TECNICHE DI APPRENDIMENTO DELLA MATEMATICA

V Seminario "I dati INVALSI: uno strumento per la ricerca e la didattica"

a cura di
Patrizia Falzetti

FrancoAngeli

INVALSI

INVALSI PER LA RICERCA
STUDI E RICERCHE

INVALSI PER LA RICERCA

La collana Open Access INVALSI PER LA RICERCA si pone come obiettivo la diffusione degli esiti delle attività di ricerca promosse dall'Istituto, favorendo lo scambio di esperienze e conoscenze con il mondo accademico e scolastico.
La collana è articolata in tre sezioni: "Studi e ricerche", i cui contributi sono sottoposti a revisione in doppio cieco, "Percorsi e strumenti", di taglio più divulgativo o di approfondimento, sottoposta a singolo referaggio, e "Rapporti di ricerca e sperimentazioni", le cui pubblicazioni riguardano le attività di ricerca e sperimentazione dell'Istituto e non sono sottoposte a revisione.

 ISBN 9788835151814

TECNICHE DI APPRENDIMENTO DELLA MATEMATICA

V Seminario "I dati INVALSI: uno strumento per la ricerca e la didattica"

a cura di
Patrizia Falzetti

INVALSI

FrancoAngeli

Le opinioni espresse in questi lavori sono riconducibili esclusivamente agli autori e non impegnano in alcun modo l'Istituto. Nel citare i contributi contenuti nel volume non è, pertanto, corretto attribuirne le argomentazioni all'INVALSI o ai suoi vertici.

Indice

Introduzione

di Patrizia Falzetti

La Matematica è presente ovunque nel nostro quotidiano, l'utilizzo delle cifre e dei numeri ci accompagna dalla nostra nascita e ci aiuta a capire il mondo che ci circonda. Eppure, spesso le materie scientifiche e tecnologiche sono rivestite da due preconcetti: che abbiano un'aurea poco attraente e che i maschi ottengano risultati migliori rispetto alle femmine. In generale la difficoltà di apprendimento può essere legata al fatto che la Matematica rappresenta un linguaggio astratto che deve essere tradotto in un campo pratico. Leggendo i dati dello studio PISA 2012, Andreas Schleicher, direttore del progetto PISA, affermò che l'insegnamento in molti Paesi (come Italia e Spagna) si concentra troppo "sulla riproduzione delle conoscenze" e non nella risoluzione di casi pratici. Una critica, dunque, a un modello educativo troppo centrato sulla ripetizione e memorizzazione piuttosto che sulla comprensione e riflessione. All'interno di questo volume sono raccolte delle ricerche, presentate in occasione del V Seminario "I dati INVALSI: uno strumento per la ricerca e la didattica" (Roma, 25-28 febbraio 2021), che sperimentano nuove tecniche per facilitare l'apprendimento della Matematica. Gli autori del primo capitolo, non entrano direttamente nel tema degli stereotipi di genere, ma si collegano a esso effettuando una ricerca per verificare se ci siano alcune tipologie di item che possano in qualche modo favorire i maschi o le femmine e anche se ci siano errori più tipici per un genere rispetto all'altro nei diversi ordini scolastici osservati. Rispetto al tema della crisi motivazionale verso la Matematica i capitoli restanti offrono diversi spunti di riflessione. Nel secondo capitolo viene presentato un progetto che si basa sulla percezione che lo studente ha in relazione alle proprie competenze, al livello di autostima e alla motivazione nei confronti della Matematica. Argomento del terzo capitolo è, invece, GeoSkills. Un'attività integrata con "Geometriko" – un progetto di ricerca nato nel 2014 con lo scopo di rendere più accattivante e innovativo lo studio della Geometria piana. Nel quarto capitolo l'interrogativo che gli autori si pongono è: quali sono le strategie che gli studenti mettono in atto quando si trovano a dover rispondere a un quesito? Quali competenze mettono in azione di fronte a una domanda a risposta multipla per trovare la risposta esatta e cosa li porta invece a scegliere quella sbagliata? Per rispondere conducono una ricerca verticale tra il primo e il secondo ciclo di istruzione. La ricerca presentata nel capitolo conclusivo coinvolge degli studenti di II primaria in due anni consecutivi. Nella prima fase sono stati sollecitati con giochi di movimento, manipolazione e osservazione a riconoscere figure simmetriche in vari contesti. Nella seconda, sono state proposte agli stessi alcune domande INVALSI relative al concetto di simmetria. L'intento di questa fase è stato da un lato quello di confrontare le risposte nazionali con le risposte dei bambini oggetto della sperimentazione e dall'altro di indagare le loro argomentazioni per la scelta delle risposte. L'augurio è che le ricerche proposte all'interno del volume possano essere un punto di partenza per nuove indagini all'interno del mondo scolastico e punto di riferimento per coloro che vogliono approfondire la tematica trattata anche attraverso i dati INVALSI.

1. Adamo & Eva in Matematica: miti, stereotipi e convinzioni. Ma è tutto vero?

di Ivan Graziani, Stefano Babini, Chiara Saletti

Ci sono diversi miti relativi alle performance in Matematica tra maschi e femmine che sono stati già sfatati da varie ricerche. Anche gli stereotipi portati avanti dalle pubblicità, da alcuni giochi in scatola e dai libri di testo tendono a distinguere il mondo femminile da quello maschile fin dalla tenera età.

Alcune convinzioni vengono ancora tramandate per cui i maschi sarebbero più portