sul quesito? Se sì, quali? Spiega.

Affermazione di Luisa: "Si ottiene sempre un numero dispari".

| N<br>(da 1 a 50) | 2n+1 | 2n+3 | 2n+5 | Somma<br>(2n+1) +<br>(2n+3) +<br>(2n+5) | RESTO(Somma;2) |
|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | |

Affermazione di Giovanni: "Si ottiene sempre un multiplo di tre".

| N<br>(da 1 a 50) | 2n+1 | 2n+3 | 2n+5 | Somma<br>(2n+1) +<br>(2n+3) +<br>(2n+5) | RESTO(Somma;3) |
|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | |



ISBN 9788835123972

Affermazione di Mario: “Si ottiene sempre il triplo di uno dei tre numeri”.

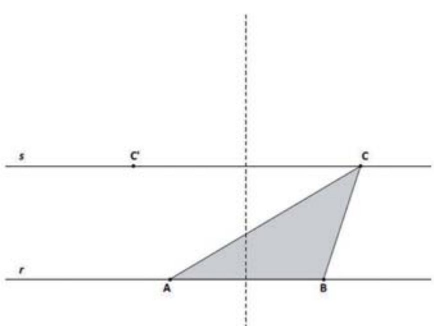
| N (da 1 a 50) | 2n+1 | 2n+3 | 2n+5 | Somma (2n+1) + (2n+3) + (2n+5) | Triplo 2n+1 | Triplo 2n+3 | Triplo 2n+5 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | | |

Adesso prova a rispondere, motivando la tua risposta, alla domanda del quesito oppure controlla la tua risposta con le informazioni ottenute dalle tabelle del foglio di calcolo.

## *7.2. Attività di intervento su un testo operativo di tipo indiretto*

Leggi il seguente quesito:

**D3. ABC è uno degli infiniti triangoli aventi la base AB sulla retta *r* e il terzo vertice in un punto qualunque della retta *s* parallela a *r* e passante per C.**




**Fra gli infiniti triangoli descritti sopra, quali hanno la stessa area di ABC?**

A. ☐ Soltanto il triangolo ABC’, simmetrico di ABC rispetto all’asse di AB

B. ☐ Soltanto il triangolo isoscele di base AB

C. ☐ Soltanto il triangolo rettangolo in A e il triangolo rettangolo in B

D. ☐ Tutti gli infiniti triangoli di base AB

Ci sono termini che non conosci o parti del testo che non ti sono chiare? Se sì, riportatele qui sotto.

Puoi decidere di rispondere al quesito subito e svolgere l’attività seguente successivamente oppure puoi prima svolgere l’attività seguente e poi rispondere. La risposta al quesito, prima o dopo, deve essere comunque motivata.



ISBN 9788835123972

**Procedimento**

Passo 1. Costruisci il segmento AB, la retta *r*, il punto C, la retta *s*[4] e il triangolo ABC. Calcola quindi l'area di questo triangolo utilizzando il tasto "Area" di Geogebra.

Passo 2. Costruisci il triangolo simmetrico ABC′ del triangolo ABC rispetto all'asse del segmento AB e calcola area del triangolo ABC'. Cosa osservi rispetto alle aree dei due triangoli ABC e ABC′? Come lo spiegheresti?

Passo 3. Costruisci il triangolo isoscele ABE, con il terzo vertice E nel punto di intersezione tra l'asse del segmento AB e la retta *s*. Calcola l'area del triangolo ABE. Cosa osservi rispetto alle aree dei due triangoli ABC e ABE? Come lo spiegheresti?

Passo 4. Costruisci le rette perpendicolari in A, *c*, e in B, *d*, alla retta *r*. Costruisci poi il punto di intersezione F tra la retta *c* e la retta *s* e il triangolo ABF, calcolandone l'area. Costruisci il punto di intersezione G tra la retta *d* e la retta *s* e il triangolo ABG e calcolane l'area. Cosa osservi rispetto alle aree dei tre triangoli ABF, ABG e ABC? Come lo spiegheresti?

Passo 5. Sia H un punto appartenente alla retta *s*. Costruisci il triangolo ABH e calcolane l'area. Cosa osservi rispetto alle aree del triangolo ABC e ABH? Come lo spiegheresti? Prova a muovere il punto H sulla retta *s* e osserva il valore che assume l'area dei triangoli che si formano. Cosa osservi? Come lo spiegheresti?

Passo 6. Prova a costruire l'altezza del triangolo ABC relativa al lato AB e l'altezza del triangolo ABH relativa al lato AB. Misura tali altezze. Cosa osservi? Come lo spiegheresti? Quali informazione ti dà questa osservazione rispetto al quesito? Muovi adesso il punto H sulla retta *s*. Come varia l'altezza relativa al lato AB dei triangoli che si formano. Come spiegheresti questo fatto? Quali informazioni sulla soluzione del quesito puoi ottenere da questa osservazione?

Adesso prova a rispondere, motivando la tua risposta, alla domanda del quesito oppure controlla la risposta che avevi già riportato nella pagina iniziale con le informazioni ottenute dall'attività con Geogebra.

[4] Facendo riferimento a Pancanti (2015), si rileva un errore nel testo del quesito perché è utilizzato lo stesso simbolo *C* per individuare sia il terzo vertice del triangolo di riferimento rappresentato nella figura sia il terzo vertice del triangolo ottenuto come punto in movimento sulla retta *s*. Nel procedimento di costruzione proposto il vertice in movimento sulla retta *s* viene indicato con il simbolo *E*.



ISBN 9788835123972

## 8. Conclusioni

In questo capitolo è stato descritto un Quadro di riferimento teorico per l'analisi e l'interpretazione delle difficoltà di comprensione del testo dei quesiti INVALSI di Matematica per la secondaria di primo e di secondo grado. Dagli esempi proposti si può rilevare come tali difficoltà possano avere un ruolo nell'individuazione delle cause di insuccessi che non erano state rilevate nelle Guide alla lettura delle diverse prove.

Facendo riferimento al Quadro di riferimento delle prove INVALSI di Matematica (INVALSI, 2018) le categorie rispetto alle quali ogni quesito viene classificato sono: formato, ambito, scopo della domanda, dimensione, traguardi per lo sviluppo delle competenze, obiettivi di apprendimento delle Indicazioni nazionali e delle Linee guida. In queste categorie per la secondaria di primo e di secondo grado non viene preso in esame l'aspetto del testo. Il Quadro di riferimento teorico proposto potrebbe suggerire un ampliamento delle categorie in modo da poter rilevare eventuali difficoltà a livello di comprensione del testo. Inoltre sono state descritte delle proposte di interventi didattici su quesiti di tipo operativo con l'obiettivo di favorirne la comprensione del testo.

## Riferimenti bibliografici


Anderson J.R. (1983), *The architecture of cognition*, Harvard University Press, Cambridge.

Colombo A. (2002), *Leggere, capire e non capire*, Zanichelli, Bologna.

Duval R. (1995), *Semíosis et pensée humaine*, Peter Lang, Berna.

Duval R. (1999), "L'apprendimento in matematica richiede un funzionamento cognitivo specifico?", *La matematica e la sua didattica*, 1, pp. 17-42.

Duval R. (2006), "A Cognitive Analysis of Problems of Comprehension in a Learning of Mathematics", *Educational Studing in Mathematics*, 61, pp. 103-131.

Eco U. (1979), *Lector in fabula*, Bompiani, Milano (Studi Bompiani n. 22).

Eco U. (1994), *Sei passeggiate nei boschi narrativi*, Bompiani, Milano.

INVALSI (2011), *INVALSI – Servizio Nazionale di Valutazione a.s. 2010/11 Guida alla lettura, Prova di Matematica Classe seconda – Scuola secondaria di secondo grado*, testo disponibile al sito: http://www.invalsi.it/snvpn2013/documenti/strumenti/2011_II_Sec_Secondo_grado_GUIDA_MATEMATICA.pdf, data di consultazione 28/1/2021.

INVALSI (2012), *INVALSI – Servizio Nazionale di Valutazione a.s. 2011/12, Guida alla lettura, Prova di Matematica Classe seconda – Scuola secondaria di secondo grado*, testo disponibile al sito: http://www.invalsi.it/snvpn2013/documenti/




ISBN 9788835123972

strumenti/2012_II_Sec_Secondo_grado_GUIDA_MATEMATICA.pdf, data di consultazione 28/1/2021.
INVALSI (2017), *INVALSI – Servizio Nazionale di Valutazione a.s. 2016/2017 Guida alla lettura, Prova di Matematica Classe seconda – Scuola secondaria di II grado*, testo disponibile al sito: https://invalsi-areaprove.cineca.it/docs/file/2017-GUIDA-L10.pdf, data di consultazione 28/1/2021.
INVALSI (2018), *Quadro di riferimento delle prove INVALSI di Matematica*, testo disponibile al sito: https://invalsi-areaprove.cineca.it/docs/file/QdR_MATEMATICA.pdf, data di consultazione 28/1/2021.
Johnson-Laird P.N. (1983), *Mental Models. Towards a Cognitive Science of Language, Inference and Consciousness*, Cambridge University Press, Cambridge; trad. it. di Alberto Mazzocco, *Modelli mentali*, il Mulino, Bologna, 1988.
Hiebert J., Lefevre P. (1986), "Conceptual and procedural knowledge in mathematics: An introductory analysis", in J. Hiebert (*ed.*), *Conceptual and procedural knowledge: The case of mathematics*, Lawrence Erlbaum Associates, Hillsdale.
Polya G. (1945), *How to solve it*, Princeton University Press, Princeton.
Polya G. (2016), *Come risolvere i problemi di matematica. Logica ed euristica nel metodo matematico*, a cura del Comitato Scientifico UMI-CIIM, De Agostini Scuola, Novara.
Pancanti S. (2015), *I test PISA e i test di ingresso di matematica con l'E-Learning: da momento di verifica a occasione didattica*, tesi di Dottorato, Firenze.
Pancanti S. (2019), *Uno sguardo sulla scuola. II Seminario "I dati INVALSI: uno strumento per la ricerca"*, a cura di P. Falzetti, piattaforma OJS di FrancoAngeli collana Open Access INVALSI PER LA RICERCA, testo disponibile al sito: https://ojs.francoangeli.it/_omp/index.php/oa/catalog/book/433, data di consultazione 28/1/2021.



ISBN 9788835123972

# 5. *La visione progressiva della Matematica*

di Michela Freddano, Ivan Graziani, Stefano Babini*

La Matematica, insieme alla Scienza, alla Tecnologia e all'Ingegneria, da diverso tempo viene ritenuta una delle discipline che concorre in modo rilevante alla crescita economica dei Paesi e allo sviluppo delle professionalità del futuro. In diversi Paesi è stata avvertita la necessità di investire molto sulla formazione nelle discipline STEM (*Science, Technology, Engineering, and Math*), attraverso la costruzione di specifici programmi di insegnamento-apprendimento, e al contempo di interrogarsi su quali aspetti possano più o meno concorrere alla scelta di questo settore come percorso professionale.

A partire da queste considerazioni, il presente contributo si interroga su quale sia l'atteggiamento che gli studenti di diverso ordine e grado hanno nei confronti della Matematica.

Se da una parte è presente una spinta alla promozione delle discipline STEM e quindi anche della Matematica, dall'altra parte è ormai noto come nel nostro Paese la Matematica non sia l'insegnamento più amato e come, per contro, spesso sia alla base dell'insuccesso scolastico, tra debiti e non ammissioni alle classi successive (dati MIUR).

In particolare, negli ultimi anni, si è potuto osservare come la Matematica sia diventata anche motivo di "scelte per esclusione" proprio quando gli studenti devono valutare come proseguire gli studi dopo il primo ciclo (Baccaglini-Frank e Zan, 2018).

A partire da queste premesse, è stato condotto uno studio con le finalità di:

– conoscere quale sia la visione che gli studenti hanno della Matematica e come questa possa condizionare il loro impegno a scuola e il successo formativo;

* Sebbene il contributo sia frutto di un lavoro comune, i parr. 1 e 3 sono da attribuirsi a tutti gli autori, i parr. 2, 4.2 e 7 a Ivan Graziani e Stefano Babini, i parr. 4.1, 4.3, 5 e 6 a Michela Freddano.



ISBN 9788835123972

– approfondire se e come tale visione della Matematica subisca un processo di evoluzione (o di involuzione...) nel corso degli studi e provare a ipotizzarne alcune cause;
– studiare, infine, tale visione in un'ottica di genere.

A tal proposito è stato realizzato un questionario rivolto a un campione non probabilistico di 1.726 studenti di diverso ordine e grado delle scuole delle province di Bologna, Forlì-Cesena e Parma, così articolati: 277 della scuola primaria, 612 della scuola secondaria di I grado e 837 della scuola secondaria di II grado (licei, tecnici e professionali).

Il questionario è stato somministrato nell'a.s. 2018/2019 agli studenti, per alcune classi nei giorni successivi alle prove INVALSI, in altri casi congiuntamente ad alcuni item selezionati tramite sulla piattaforma GESTINV, per un'altra ricerca. La compilazione è stata svolta in presenza in modalità uno-molti da parte dei docenti delle classi coinvolte. Il questionario è strutturato in 3 domande a risposta univoca, 2 a risposta multipla e una a risposta aperta.

Dalle analisi preliminari dei dati emergono differenze nel modo in cui gli studenti vedono la Matematica, in particolare il gradimento della Matematica è maggiore negli studenti della scuola primaria mentre all'aumentare dell'età scolare delle coorti, diminuisce; per contro atteggiamenti come l'ansia o la rassegnazione sembrano essere più diffusi all'aumentare dell'età degli studenti.

I risultati emersi da questo studio sono utili per orientare le scuole nella realizzazione di curricula di Matematica che tengano conto della visione progressiva che gli studenti hanno di questa disciplina, al fine di proporre una didattica della Matematica sempre più consapevole e rispondente ai bisogni degli studenti.

*Mathematics has long been considered one of the disciplines that contributes significantly to the economic growth of countries and the development of future skills. In several countries the need to invest heavily in training in the STEM disciplines (Science, Technology, Engineering, and Math) has been felt. Starting from these considerations, this paper wonders about the attitude that students of different order and degree have towards mathematics.*

*If on the one hand there is a drive to promote the STEM disciplines and mathematics, on the other hand it is now known that in our country mathematics is not the most popular teaching and often is the basis of school failure, between debt and non-admission to subsequent classes (MIUR data).*

*In particular, in recent years, it has been observed that mathematics has also become a reason for "choices by exclusion" just when students have to consider how to continue their studies after the first cycle (Baccaglini-Frank and Zan, 2018).*



ISBN 9788835123972

*Starting from these premises, a study was conducted with the aims of:*

- *to know what the students' vision of mathematics is and how it can influence their commitment to school and their success at school;*
- *to deepen if and how such a vision of mathematics undergoes a process of evolution (or involution...) during the course of the studies and to try to hypothesize some causes;*
- *finally, to study this vision from a gender perspective.*

*To this end, a questionnaire was drawn up for a non-probabilistic sample of 1,726 students of different levels and levels from schools in the provinces of Bologna, Forlì-Cesena and Parma, broken down as follows: 277 from primary school, 612 from secondary school in the first level and 837 from secondary school in the second level (high schools, technical and professional schools).*

*The questionnaire was administered in the academic year 2018/2019 to the students, for some classes in the days following the tests, in other cases together with some items selected through the GESTINV platform, for another research. The compilation was carried out in the presence of a one-many of the teachers of the classes involved. The questionnaire is structured in 3 univocal questions, 2 multiple-choice questions and 1 open-ended question.*

*Preliminary analyses of the data show differences in the way students see mathematics, in particular the linking of mathematics is greater in primary school students while as decreases the school age of cohorts increases; on the other hand, attitudes such as anxiety or resignation seem to be more widespread as the age of students increases.*

*The results of this study are useful to guide schools in the creation of mathematics curricula that take into account the progressive vision that students have of this discipline, in order to propose a teaching of mathematics increasingly aware and responsive to the needs of students.*

## 1. Introduzione

La Matematica, insieme alla Scienza, alla Tecnologia e all'Ingegneria, da diverso tempo viene ritenuta una delle discipline che concorre in modo rilevante alla crescita economica dei Paesi e allo sviluppo delle professionalità del futuro. In diversi Paesi è stata avvertita la necessità di investire molto sulla formazione nelle discipline STEM (*Science, Technology, Engineering, and Math*), attraverso la costruzione di specifici programmi di insegnamento-apprendimento, e al contempo di interrogarsi su quali aspetti possano più o meno concorrere alla scelta di questo settore come percorso professionale.



ISBN 9788835123972

A partire da queste considerazioni, il presente contributo si interroga su quale sia l'atteggiamento che gli studenti di diverso ordine e grado hanno nei confronti della Matematica.

A tal proposito, è stato condotto uno studio con le finalità di conoscere quale sia la visione che "progressivamente" gli studenti hanno della Matematica. È stato dunque realizzato un questionario proposto nell'a.s. 2018/2019 a un campione di convenienza di 1.726 studenti di 74 classi e 14 istituti scolastici di diverso ordine e grado dell'Emilia-Romagna.

I paragrafi successivi illustrano le finalità della ricerca, la composizione del campione di convenienza, il metodo utilizzato, le variabili analizzate, e i principali risultati emersi.

## 2. I riferimenti teorici

Gli studi che, da diverso tempo stiamo conducendo come gruppo di ricerca in didattica della Matematica, si concentrano sulle problematiche legate al processo di insegnamento-apprendimento della Matematica con approfondimenti in modalità verticale, che tengono conto del primo e del secondo ciclo d'istruzione. In questi lavori sono stati affrontati alcuni argomenti particolarmente ostici per gli studenti tramite l'analisi di risposte degli studenti a diversi tipi di item proposti nelle Rilevazioni nazionali INVALSI, selezionati per i diversi ambiti della Matematica.

Diversi studi (Graziani e Babini, 2016, 2018; Babini e Graziani, 2019; Graziani, 2019) hanno portato alla conclusione che gli studenti commettono errori dovuti soprattutto a eccessivi calcoli (per es. derivanti dal contratto didattico più o meno esplicito dei docenti) e/o a letture parziali o troppo frettolose che causano un'errata comprensione del testo.

In particolare, negli ultimi anni, si è potuto osservare come la Matematica sia diventata anche motivo di "scelte per esclusione", proprio quando gli studenti devono valutare come proseguire gli studi dopo il primo ciclo di istruzione (Baccaglini-Frank e Zan, 2017).

Molte ricerche hanno affrontato il tema delle differenze di genere nell'atteggiamento nei confronti della Matematica (Cascella, 2011, 2017; Giberti, 2019). Le analisi del *Program for International Student Assessment* (PISA) dell'OCSE sostengono che gli studenti siano maggiormente portati per la Matematica, mentre le studentesse siano più inclini allo studio delle materie umanistiche (INVALSI, 2006; Sikora e Pokropek, 2011; OCSE, 2012; Freddano e Tortora, 2016).



ISBN 9788835123972

Negli ultimi anni, anche la psicologia ha sviluppato un ampio settore di ricerca legato alle difficoltà di apprendimento della Matematica da parte delle ragazze legando i minori risultati a fattori di tipo affettivo e psicologico come l'ansia e la sicurezza in se stesse (Lindberg *et al.*, 2010; Primi *et al.*, 2014).

Sul piano nazionale, sono state promosse dal MIUR due grosse campagne sulle lauree scientifiche (DM 976/2014, art. 3 comma 4 e 5 e art. 4) e sulle STEM, avviate nell'a.s. 2015/2016 (Nota MIUR 1723 del 2/3/2016).

Oltre alle differenze di genere, un altro aspetto che emerge è un progressivo cambiamento di atteggiamento nei confronti della Matematica al crescere dell'età e del grado scolastico. In particolare, uno studio di Caponi *et al.* (2012) dimostra come al crescere dell'età e del grado scolastico, la gioia nei confronti della Matematica diminuisca, mentre l'ansia cresca, con un cambiamento significativo nel passaggio dalla scuola primaria alla scuola secondaria di primo grado.

## 3. Le finalità

A partire dalle premesse di cui sopra, l'intento principale del presente lavoro è conoscere la visione che gli studenti e le studentesse di diverse fasce di età hanno della Matematica e se e in che modo questa si modifichi nel corso degli anni scolastici.

Nello specifico, le finalità sono:

– conoscere quale sia la visione che gli studenti hanno della Matematica;
– approfondire se e come tale visione della Matematica evolva nel corso degli studi e provare a ipotizzarne alcune cause;
– studiare tale visione in un'ottica di genere.

## 4. Lo studio

Nell'a.s. 2018/2019, è stato avviato uno studio che ha coinvolto studenti e studentesse di diverso ordine, grado e indirizzo scolastico di alcune istituzioni presenti nella regione Emilia-Romagna. Seppur tale ricerca non sia di tipo longitudinale, come vedremo, ha reso comunque possibile conoscere mediante confronto se e come cambiano le opinioni e gli atteggiamenti tra studenti nel corso del tempo, al fine di cogliere come progredisce (o regredisce) la visione della Matematica nei giovani.



ISBN 9788835123972

## 4.1. Gli studenti coinvolti

Nello studio sono stati coinvolti 1.726 studenti, di cui il 44% di genere femminile. Di questi studenti, il 16% è di scuola primaria, il 35,5% della scuola secondaria di I grado, il 48,5% della scuola di secondaria di II grado. In tutto sono state coinvolte 74 classi di 14 istituzioni scolastiche dell'Emilia-Romagna:

– 9 scuole della provincia di Forlì-Cesena (2 istituti comprensivi, 2 scuole secondarie di I grado e 5 scuole secondaria di II grado, quali 2 istituti professionali, 2 istituti tecnici e un liceo scientifico);
– 4 scuole della provincia di Bologna (un istituto comprensivo e 3 scuole secondarie di II grado, quali un istituto professionale e 2 istituti tecnici);
– un liceo scientifico della provincia di Parma.

*Tab. 1 – Distribuzione degli studenti partecipanti all'indagine per grado scolastico e per genere e provincia*

| *Grado scolastico* | *Genere* | | *Provincia* | | | *Totale* |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | *Uomini* | *Donne* | *Bologna* | *Forlì-Cesena* | *Parma* | |
| 3 | 7,2% | 8,8% | 9,2% | 8,0% | – | 7,9% |
| 5 | 7,3% | 9,1% | 9,0% | 8,3% | – | 8,1% |
| 6 | 10,0% | 12,0% | 9,0% | 12,6% | – | 10,9% |
| 7 | 9,6% | 12,0% | 9,0% | 12,2% | – | 10,7% |
| 8 | 12,6% | 15,5% | 9,0% | 17,2% | – | 13,9% |
| 10 | 28,3% | 21,3% | 28,6% | 21,6% | 51,8% | 25,2% |
| 12 | 24,8% | 21,3% | 26,3% | 20,0% | 48,2% | 23,3% |
| Totale (v.a.) | 966 | 760 | 526 | 1.125 | 75 | 1.726 |

## 4.2. Il questionario rivolto agli studenti

Nel periodo febbraio-maggio dell'a.s. 2018/2019, nei giorni successivi alle Rilevazioni nazionali INVALSI o congiuntamente allo svolgimento di altre prove strutturate di Matematica[1], è stato proposto agli studenti un questionario.

La compilazione è stata svolta in presenza in modalità uno-molti da parte dei docenti delle classi coinvolte.

[1] Ci si riferisce alla richiesta agli studenti di svolgere alcune prove di Matematica scelte tra quelle presenti nell'archivio interattivo delle prove INVALSI denominato GESTINV 2.0 (cfr. https://www.gestinv.it/).



ISBN 9788835123972

Il questionario è composto da sei domande. La prima domanda chiede agli studenti che cosa sia per loro la Matematica, dando la possibilità di scegliere fino a un massimo di tre opzioni; la seconda domanda chiede il livello di gradimento. La terza domanda chiede loro quale sia l'aspetto più importante perché uno studente sia "bravo" in Matematica, mentre la quarta domanda chiede loro quali sono i motivi per cui riscontrano delle difficoltà in Matematica. La quinta domanda si concentra sul momento valutativo e chiede agli studenti in modo vivono il momento precedente alla consegna dei risultati di una verifica. La sesta e ultima domanda è legata alla precedente e chiede loro che cosa vorrebbero fare se hanno commesso degli errori.

### *4.3. Il metodo*

Nel presente studio, al fine di rispondere alle domande di ricerca, sono state analizzate le risposte alle prime tre domande del questionario, confrontando le risposte rispetto al genere, al grado scolastico (primaria, secondaria di I grado e secondaria di II grado) e, per la scuola secondaria di II grado, rispetto all'indirizzo (liceo, istituto tecnico e istituto professionale).

Al fine di stimare la significatività di tali differenze è stato utilizzato l'indice V di Cramer.

L'indice V di Cramer fornisce indicazioni sul livello di associazione non strutturata tra caratteri qualitativi nominali. Si tratta di un indice simmetrico di associazione, ottenuto come radice quadrata della contingenza quadratica media divisa per il suo valore massimo, dato dal minimo tra $r-1$ e $c-1$, dove $r$ e $c$ sono il numero di modalità distinte del primo e, rispettivamente, del secondo carattere, quando vi è massima connessione tra essi. Tale indice permette di stimare il grado di dipendenza. Tale indice può variare tra zero e uno, e sarà pari a zero nel caso di indipendenza, mentre assumerà valore 1 nel caso di massima dipendenza (ovvero almeno uno dei due caratteri dipende perfettamente dall'altro), nello specifico:

- da 0 a 0,2: bassa connessione;
- da 0,2 a 0,4: discreta connessione;
- da 0,4 a 0,6: buona connessione;
- da 0,6 a 1: alta connessione.



ISBN 9788835123972

## 5. La visione progressiva della Matematica

### *5.1. Che cosa è la Matematica*

Nel rispondere alla prima domanda del questionario "Per te la Matematica è soprattutto…", circa la metà degli studenti attribuisce alla Matematica un carattere esecutivo, con il 48,0% di loro che afferma che la Matematica sia soprattutto *fare calcoli*, mentre soltanto il 21,0% degli studenti le attribuisce l'attributo di *risolvere i problemi*.

Il 41,5% degli studenti ne riconosce l'*indispensabilità per il progresso dell'uomo*, tuttavia ben il 38,0% ritiene che per la Matematica si debba *essere portati* e il 18,2% una materia dove bisogna *essere intelligenti*. Uno studente su quattro ritiene che la Matematica sia soprattutto *ansia per l'errore* ed *essere precisi*. Per contro, soltanto il 9,6% degli studenti afferma che la Matematica sia soprattutto *gioia* e l'11,6% *noia*.

Le differenze di genere, seppur con bassa interdipendenza, emergono per tre attributi:

– l'associare la Matematica con l'*ansia per l'errore*, prevalente negli studenti (31,8%) rispetto alle studentesse (21,2%) (V di Cramer 0,118);
– la convinzione che per la Matematica sia necessario *essere intelligenti*, maggiore negli studenti (21,8%) che nelle studentesse (13,6%) (V di Cramer 0,107);
– l'idea che si debba *essere precisi*, maggiore nelle studentesse (30,7%) che negli studenti (21,8%) (V di Cramer 0,100).

L'analisi riportata in tab. 2 evidenzia le differenze per grado di scuola. In tutti i gradi di scuola, *fare calcoli* è l'attributo con la maggiore incidenza e, infatti, non mostra differenze significative.

L'analisi dei dati mostra, invece, un'interdipendenza discreta con il grado scolastico per quattro aspetti:

– *risolvere i problemi* prevalentemente per gli studenti della scuola primaria (37,5%), seguiti da quelli della scuola secondaria di II grado (23,4%), e l'11,9% della scuola secondaria di I grado;
– la *gioia*, prevalente anche questa nella scuola primaria (22,0%), con una decrescita progressiva nella scuola di I grado (9,8%) e di II grado (5,4%);
– una *materia per cui bisogna essere portati*, prevalentemente negli studenti di scuola secondaria di II grado (46,2%), rispetto a quelli di I grado (36,8%) e di scuola primaria (15,9%);
– una *materia dove bisogna essere intelligenti*, prevalentemente negli studenti di scuola secondaria di I grado (29,6%), rispetto a quelli di scuola primaria (16,6%) e di scuola secondaria di II grado (10,4%).



ISBN 9788835123972

*Tab. 2 – Percentuale di studenti per risposta alla domanda "Per te la Matematica è soprattutto" per grado di scuola e indice di interdipendenza*

| *Per te la Matematica è soprattutto:* | *Grado di scuola* | | | |
|---|---|---|---|---|
| | *Primaria* | *Secondaria di I grado* | *Secondaria di II grado* | *(V di Cramer)* |
| 1.a Risolvere problemi | 37,5% | 11,9% | 23,4% | (0,211) |
| 1.b Fare calcoli | 60,6% | 49,2% | 43,0% | (0,124) |
| 1.c Gioia | 22,0% | 9,8% | 5,4% | (0,196) |
| 1.d Ansia per l'errore | 18,4% | 28,1% | 29,3% | (0,086) |
| 1.e Noia | 4,3% | 16,7% | 10,4% | (0,133) |
| 1.f Una materia per cui bisogna essere portati | 15,9% | 36,8% | 46,2% | (0,218) |
| 1.g Una materia dove bisogna essere intelligenti | 16,6% | 29,6% | 10,4% | (0,226) |
| 1.h Una materia indispensabile per il progresso dell'uomo | 43,3% | 47,9% | 36,2% | (0,108) |
| 1.i Essere precisi | 38,6% | 18,8% | 26,5% | (0,152) |

L'approfondimento sugli 837 studenti di scuola secondaria di II grado evidenzia che per indirizzo di scuola vi sono interdipendenze discrete per 5 attributi, interdipendenze deboli ma pur presenti per altri 3, mentre per l'*essere precisi* non emerge alcuna interdipendenza.

Come mostra la tab. 3, la Matematica è soprattutto una *materia indispensabile per il progresso dell'uomo* per gli studenti dei licei scientifici (61,2%) rispetto agli studenti degli istituti tecnici (37,0%) e ancor meno per quelli degli istituti professionali (20,4%). Per contro, prevale negli istituti professionali l'idea che la Matematica sia soprattutto una *materia per cui bisogna essere portati* (58,6%), rispetto agli istituti tecnici (48,2%) e soprattutto ai licei scientifici, in cui soltanto il 20,6% degli studenti sceglie questo item. Stesso trend anche per l'affermazione che la Matematica sia soprattutto *fare calcoli*: 51,8% negli istituti professionali, 46,2% negli istituti tecnici e soltanto il 20,6% nei licei scientifici. Rispetto all'idea che la Matematica sia soprattutto *noia* o *gioia*, l'analisi dei dati mostra un'incidenza superiore nei licei scientifici della *gioia* (12,1%), valore che si dimezza negli istituti tecnici (6,1%) e che diviene pressoché nullo negli istituti professionali (0,4%). Situazione inversa per quel che concerne la *noia*, pari al 18,9% negli istituti professionali, meno della metà negli istituti tecnici (8,7%) e assente nei licei scientifici.



ISBN 9788835123972

*Tab. 3 – Percentuale di studenti di scuola secondaria di II grado, per risposta alla domanda "Per te la Matematica è soprattutto" per indirizzo scolastico e indice di interdipendenza*

| *La Matematica è soprattutto:* | *Licei scientifici* | *Istituti tecnici* | *Istituti professionali* | *(V di Cramer)* |
|---|---|---|---|---|
| 1.a Risolvere problemi | 25,5% | 29,6% | 13,6% | (0,169) |
| 1.b Fare calcoli | 20,6% | 46,2% | 51,8% | (0,230) |
| 1.c Gioia | 12,1% | 6,1% | 0,4% | (0,186) |
| 1.d Ansia per l'errore | 17,0% | 30,4% | 35,0% | (0,141) |
| 1.e Noia | 0,0% | 8,7% | 18,9% | (0,225) |
| 1.f Una materia per cui bisogna essere portati | 20,6% | 48,2% | 58,6% | (0,271) |
| 1.g Una materia dove bisogna essere intelligenti | 3,0% | 11,2% | 13,6% | (0,124) |
| 1.h Una materia indispensabile per il progresso dell'uomo | 61,2% | 37,0% | 20,4% | (0,300) |
| 1.i Essere precisi | 27,3% | 28,8% | 22,9% | (0,060) |



ISBN 9788835123972

Per i restanti 3 attributi, emergono interdipendenze ma deboli, pertanto l'idea che la Matematica sia soprattutto *risolvere problemi* è presente nei licei scientifici e negli istituti tecnici, mentre l'*ansia per l'errore* è indicata soprattutto dagli studenti degli istituti professionali (30,4%) e tecnici (35,0%), ma in misura decisamente inferiore dagli studenti dei licei scientifici (17,0%). Infine l'idea che la Matematica sia soprattutto una materia dove bisogna *essere intelligenti* è presente negli istituti professionali (13,6%) e tecnici (11,2%), ma è decisamente inferiore nei licei scientifici (3,0%).

Dall'analisi delle risposte per tipo di scuola e per genere, non emergono differenze significative di genere se non per quattro attributi per la scuola secondaria di I grado e per uno nella scuola secondaria di II grado. Nello specifico, nella scuola secondaria di I grado emerge che la Matematica è *ansia per l'errore* più per gli studenti (42,0%) che per le studentesse (13,7%); per contro, la Matematica è una *materia indispensabile per il progresso dell'uomo* soprattutto per le studentesse (54,3%) rispetto agli studenti (41,7%), così come l'idea che la Matematica sia soprattutto *essere precisi* è prevalente nelle studentesse (26,0%), rispetto agli studenti (11,9%).

Differenze di genere emergono, nella scuola secondaria di I e di II grado, per quanto riguarda l'idea che la Matematica sia soprattutto una materia dove bisogna *essere intelligenti*, con un'incidenza, in entrambi i gradi di scuola, maggiore negli studenti rispetto alle studentesse: nella scuola secondaria di I grado, 37,2% tra gli studenti e 21,7% tra le studentesse, mentre nella scuola secondaria di II grado, 13,2% negli studenti e 6,2% tra le studentesse.

## 5.2. Il piacere per la Matematica

La seconda domanda del questionario si concentra sul piacere per la Matematica. Complessivamente al 70,2% degli studenti la Matematica piace; il 32,8% la ritiene intrigante; per il 20,5% la Matematica diverte; non piace, invece, al 19,8% degli studenti e l'8,1% dichiara di odiarla. Nell'insieme dei rispondenti non emergono differenze significative di genere ma, esaminando per gradi scolastici, le differenze di genere vi sono nella scuola secondaria di I grado, nell'*odio* per la Matematica (13,5% gli studenti a fronte del 6,7% delle studentesse), e nella scuola secondaria di II grado, nel ritenere *intrigante* la Matematica, per cui sono 31,6% gli studenti e 42,0% le studentesse.

Interdipendenze discrete emergono con il grado scolastico per quanto riguarda il divertimento e il non provare piacere per la Matematica; interdipendenze deboli ma presenti emergono per quanto riguarda il piacere e



ISBN 9788835123972

l'odio. L'essere una materia che intriga rimane invece prerogativa di genere, in quanto non emergono differenze tra studenti di gradi scolastici diversi.

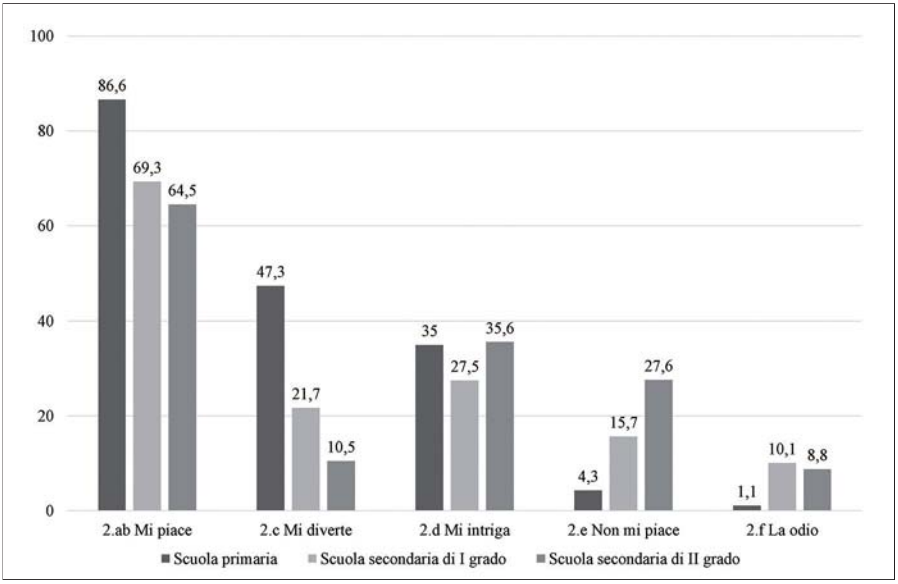



*Fig. 1 – Percentuale di studenti per risposte alla domanda n. 2 "La matematica come materia", per ordine e grado di scuola*

Nota: V di Cramer "Mi piace" 0,17; "Mi diverte" 0,32; "Mi intriga" 0,08; "Non mi piace" 0,22; "La odio" 0,11.

La fig. 1 mostra come il piacere non abbia un andamento progressivo ma comunque diminuiscano sensibilmente gli studenti ai quali la matematica piace dalla scuola primaria (86,6%) a quella secondaria (69,3%), quasi come se questa segnasse un passaggio anche nell'atteggiamento verso la Matematica.

Anche il divertimento è molto più accentuato nella scuola primaria, in cui circa la metà degli studenti conferma di divertirsi, mentre diminuisce progressivamente nella scuola secondaria di I grado (21,7%) e poi in quella secondaria di II grado (10,5%). Tendenza inversa per il "non piacere", per cui a fronte di un numero contenuto di bambini a cui la Matematica non piace (4,3%), si nota un progressivo aumento di tale numerosità relativa nella scuola secondaria di I grado (15,7%) e nella scuola secondaria di II grado, in cui ad almeno uno studente su quattro la Matematica non piace (27,6%).

Anche l'atteggiamento di odio si manifesta prevalentemente tra gli studenti delle scuole secondarie di I e di II grado (8-10%), mentre non è presente fatto salvo alcuni pochi casi (1,1%) nella scuola primaria.



ISBN 9788835123972

Approfondendo le differenze tra gli studenti delle scuole secondarie di II grado per indirizzo, si connotano anche delle differenze di atteggiamento che mostrano un'interdipendenza discreta.

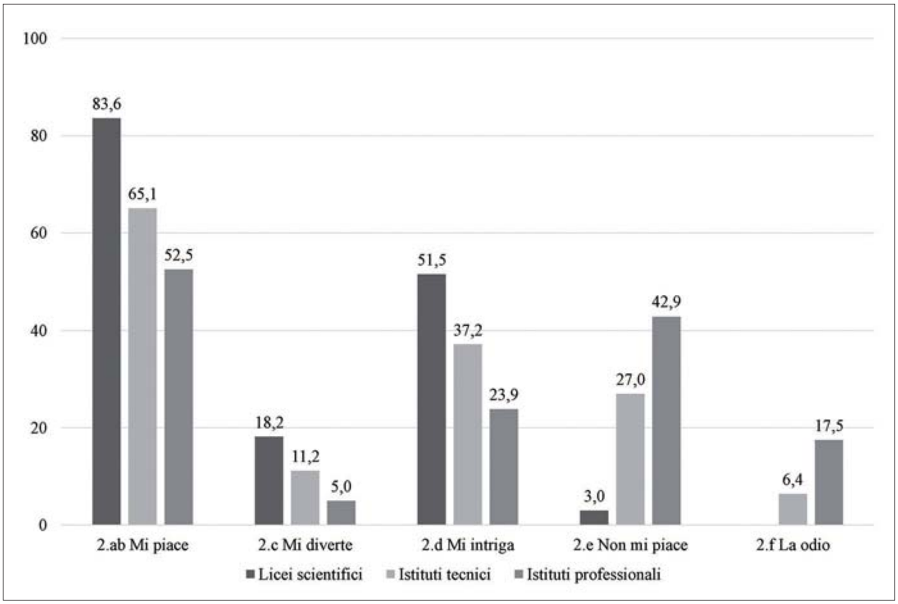



*Fig. 2 – Percentuale di studenti di scuola II di secondo grado per risposte alla domanda n. 2 "La matematica come materia", per indirizzo scolastico*

Nota: V di Cramer "Mi piace" 0,23; "Mi diverte" 0,15; "Mi intriga" 0,21; "Non mi piace" 0,31; "La odio" 0,23.

La fig. 2 mostra che la matematica piace, intriga e diverte molto di più gli studenti dei licei scientifici, meno gli studenti degli istituti tecnici e ancor meno quelli degli istituti professionali. Per contro, la Matematica non piace ed è odiata più dagli studenti degli istituti professionali. Non vi sono studenti dei licei scientifici che dichiarano di odiare la Matematica e non piace soltanto al 3,0%.

## *5.3. Ingredienti per essere bravi in Matematica*

La terza domanda chiedeva agli studenti quale sia l'aspetto più importante per essere bravi in Matematica. Complessivamente, il 38,8% degli studenti afferma che per essere bravi in Matematica è importante *saper ragionare*,



ISBN 9788835123972

il 24,9% *impegnarsi*, il 14,3% *essere portati per la materia*, l'8,7% *essere veloci nei calcoli*, il 6,7% *non fare errori*, il 4,3% *essere intelligenti* e l'1,2% *essere fortunati*.

Non emergono differenze di genere, né sul totale né per grado scolastico, ad eccezione della scuola secondaria di I grado.

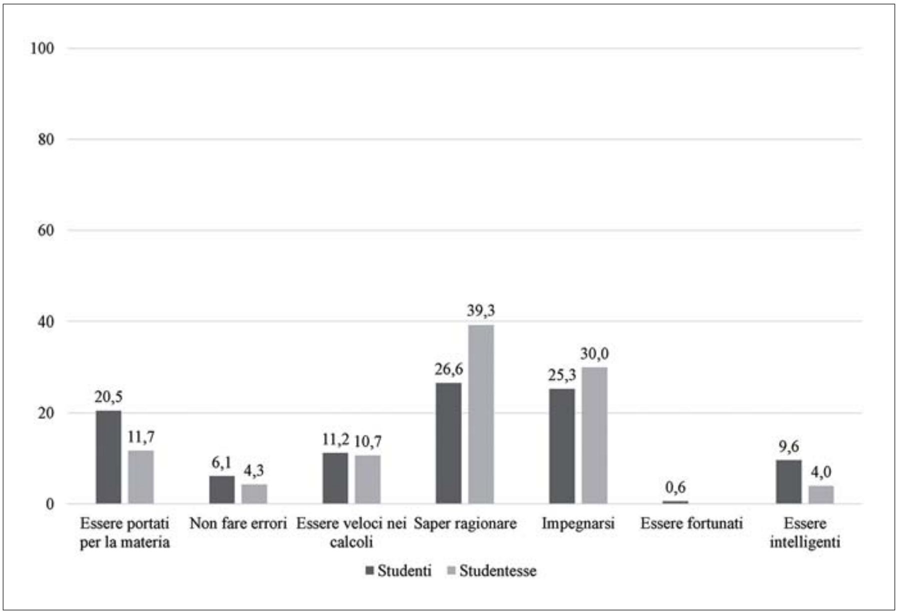



*Fig. 3 – Percentuale di studenti di scuola secondaria di I grado per risposte alla domanda n. 3 "Per essere bravi in Matematica secondo te qual è l'aspetto più importante?", per genere*

Nota: V di Cramer 0,46.

La fig. 3 mostra che, nella scuola secondaria di I grado, le studentesse ritengono che per essere bravi in Matematica sia importante saper ragionare e impegnarsi in misura superiore dei loro compagni, che invece ritengono più importante l'essere portati per la materia e l'essere intelligenti.

La fig. 4 mostra le differenze tra studenti per ordine e grado di scuola, in quanto risultate significative (V di Cramer 0,20).

In particolare, cresce la convinzione che l'aspetto più importante sia il *saper ragionare*, che dal 26,0% degli studenti della scuola primaria, è indicato da circa la metà degli studenti della scuola secondaria di II grado. Decresce invece l'idea che sia importante *essere veloci nei calcoli* (dal 15,2% di studenti della scuola primaria al 4,9% di studenti della scuola secondaria di II



ISBN 9788835123972

grado) e di *impegnarsi* (dal 28,5% di studenti della scuola primaria al 21,7% di studenti della scuola secondaria di II grado). L'idea di essere fortunati ed essere intelligenti prevale, seppur in pochi studenti, al I ciclo.

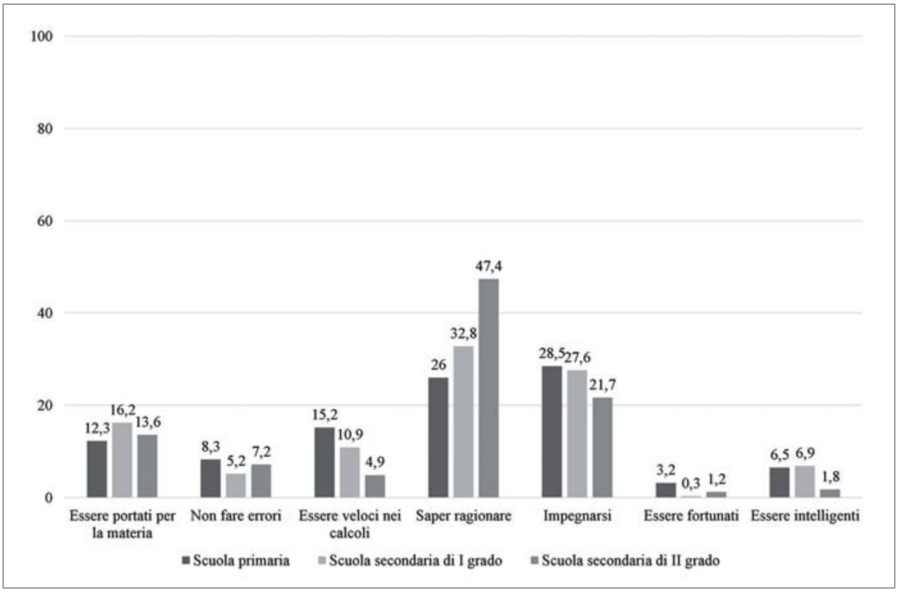



*Fig. 4 – Percentuale di studenti per risposte alla domanda n. 3 "Per essere bravi in Matematica secondo te qual è l'aspetto più importante?", per ordine e grado di scuola*

Nota: V di Cramer. 0,20.

La fig. 5 mostra le risposte date dagli studenti di scuola secondaria di II grado, evidenziando le differenze per indirizzo, risultate significative (V di Cramer 0,27).

L'analisi dei dati evidenzia, tra gli studenti della scuola secondaria di II grado, delle differenze di atteggiamento, per cui sembra che nei licei scientifici prevalga la convinzione che per essere bravi in Matematica sia importante agire; questa idea è un po' meno marcata, ma comunque è presente anche tra gli studenti degli istituti tecnici, mentre negli istituti professionali, prevale un atteggiamento fatalista.



ISBN 9788835123972

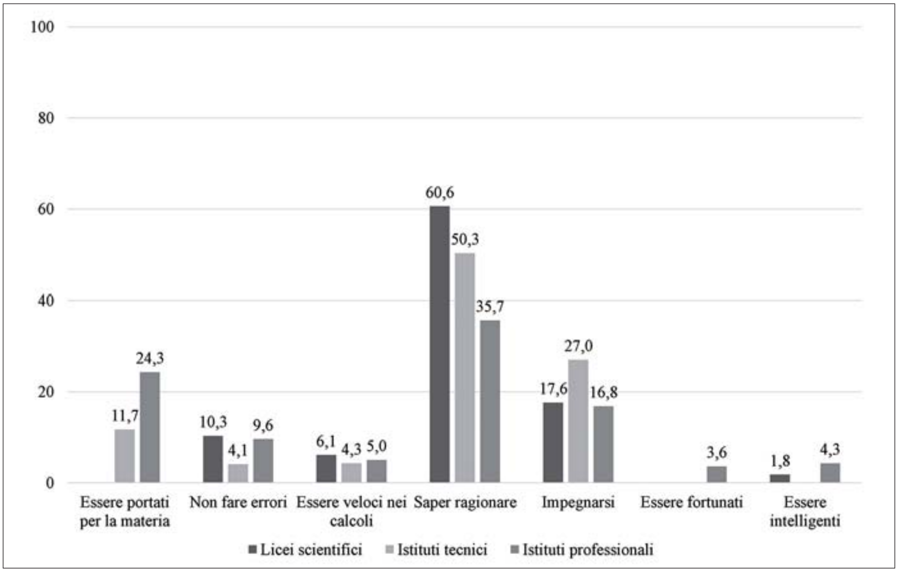



*Fig. 5 – Percentuale di studenti di scuola secondaria di II grado per risposte alla domanda n. 3 "Per essere bravi in Matematica secondo te qual è l'aspetto più importante?", per indirizzo*

Nota: V di Cramer. 0,27.

Per essere bravi in Matematica è importante *saper ragionare* per più della metà degli studenti dei licei scientifici e degli istituti tecnici (rispettivamente 60,6% e 50,3%); per contro, negli istituti professionali, solo il 35,7% degli studenti afferma che sia importante. È importante *impegnarsi* per il 27,0% degli studenti degli istituti tecnici rispetto al 17,6% degli studenti dei licei scientifici e del 16,8% di quelli dei professionali. Uno studente ogni quattro degli istituti professionali ritiene che, per essere bravi in Matematica, sia importante *essere portati per la materia*, idea condivisa anche dall'11,7% degli studenti dei tecnici, ma da nessuno studente dei licei scientifici. Inoltre, l'idea di *essere fortunati* ed *essere intelligenti* è presente, seppur con valori minimi (rispettivamente 3,6% e 4,3%), tra gli studenti degli istituti professionali, mentre non è presente tra gli studenti degli altri indirizzi di scuola, eccetto l'1,8% di studenti dei licei scientifici che, per essere bravi in Matematica, ritengono sia importante *essere intelligenti*. L'idea di non fare errori è condivisa da circa il 10% degli studenti sia dei licei scientifici sia degli istituti professionali e dal 4,1% degli istituti tecnici. Mentre l'idea di essere veloci nei calcoli è scelta dal 6,1% degli studenti dei licei scientifici, seguiti dal 5,0% degli studenti degli istituti professionali e dal 4,3% di quelli degli istituti tecnici.



ISBN 9788835123972

## *5.4. Motivazioni per le difficoltà in Matematica*

L'impegno è un aspetto che emerge anche quando viene richiesto agli studenti di esprimere le motivazioni per le quali si possono riscontrare difficoltà.

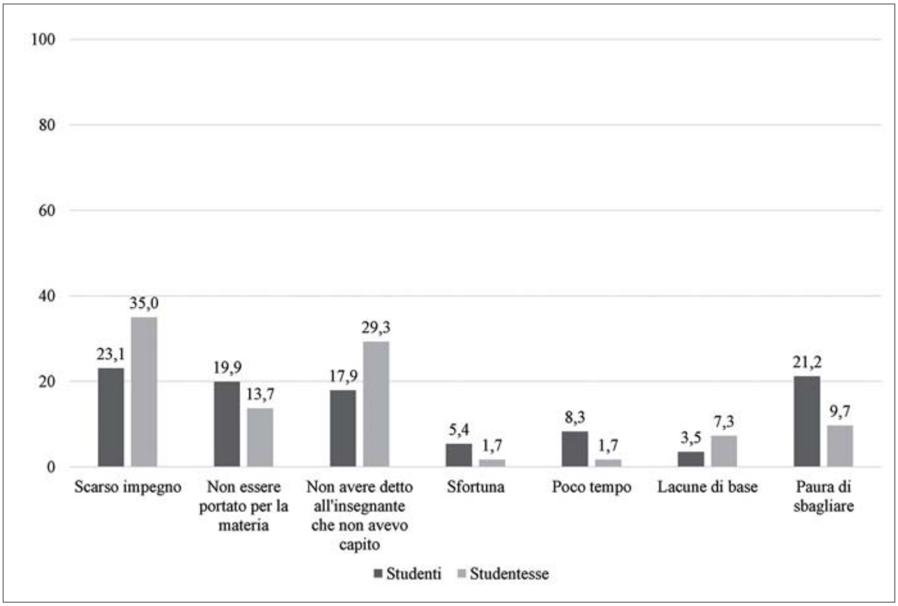



*Fig. 6 – Percentuale di studenti di scuola secondaria di I grado per risposte alla domanda n. 4 "Quando hai difficoltà in Matematica, quale pensi sia il motivo principale?", per genere*

Nota: V di Cramer. 0,31.

Il 34,0% afferma che si riscontrano difficoltà per via dello *scarso impegno*, soprattutto nella scuola secondaria di II grado (39,2%) rispetto alla scuola primaria (29,2%) e secondaria di I grado (28,9%). Inoltre, nella scuola secondaria di I grado, analogamente a quanto emerso dall'analisi della domanda n. 3, lo scarso impegno è significativamente differente per genere.

Lo *scarso impegno* prevale come motivo principale di difficoltà nelle studentesse (35,0%) rispetto agli studenti (23,1%). Sempre tra le studentesse, si riscontra anche il *non aver detto all'insegnante di non aver capito* (29,3% vs 17,9% dei maschi) e l'eventuale riconoscimento di *lacune di base* (7,3% di studentesse rispetto al 3,5% degli studenti). Per contro, tra gli studenti prevalgono le seguenti motivazioni: l'idea di *non essere portato per la materia* (19,9% rispetto al 13,7% delle studentesse), la *sfortuna* (5,4% rispet-



ISBN 9788835123972

to all'1,7% delle studentesse), il *poco tempo* (8,3% rispetto all'1,7% delle studentesse) e, soprattutto, la *paura di sbagliare* presente nel 21,2% degli studenti rispetto al 9,7% delle studentesse.

La paura di sbagliare è un atteggiamento che varia anche tra ordini e gradi diversi.

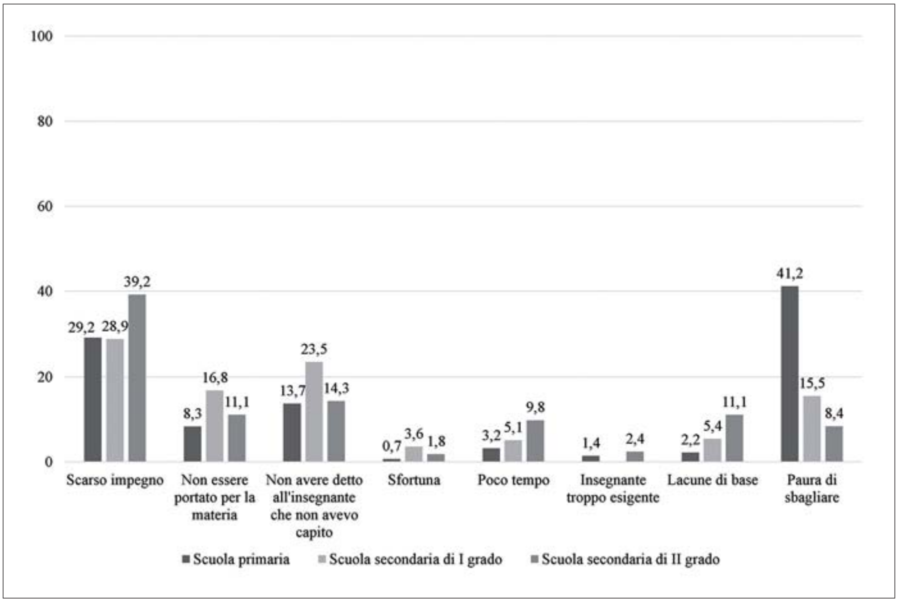



*Fig. 7 – Percentuale di studenti per risposte alla domanda n. 4 "Quando hai difficoltà in Matematica, quale pensi sia il motivo principale?", per ordine e grado di scuola*

Nota: V di Cramer. 0,28.

La fig. 7 mostra infatti che la *paura di sbagliare* è soprattutto espressa dagli studenti della scuola primaria (41,2%), rispetto agli altri ordini di scuola (15,5% nella scuola secondaria di I grado e 8,4% nella scuola secondaria di II grado). Per contro, lo *scarso impegno* prevale tra gli studenti di scuola secondaria di II grado (39,2%), a fronte di circa il 29,0% degli studenti sia nella scuola primaria sia nella scuola secondaria di I grado.

La fig. 8 mostra la percentuale di studenti per risposte degli studenti della scuola secondaria di II grado alla domanda n. 4 per indirizzo scolastico.



ISBN 9788835123972

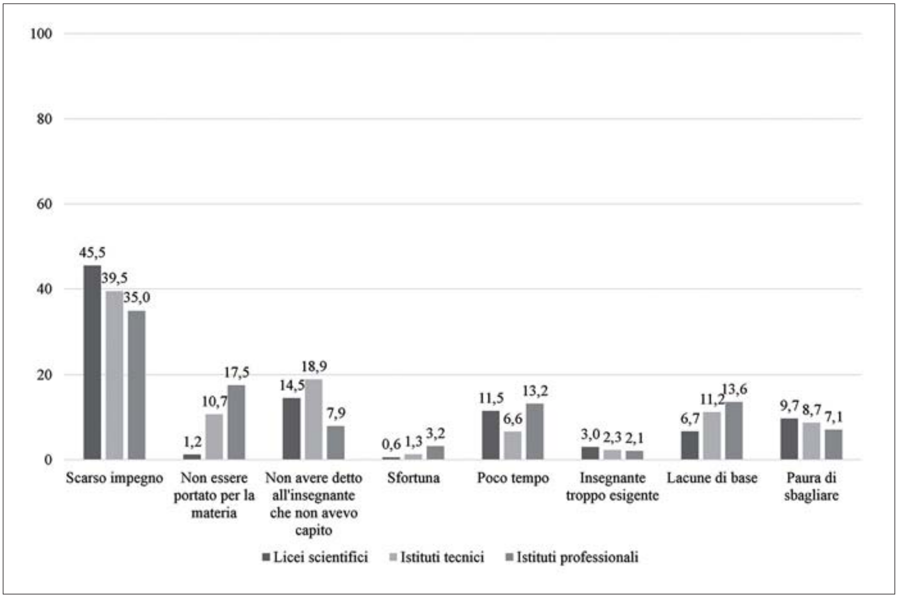



*Fig. 8 – Percentuale di studenti di scuola secondaria di II grado per risposte alla domanda n. 4 "Quando hai difficoltà in Matematica, quale pensi sia il motivo principale?", per indirizzo*

Nota: V di Cramer. 0,23.

Analizzando le percentuali di risposta degli studenti per indirizzi scolastici di scuola secondaria di II grado, le difficoltà in Matematica sono attribuite prevalentemente allo *scarso impegno*, con una prevalenza nei licei scientifici (45,5%), seguiti dai tecnici (39,5%) e dai professionali (35,0%). Per contro, l'avere *lacune di base* o il *non essere portato* per la materia prevale tra gli studenti degli istituti professionali, rispetto a quelli degli altri indirizzi.

Dall'analisi dei dati sembra emergere una tendenza da parte degli studenti degli istituti professionali al fatalismo che trova riscontro anche nell'idea di rassegnazione espressa nell'ultima domanda del questionario. La domanda n. 5 del questionario chiedeva agli studenti come vivono il momento precedente alla consegna di una verifica.

Il 41,7% degli studenti vive questo momento con ansia, il 19,2% spera di essere andato meglio dell'altra volta, il 10,9% con curiosità, il 10,8% con terrore, il 7,7% con tranquillità, il 7,2% con rassegnazione e il 2,4% spera di essere andato meglio dei suoi compagni.

Al di là del sentimento di ansia che è presente tra gli studenti in tutti i livelli, si nota che la curiosità è soprattutto degli studenti di scuola primaria



ISBN 9788835123972

(15,9%), mentre la rassegnazione è presente nel 12,7% degli studenti della scuola secondaria di II grado e soltanto nel 2,9% degli studenti della scuola secondaria di I grado.

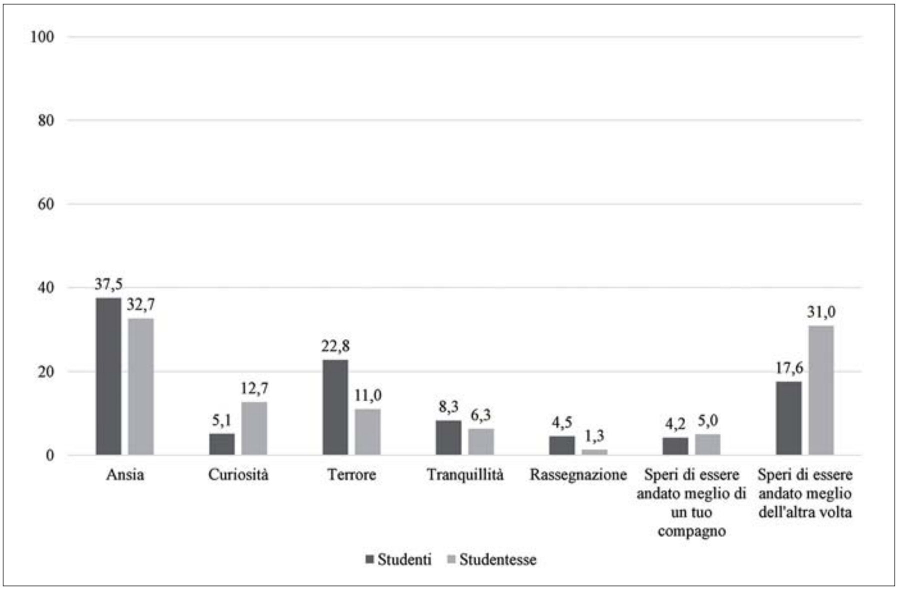



*Fig. 9 – Percentuale di studenti di scuola secondaria di I grado per risposte alla domanda n. 5 "Quando ti consegnano una verifica, come vivi il momento precedente?", per genere*

Nota: V di Cramer. 0,26.

Come mostra la fig. 9, le differenze di genere sono significative al I ciclo, ove gli studenti sembrano essere più ansiosi, terrorizzati, rassegnati delle studentesse, che a loro volta si rivelano essere più curiose e speranzose rispetto ai loro colleghi maschi.

Atteggiamenti diversi si riscontrano anche tra gli studenti della scuola secondaria di II grado (cfr. la fig. 10).

Gli studenti dei licei scientifici sembrano essere più ansiosi e curiosi rispetto agli studenti degli altri indirizzi, mentre gli studenti degli istituti professionali sembrano essere più rassegnati dei loro colleghi.



ISBN 9788835123972

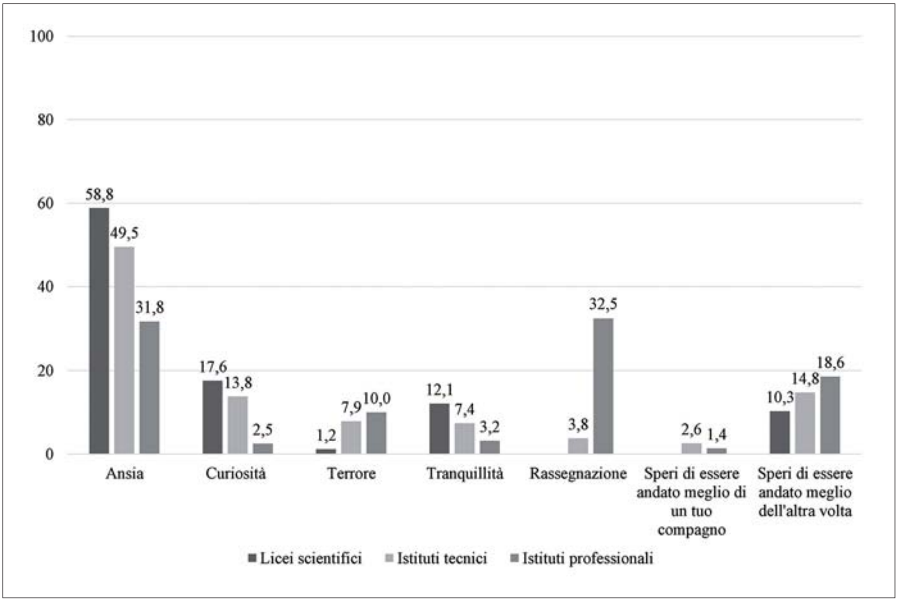



*Fig. 10 – Percentuale di studenti di scuola secondaria di II grado per risposte alla domanda n. 5 "Quando ti consegnano una verifica, come vivi il momento precedente?", per indirizzo*

Nota: V di Cramer. 0,36.

## 6. Discussione

I risultati di questo studio hanno evidenziato atteggiamenti e sentimenti nei confronti della Matematica diversi soprattutto per ordine e grado di scuola e per indirizzo scolastico all'interno della scuola secondaria di II grado. Inoltre sono emerse interessanti differenze di genere all'interno della scuola secondaria di I grado.

Ciò premesso, sarebbe utile mettere a confronto gli atteggiamenti degli studenti con i risultati di apprendimento, per vedere se, ad atteggiamenti favorevoli, corrispondano risultati di apprendimento positivi e viceversa.

Fermo restando che alla maggior parte degli studenti *piace* la Matematica, dall'analisi dei dati emerge che, al crescere del grado scolastico, gli atteggiamenti nei confronti della Matematica sembrano cambiare.

Inoltre, i dati restituiti dalle differenze per indirizzo tra gli studenti della scuola secondaria di II grado, sembrano denotare una coerenza tra gli atteggiamenti degli studenti nei confronti della Matematica e gli stereotipi sugli



ISBN 9788835123972

indirizzi scolastici, per cui pare che per es. *al liceo scientifico vadano quegli studenti che apprezzano di più la Matematica*, mentre ai professionali quegli studenti a cui *non piace* la Matematica.

I risultati emersi dal confronto per gradi scolastici e, soprattutto, per indirizzi tra gli studenti delle scuole secondarie di II grado, suggeriscono, quindi, di approfondire la relazione tra atteggiamenti e risultati di apprendimento, per vedere se ad atteggiamenti positivi corrispondono risultati di apprendimento positivi e viceversa, oppure se non vi è alcuna correlazione tra atteggiamenti e successo scolastico.

Un altro aspetto rilevante che denota questo studio è la necessità di approfondire se esiste e quale sia il legame tra le aspettative di successo attese in Matematica da parte degli insegnanti nei confronti degli studenti e l'atteggiamento di questi ultimi nei confronti della Matematica.

In altri termini, l'ipotesi che sarebbe utile studiare è quella che, oltre all'eventuale presenza di convinzioni e attitudini personali, possa esistere anche un effetto Pigmalione (Jacobson e Rosenthal, 1972). Questa teoria prende in considerazione il pre-giudizio che gli individui formulano nel momento che incontrano una persona per inquadrarla. Diversi studi mostrano che l'effetto Pigmalione avviene anche in classe nel momento in cui l'insegnante si relaziona con gli studenti, trattandoli per come li vede e li ha immaginati. Dunque, l'immagine che l'insegnante/la scuola assume di chi apprende sotto la sua guida, condiziona, di fatto, non solo quanto il docente chiede a chi impara, ma anche l'effettivo rendimento e le reali prestazioni dei suoi studenti, specialmente se questi si trovano in una situazione di deprivazione relativa.

Da qui l'importanza di considerare non soltanto l'atteggiamento degli studenti nei confronti della disciplina, ma anche quello dei docenti nei confronti dell'insegnamento, sia dal punto di vista delle strategie didattiche adottate in classe, sia sotto l'aspetto relazionale.

## 7. Conclusioni

Il quadro che esce dalla nostra ricerca non è dei migliori per la nostra disciplina. L'analisi dei dati mostra che negli studenti, aumentando il grado di scuola, diminuiscono la gioia e il divertimento di fare Matematica, mentre aumentano notevolmente l'ansia, la paura e, in qualche caso, anche la noia.

Purtroppo, secondo noi, non è probabilmente la Matematica a diventare noiosa anche se aumenta il livello di astrazione, ma il principale colpevole del mancato gradimento della materia sembra essere spesso legato al metodo di insegnamento dei docenti. E in tal senso la nostra ricerca dovrebbe svol-



ISBN 9788835123972

gere ulteriori approfondimenti. Per esempio, presentare la Matematica come puro calcolo "a tempo" e non come metodo per risolvere problemi, meglio se reali, snatura quello per cui la disciplina è nata. Non si può insegnare la Matematica come veniva insegnata 100 anni fa. Questo aspetto richiama l'importanza di saper scegliere quale didattica sia utile implementare in quali contesti e per quali obiettivi di apprendimento e, di conseguenza, l'importanza di rafforzare la formazione continua dei docenti in tal senso, tenendo conto della realtà mutevole e soggetta al cambiamento.

Inoltre, gli studenti non sono più gli stessi e nemmeno il mondo circostante. Occorre che al più presto i docenti facciano capire agli studenti che la Matematica non è solo calcolo e formule, ma che può essere anche divertente oltre che utile.

Secondo Paul Lockhart, nel suo libro *Contro l'ora di Matematica* (2010), occorre restituire alla Matematica il suo lato creativo e giocoso, riscoprire e trasmettere ai ragazzi lo slancio immaginativo e la sfida mentale che da sempre anima i matematici, perché «non c'è nulla di così onirico e poetico, nulla di così radicale e sovversivo, e psichedelico, quanto la Matematica».

## Riferimenti bibliografici

Babini S., Graziani I. (2018), "Analysis of errors on area and perimeter in some Invalsi questions", *EdiMaST*, 4, pp. 609-622.

Babini S., Graziani I. (2019), "Tempo, errori, paura di sbagliare e valutazione: gli ostacoli che non fanno amare la matematica", in *La matematica in atto: didattica e valutazione*, *Quaderni GRIMeD*, 5, pp. 174-183.

Caponi B., Cornoldi C., Falco G., Focchiatti R., Lucangeli D. (2012), *MeMa. Valutare la metacognizione, gli atteggiamenti negativi e l'ansia in matematica*, Erickson, Trento.

Cascella C. (2017), "Exploring the relationship between social roles in daily life and achievement gap between boys and girls in maths: Empirical evidences from Italian primary school", in *11th annual International Technology, Education and Development Conference*, IATED, Valencia, pp. 9832-9841.

Eurydice (2010), *Gender differences in educational outcomes: Study on the measures taken and the current situation in Europe*, Education, Audiovisual and Culture Executive Agency, Bruxelles, https://op.europa.eu/en/publication-detail/-/publication/40271e21-ca1b-461e-ba23-88fe4d4b3fd4, data di consultazione 27/3/2021.

Freddano M., Tortora V.F. (2016), "Le carriere professionali degli studenti e delle studentesse dell'area PON", in L. Palmerio (a cura di), *OCSE PISA 2012. Contributi di approfondimento*, FrancoAngeli, Milano, pp. 40-57.



ISBN 9788835123972

Giberti C. (2019), “Differenze di genere in matematica: dagli studi internazionali alla situazione italiana”, *DdM Didattica della matematica. Dalla ricerca alle pratiche d’aula*, 5, pp. 44-69.
Graziani I. (2019), “Progettare attività di recupero efficaci in matematica”, *Archimede*, 1, pp. 8-14.
Graziani I., Babini S. (2016), “Pitag’ORA PRO NOBIS”, *EdiMaST*, 2, 2, pp. 315-338.
INVALSI (2006), *Il livello di competenza dei quindicenni italiani in matematica, lettura, scienze e problem solving. Rapporto nazionale di OCSE-PISA 2003*, Armando, Roma.
Lindberg S.M., Hyde J.S., Petersen J.L., Linn M.C. (2010), “New trends in gender and mathematics performance: a meta-analysis”, *Psychological Bulletin*, 136, 6, pp. 1123-1135.
Lockart P. (2010), *Contro l’ora di matematica*, Rizzoli, Milano.
OECD (2012), *Gender Equality in Education, Employment and Entrepreneurship: Final Report to the MCM 2012”, Meeting of the OECD Council at Ministerial Level*, OECD, Paris, https://www.oecd.org/social/family/50423364.pdf, data di consultazione 27/3/2021.
OECD (2012a), *What kinds of careers do boys and girls expect for themselves? PISA in Focus*, 14, OECD, Paris, testo disponibile al sito: https://www.oecd.org/pisa/pisaproducts/pisainfocus/49829595.pdf, data di consultazione 28/1/2021.
OECD (2012b), *Closing the gender gap: act now*, OECD, Paris, testo disponibile al sito: https://www.oecd-ilibrary.org/social-issues-migration-health/close-the-gender-gap-now_9789264179370-en, data di consultazione 27/3/2021.
Primi C., Busdraghi C., Tomasetto C., MorsanyiK., Chiesi F. (2014), *Measuring math anxiety in Italian college and high school students: Validity, reliability and gender invariance of the Abbreviated Math Anxiety Scale (AMAS). Learning and Individual Differences*, 34, pp. 51-56.
Rosenthal R., Jacobson L. (1972), *Pigmalione in classe. Aspettative dell’insegnante e sviluppo intellettuale degli allievi*, FrancoAngeli, Milano.
Sikora J., Pokropek A. (2011), “Gendered career expectations of students: Perspectives from PISA 2006”, *OECD Education Working Papers*, 57, testo disponibile al sito: http://dx.doi.org/10.1787/5kghw6891gms-en, data di consultazione 28/1/2021.
Zan R., Baccaglini-Frank A. (2017), *Avere successo in matematica. Strategie per l’inclusione e il recupero*, Utet, Torino.



ISBN 9788835123972

# *6. Promuovere l'argomentazione e la valutazione formativa in classe: le prove standardizzate come possibile strumento*

di Simone Quartara

Il seguente capitolo è volto a proporre un contributo che illustri le modalità e alcuni risultati del lavoro sviluppato in classe sul tema dei modelli lineari. Punti cardine della sperimentazione sono due principi: quello di realizzare un percorso ad alto contenuto argomentativo, in cui gli studenti devono fornire risposte argomentate e anche pronunciarsi su affermazioni di altri studenti (costruite *ad hoc*) e quello di favorire la concettualizzazione mediante la flessibilità tra registri di rappresentazione. Durante la sperimentazione grande importanza è data alla valutazione formativa che si configura come un vero e proprio metodo di insegnamento, nel quale "elementi di evidenza relativi ai risultati degli studenti vengono raccolti, interpretati e utilizzati da insegnanti, studenti e loro pari – i compagni – per prendere decisioni sui passi successivi da fare nel processo di istruzione, che possano essere migliori, o meglio fondate, rispetto alle decisioni prese in assenza di tali elementi di evidenza" (Black e Wiliam, 2009, p. 7, trad. in Cusi, Morselli, Sabena). Il percorso è rivolto a studenti del secondo anno della scuola secondaria di secondo grado. In particolare, il progetto è stato affrontato dalle classi 2B e 2F dell'istituto tecnico-tecnologico "Italo Calvino" di Genova. L'attività, che si contraddistingue per l'alternarsi di lavoro individuale e discussioni collettive, si articola intorno a una selezione di item INVALSI di grado 10, opportunamente resi "argomentativi" mediante domande aperte del tipo "Come lo spiegheresti a un compagno? Come fai a stabilirlo? Luca ha ragione/non ha ragione, perché? Come procedi?". Durante la presentazione saranno analizzati alcuni protocolli significativi che illustrano i possibili atteggiamenti degli studenti nell'affrontare le diverse situazioni problema. Al termine del percorso è risultato evidente come le attività proposte, anche se migliorabili, siano state dei validi strumenti per rafforzare e armonizzare il legame tra la percezione sensoriale (aspetti figurali) e il dominio concettuale, inoltre ciò



ISBN 9788835123972

mostra come le prove INVALSI possano essere utilizzate in modo formativo dagli insegnanti per migliorare la loro azione didattica in una prospettiva di sviluppo delle competenze matematiche.

*The paper aims to propose a contribution that describes the modalities and the results of the work developed in the classroom on the linear models. The experimentation is based on two principles: the former is the creation of a path with a high argumentative content on which the students have to provide argued answers and to comment those of the other students (built ad hoc); the latter is to favorite the conceptualization through flexibility between representation registers. During the experimentation phase, great importance is given to the formative evaluation which is configured as a real teaching method, in which "Elements of evidence relating to student results are collected, interpreted and used by teachers, students and their peers – the classmates – to make decisions about the next steps to take in the education process, that they may be better, or better founded, than the decisions taken in the absence of such elements evidence" (Black and Wiliam, 2009, p. 7, translation in Cusi, Morselli, Sabena). The course is aimed at second-year secondary school students. In particular, the project has been addressed by the classes 2B and 2F of the "Italo Calvino" technical-technological Institute of Genoa. The activity, characterized by the alternation of individual work and collective discussions, is based on a selection of INVALSI level 10 items, appropriately rendered "argumentative" by means of open questions such as: "How would you explain it to a companion? How can you explain it? Is Luca right, why? How do you proceed?". During the presentation some significant protocols will be analyzed that illustrate the possible attitudes of the students in facing different problems. The project showed the proposed activities, even if improvable, are valid tools to strengthen and harmonize the link between the sensorial perception (figural aspects) and the conceptual domain. In addition, this project showed how the INVALSI tests can be used in a formative way by teachers to improve their didactic action in a perspective of development of Mathematical skills.*

## 1. Quadro teorico

L'attenzione ai processi argomentativi nell'attività di insegnamento e in particolare nell'insegnamento della Matematica è essenziale dato che «l'argomentazione riveste un ruolo centrale in quanto competenza trasversale e strettamente correlata alla formazione del cittadino. L'argomentazione è an-



ISBN 9788835123972

che importante dal punto di vista didattico, in quanto può (e deve) divenire non solo un fine, una competenza da sviluppare, ma anche un mezzo, un discorso che contribuisce alla costruzione dei significati» (Morselli, Sibilla e Testera, 2015).

La complessità delle condizioni necessarie per l'argomentazione e le difficoltà che gli insegnanti incontrano nell'ottenere sufficienti prestazioni argomentative dalla maggior parte degli allievi ai vari livelli scolastici suggeriscono alcuni "principi" che dovrebbero essere seguiti per lo sviluppo di attività sull'argomentazione. Essi vengono qui enunciati in forma sintetica e generale.

Le attività sull'argomentazione in Matematica non possono essere confinate in uno "spazio" ristretto dell'offerta formativa; dato che non si tratta di tecniche o di nozioni, ma di un insieme di atteggiamenti, valori, risorse logico-linguistiche da costruire progressivamente.

Richieste del tipo "spiega perché", "motiva la tua scelta", "motiva la tua interpretazione", "confronta... con..." (nel caso di strategie risolutive di problemi, di ipotesi o congetture ecc.), "stabilisci se... e giustifica la tua risposta" dovrebbero essere affiancate a compiti di natura diversa e in ambiti diversi (dalla produzione di ipotesi, alla risoluzione di problemi, alla stesura di progetti, all'analisi di fatti o idee...).

Le attività sull'argomentazione (per essere incisive e credibili per gli studenti) hanno bisogno di un contesto educativo in cui il giustificare le proprie scelte, il confrontare alternative possibili identificando ed esplicitando i pro e i contro ecc. sono richieste rivolte frequentemente agli studenti ma anche comportamenti praticati dagli insegnanti.

Cruciale appare una "pedagogia dell'errore" in cui l'errore viene vissuto dagli studenti come un rischio inevitabile quando si cercano strade nuove, quando si formulano ipotesi, quando si valutano situazioni. La riflessione sulle possibili cause dell'errore e sui suoi effetti, la ricerca dei modi per superarlo o per evitarlo dovrebbero sostituire la "sanzione" dell'errore come unico sbocco del processo valutativo dell'insegnante.

L'attenzione alla precisione e pertinenza del linguaggio verbale dovrebbe essere oggetto di impegno da parte di tutti gli insegnanti a tutti i livelli scolastici.

Naturalmente, questi "principi" vanno intesi come tali: indicazioni ideali ottimali, da realizzare per quanto possibile nelle reali situazioni in cui ogni insegnante opera.

Altro elemento che nella scuola gioca un ruolo indispensabile è la valutazione sia per il percorso di apprendimento degli studenti sia per il lavoro dei docenti; durante la sperimentazione si è cercato di sfruttare le potenzia-



ISBN 9788835123972

lità formative dei processi di valutazione finalizzati a migliorare il processo educativo.

In questo senso la valutazione formativa – valutazione per l'apprendimento – si configura come un vero e proprio metodo di insegnamento nel quale «le evidenze che si presentano nei risultati degli studenti sono raccolte, interpretate e utilizzate dagli insegnanti, dagli studenti o loro pari, per prendere decisioni sui passi successivi da intraprendere nell'attività di insegnamento-apprendimento che probabilmente saranno migliori, o maggiormente fondate, rispetto alle decisioni che si sarebbero potute prendere in assenza di tali evidenze» (Black e William, 2009, traduzione dell'autore).

Tale pratica si può concretizzare in cinque strategie messe in azione dai diversi agenti della valutazione (insegnante, studenti, compagni):
1) chiarire/capire/condividere gli obiettivi di apprendimento e i criteri di valutazione;
2) progettare discussioni di classe efficaci e attività che consentano di mettere in luce l'apprendimento degli studenti;
3) fornire feedback che consentano allo studente di migliorare;
4) attivare gli studenti come risorse gli uni per gli altri;
5) rendere gli studenti responsabili del proprio apprendimento.

In questo senso le schede di lavoro e la conduzione dell'attività hanno cercato di stimolare gli studenti.

Creare un legame tra la valutazione formativa e l'argomentazione Matematica può essere il valore aggiunto di un'attività formativa. Pensare l'argomentazione come risorsa per la valutazione formativa porta a elaborare stimoli che richiedano risposte motivate e quindi rendano lo studente più consapevole del proprio ragionamento e perciò responsabile in prima persona del proprio processo di apprendimento. Inoltre esplicitare il proprio ragionamento permette una maggiore facilità nel fornire feedback opportuni da parte dei compagni e dell'insegnante.

## 2. L'architettura delle schede

Le schede di lavoro che hanno composto l'attività sono state progettate all'interno del Piano lauree scientifiche e in particolare durante il laboratorio *linguaggio e argomentazione nello studio della Matematica* proposto dal Dipartimento di Matematica di Genova.

La sperimentazione ha coinvolto poco più di cinquanta studenti di alcune classi seconde (2BT e 2FT) dell'istituto tecnico "Italo Calvino" di Genova, si è svolta nel mese di novembre 2018 per un totale di 10 unità orarie e si è



ISBN 9788835123972

contraddistinta per l'alternarsi di lavoro individuale e discussioni collettive secondo lo schema indicato in figura.

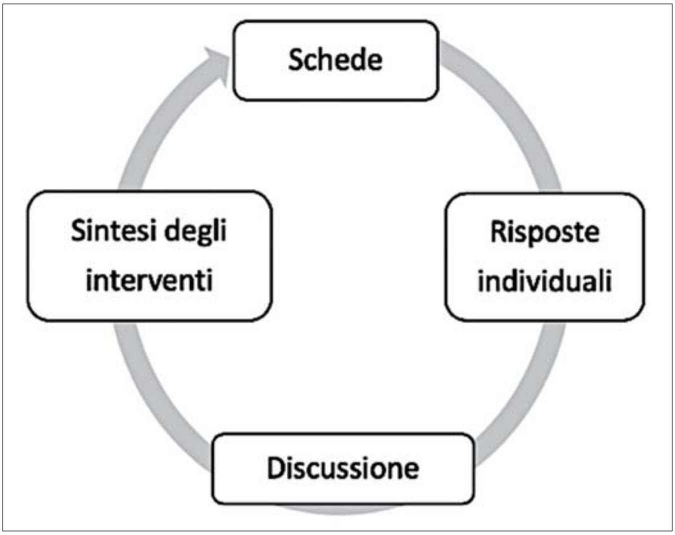



*Fig. 1 – Schema dell'attività*

Per ogni lezione agli studenti, già abituati a tale metodologia di lavoro, è stata consegnata una scheda che in prima battuta hanno affrontato in autonomia per poi passare alla condivisione delle risposte date a ciascuna domanda presente nella scheda. Sulla lavagna si sono raccolte le diverse proposte di soluzioni e le relative argomentazioni per poi passare alla loro analisi, da quest'attività si è poi passati alla sintesi degli interventi producendo una risposta comune e condivisa dal gruppo classe.

Per la costruzione delle schede si sono opportunamente modificati, in prospettiva argomentativa, alcuni item di domande INVALSI di grado 10.

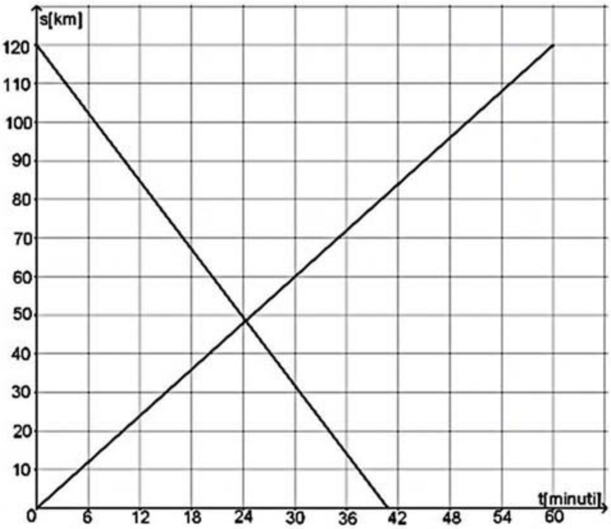
Nel seguito saranno presentati alcuni quesiti nella versione originale – come proposti nelle rilevazioni standardizzate – e nella versione argomentativa – come proposti nella sperimentazione – per comprendere al meglio le fasi di progettazione.

In figura 2 è proposto l'item a del quesito 4 estratto dal fascicolo del 2017. L'ambito prevalente è relazioni e funzioni; lo scopo è quello di estrarre informazioni da un grafico posizione-tempo per cui il traguardo prefissato dalla domanda è quello di rappresentare, elaborare, analizzare e interpretare dati per descrivere situazioni e individuare caratteristiche di un fenomeno o di una situazione. Si tratta di un item a scelta multipla complessa.



ISBN 9788835123972

**D4.** **In figura sono rappresentati i grafici della posizione *s* (in km) in funzione del tempo *t* (in minuti) di due treni in moto rettilineo uniforme su due binari paralleli.**




**a.** **Basandoti sulle informazioni fornite nei grafici, indica se ciascuna delle seguenti affermazioni è vera (V) o falsa (F).**

| | | V | F |
|---|---|---|---|
| 1. | I due treni si muovono in versi opposti | ☐ | ☐ |
| 2. | Dopo circa 25 minuti dall'istante *t* = 0 i due treni passano per la stessa posizione nel sistema di riferimento scelto | ☐ | ☐ |
| 3. | Dopo 30 minuti dall'istante *t* = 0, uno dei due treni ha percorso circa 30 km | ☐ | ☐ |

*Fig. 2 – Item a domanda 4, 2017, G10*

L'item b invece consente di testare competenze di carattere argomentativo, il testo proposto è: "Anna afferma che, in uno stesso intervallo di tempo, i due treni percorrono la stessa distanza. Anna ha torto. Perché?". Osserviamo che lo studente non deve decidere se quanto afferma Anna è corretto o sbagliato, ma spiegare *perché* ha torto. Per fare ciò si può far riferimento a diverse osservazioni: nello stesso intervallo di tempo i due treni percorrono distanze diverse, i treni impiegano tempi diversi a percorrere la stessa distanza oppure le pendenze dei due segmenti sono diverse.

La scheda di lavoro costruita a partire da questa domanda ha visto immutato l'item b mentre l'item a si è reso argomentativo – in un'ottica di utilizzo dell'argomentazione come risorsa per la valutazione formativa – con



ISBN 9788835123972

il duplice scopo di attivare gli studenti come responsabili del proprio apprendimento e metterlo in luce.

Lasciando immutato il grafico posizione-tempo sono state formulate le seguenti domande:

– quale informazione puoi ricavare dai grafici per giustificare l'affermazione: "i due treni si muovono in versi opposti"?
– è vero che dopo circa 25 minuti dall'istante t = 0 i due treni passano per la stessa posizione nel sistema di riferimento scelto? Come fai a stabilirlo?

Procedere con questa prassi permette di far emergere i processi attivati dallo studente che diventano più facilmente oggetto di feedback da parte dei compagni e dell'insegnante.

"Luca afferma: 'dopo 30 minuti dall'istante t = 0, uno dei due treni ha percorso circa 30 km'. Luca ha ragione, perché/ Luca non ha ragione, perché".

In questo caso pronunciarsi su un'affermazione motivando la scelta fatta permette di sviluppare nello studente una maggiore consapevolezza del proprio ragionamento e valutarlo in termini di correttezza, chiarezza e completezza.

Comprendere e utilizzare diverse forme di rappresentazione, passando dall'una all'altra a seconda delle esigenze è il traguardo previsto dalla domanda 30 del fascicolo del 2017.

**D30. In una funzione del tipo $f(x) = ax + b$, il numero reale $a$ si dice *pendenza*. Inoltre si dice *zero* di una funzione $f$ ogni valore di $x$ per cui $f(x) = 0$.**
**Indica se ciascuna delle seguenti affermazioni è vera (V) o falsa (F).**

| | | V | F |
|---|---|---|---|
| **a.** | Lo zero della funzione $f(x) = x - 5$ è 5 | ☐ | ☐ |
| **b.** | Lo zero della funzione $f(x) = 3x$ è $-3$ | ☐ | ☐ |
| **c.** | Le funzioni del tipo $f(x) = b$, con $b \neq 0$, non hanno zeri | ☐ | ☐ |
| **d.** | Nelle funzioni del tipo $f(x) = b$, la pendenza è 0 | ☐ | ☐ |

*Fig. 3 – Domanda 30, 2017, G10*

Lo scopo della domanda è quello di verificare la comprensione del significato di pendenza, intercetta e di zero di una funzione lineare; è da notare che alcune definizioni vengono fornite nel testo a supporto dello studente. Si tratta di un quesito a scelta multipla complessa, come l'item a del quesito precedentemente trattato.



ISBN 9788835123972

Nella scheda di lavoro realizzata a partire da questa domanda è rimasto immutato lo stimolo iniziale con le definizioni a cui sono seguite le seguenti richieste:

– è vero che lo zero della funzione f(x) = x-5 è 5? E che lo zero di f(x) = 3x è -3? Come fai a stabilirlo?
– cosa puoi dire della seguente affermazione: le funzioni del tipo f(x) = b, con b ≠ 0, non hanno zeri?
– come spiegheresti a un compagno che nelle funzioni del tipo f(x)=b, la pendenza è 0?

È evidente che le prime due domande hanno gli stessi obiettivi delle domande che hanno caratterizzato la scheda descritta in precedenza, mentre la terza richiesta ha l'intento di attivare una delle cinque strategie con cui si può concretizzare la valutazione formativa ossia quella di attivare gli studenti come risorse – *virtuali* nella fase di lavoro individuale e poi *reali* mettendo a confronto le risposte durante la discussione – gli uni per gli altri.

## 3. Gli episodi salienti

In questo paragrafo verranno proposte e analizzate alcune risposte, relative alle schede presentate nella sezione precedente, fornite dagli studenti durante il lavoro individuale.

Per quanto riguarda l'analisi dei processi risolutivi verranno esaminati i comportamenti dei ragazzi e le loro argomentazioni.

Il metodo seguito permette di analizzare il lavoro sulle schede soggettivandolo; trovare gli errori e le risposte corrette è sicuramente più rapido, ma così facendo si trascurerebbe lo sforzo della persona e soprattutto non si capirebbero le difficoltà e le risorse (personali, o esterne) che ne permettono il superamento.

Il tutto è stato possibile sfruttando gli appunti presi in itinere durante la sperimentazione e adoperando le schede di lavoro svolte dagli studenti.

Facciamo riferimento alle riposte date alla domanda: "è vero che dopo circa 25 minuti dall'istante t = 0 i due treni passano per la stessa posizione nel sistema di riferimento scelto? Come fai a stabilirlo?".

Possiamo osservare che la modalità di formulazione della domanda permette effettivamente di studiare le diverse strategie attivate dagli studenti. C'è chi fa riferimento al grafico e si pronuncia positivamente (fig. 4, approccio 1), altri studenti dichiarano una possibile strategia algebrica senza però applicarla lasciando implicita la risposta (fig. 5, approccio 2), mentre taluni determinano le equazioni delle leggi orarie dei due treni ma non propongono



ISBN 9788835123972

alcuna strategia risolutiva e non si pronunciano in merito alla richiesta (fig. 6, approccio 3).

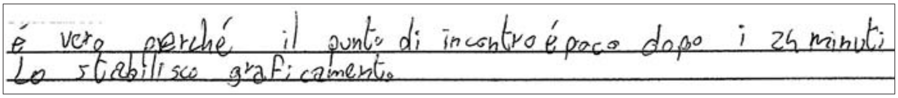



*Fig. 4 – Approccio 1*

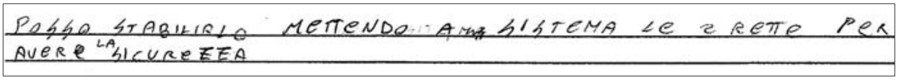



*Fig. 5 – Approccio 2*

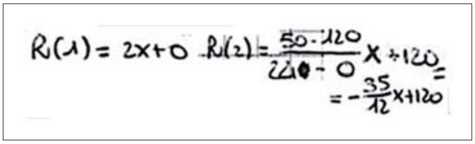



*Fig. 6 – Approccio 3*

Il momento di discussione in classe diventa l'occasione per mettere a confronto le diverse risposte date dagli studenti e attivare gli studenti come risorse gli uni per gli altri. Per esempio, l'approccio 2 e l'approccio 3 possono essere integrati giungendo per passi successivi a una soluzione condivisa.

Un'altra occasione nella quale aver scelto un'attività ad alto contenuto argomentativo ha permesso agli studenti di riflette in maniera più consapevole sul proprio ragionamento la si può riscontrare analizzando le risposte alla domanda: "come spiegheresti a un compagno che nelle funzioni del tipo f(x) = b, la pendenza è 0?".

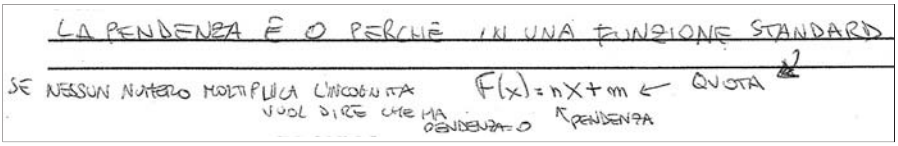



*Fig. 7 – Approccio 4*

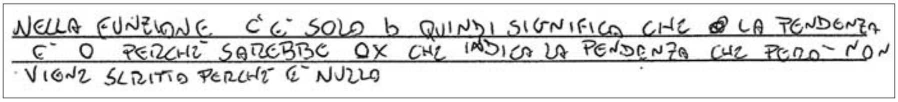



*Fig. 8 – Approccio 5*



ISBN 9788835123972

Come descritto nel paragrafo precedente, la domanda attivava a priori gli studenti come risorse *virtuali* gli uni per gli altri; mettere a confronto i due approcci durante la discussione diventa l'occasione *reale* perché l'approccio 5 potesse essere di supporto all'approccio 4 in termini di chiarezza e correttezza circa il "nessun numero" che in realtà è l'effetto della moltiplicazione "$0 \cdot x$" da cui segue che in $f(x) = b$ la pendenza è nulla.

## 4. Discussione e conclusioni

A posteriori lo schema dell'attività è risultato stabile ma rivisitabile in termini di possibilità di predisposizione di schede intermedie con il compito di monitoraggio in itinere durante la fase di lavoro individuale oppure attivare la discussione a partire dall'analisi di alcune risposte, tra quelle date dagli studenti, scelte ad hoc dal docente per proporre confronti più strutturati.

Potrebbe essere ripensata anche la fase finale relativa alla sintesi degli interventi ponderando meglio la condivisione e la chiarezza dei criteri di valutazione e degli obiettivi di apprendimento in modo da renderli duraturi e trasferibili in altre esperienze.

Al termine del percorso è risultato comunque evidente come le attività proposte, anche se migliorabili come appena esposto, siano state degli efficaci strumenti con i quali si è cercato di coniugare argomentazione e valutazione formativa.

La sperimentazione, quindi, può essere intesa come un tentativo di utilizzo delle prove INVALSI in ottica formativa per migliorare la propria azione didattica in una prospettiva di sviluppo delle competenze matematiche.

## Riferimenti bibliografici


Black P., Wiliam D. (2009), "Developing the theory of formative assessment. Educational Assessment", *Evaluation and Accountability*, 21, pp. 5-31.

Castoldi M. (2012), *Valutare a scuola*, Carocci, Roma.

Cusi A., Morselli F., Sabena C. (2016), "Enhancing formative assessment strategies in mathematics through classroom connected technology", in C. Csikos, A. Rausch, J. Szitanyi (*eds.*), *Proceeding of PME 40*, vol. 2, PME, Szeged, pp. 195-202.

Cusi A., Morselli F., Sabena C. (2017), "Promuovere strategie di valutazione formativa in matematica con le nuove tecnologie: l'esperienza del progetto FaSMEd", *Annali online della Didattica e della Formazione Docente*, 9, 14, pp. 91-107.




ISBN 9788835123972

INVALSI (2017a), *Guida alla lettura. Prova di matematica. Classe seconda – Scuola secondaria di secondo grado*, testo disponibile al sito: https://invalsi-areaprove.cineca.it/docs/file/2017-GUIDA-L10.pdf, data di consultazione 9/4/2021.
INVALSI (2017b), *Quadro di riferimento delle prove di matematica del Sistema Nazionale di Valutazione*, testo disponibile al sito: https://invalsi-areaprove.cineca.it/docs/file/QdR_MATEMATICA.pdf, data di consultazione 9/4/2021.
INVALSI (n.d.), *GESTINV 2.0, Archivio interattivo delle prove INVALSI*.
Morselli F., Sibilla A., Testera M. (2015), "Lo sviluppo delle competenze argomentative nella scuola secondaria di primo e secondo grado", in *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, Giovanni Battaglin Editore, Zenone degli Ezzelini (TV), pp. 548-565.
Stylianides A.J., Bieda K.N., Morselli F. (2016), "Proof and argumentation in mathematics education research", in A. Gutierrez, G.C. Leder, P. Boero (*eds.*), *The Second Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education*, Sense Publishers, Rotterdam, pp. 315-35.
Wiliam D., Thompson M. (2007), "Integrating assessment with instruction: What will it take to make it work?", in C.A. Dwyer (*ed.*), *The future of assessment: Shaping teaching and learning*, Lawrence Erlbaum Associates, London, pp. 53-82.



ISBN 9788835123972

# *Gli autori*

**Chiara Andrà** è ricercatrice in Didattica della Matematica presso l'Università del Piemonte Orientale. Si interessa della transizione dalla scuola secondaria all'università nei corsi di laurea di tipo scientifico, con un'attenzione particolare alle difficoltà in Matematica.

**Stefano Babini** insegna Matematica e Fisica. Appassionato di problem solving, comunicazione didattica e nuove tecnologie applicate alla didattica. Si occupa di processi di apprendimento e valutazione in vari contesti formativi e di sistema. Fa parte del gruppo di ricerca in didattica della Matematica Divertical-Math. Collabora da anni con INVALSI.

**Simone Banchelli**, docente di Matematica e Fisica di scuola secondaria di secondo grado. È esperto INVALSI per le prove di Matematica dal 2010.

**Michela Freddano** è Responsabile dell'Area 3 Valutazione delle scuole all'INVALSI, dove è ricercatrice dal 2013. Dottore di ricerca in Valutazione dei processi e dei sistemi educativi, dal 2020 è docente a contratto di Metodologia della ricerca azione. Colloquio clinico e intervista nei contesti organizzativi presso l'Università Telematica degli Studi IUL, e co-chair della Large Scale Cross-National Studies in Education SIG della Comparative and International Education Society.

**Rossella Garuti**, Dottorato di ricerca in Scienze metodologiche dell'educazione. Esperto INVALSI per le prove di Matematica dal 2008. Esperto sulla valutazione di progetti educativi sull'uso delle tecnologie (CNR). Membro della commissione sulle Indicazioni nazionali 2012 (MIUR).



ISBN 9788835123972

**Ivan Graziani** insegna Matematica e Scienze. Formatore in didattica della Matematica e sulla valutazione. Appassionato problem solving, innovazione e comunicazione didattica. Fa parte del Gruppo di Ricerca e Sperimentazione in Didattica della Matematica – Pisa (GRSDM) e del gruppo di ricerca Divertical-Math. Collabora da anni con UNIBO, INDIRE, INVALSI e con Mondadori-Rizzoli education.

**Rosa Iaderosa**, insegnante di Matematica, con esperienza nella scuola secondaria di primo e secondo grado. Ha svolto con continuità attività di ricerca didattica e formazione insegnanti, nonché docenze a contratto, collaborando con SISS e Università. Tali esperienze si sono svolte presso l'Università di Modena, il Politecnico di Milano, l'Università di Milano Bicocca e l'Università degli studi di Milano. Ha collaborato con INVALSI come autore. È membro attivo di ARMT internazionale.

**Nicoletta Nolli**, docente di Matematica e Fisica di scuola secondaria di secondo grado. È esperto INVALSI per le prove di Matematica dal 2010.

**Stefania Pancanti** è insegnante di Matematica e Informatica; ha conseguito un Dottorato di ricerca in Didattica della Matematica presso l'Università di Firenze; fa parte del Gruppo di Ricerca in Didattica della Matematica dell'Università di Pisa e ha avuto diversi incarichi nell'ambito del Piano Nazionale Lauree Scientifiche.

**Simone Quartara**, insegnante di Matematica, laureato in Didattica della Matematica. Collaboratore all'interno del Piano lauree scientifiche del Dipartimento di Matematica di Genova e vicepresidente dell'Associazione ligure per l'insegnamento della Matematica.



ISBN 9788835123972

ISBN 9788835123972

La letteratura è ricca di argomentazioni a favore della Matematica, una disciplina affascinante e variegata che abbraccia molte aree di studio. Studiare Matematica permette di sviluppare capacità per trovare soluzioni a vari problemi in situazioni quotidiane. Nel presente volume sono raccolti alcuni lavori che ricercatori e insegnanti hanno dedicato alla didattica della Matematica e che sono stati presentati durante il IV Seminario "I dati INVALSI: uno strumento per la ricerca e la didattica", tenutosi a Roma dal 29 novembre al 1 dicembre 2019. I 6 capitoli forniscono esempi di come il confronto tra idee ed esperienza dia vita a progetti concreti per migliorare l'azione didattica.

**Patrizia Falzetti** è Responsabile del Servizio Statistico dell'INVALSI, che gestisce l'acquisizione, l'analisi e la restituzione dei dati riguardanti le rilevazioni nazionali e internazionali sugli apprendimenti alle singole istituzioni scolastiche, agli *stakeholders* e alla comunità scientifica.

FrancoAngeli
La passione per le conoscenze

ISBN 9788835123972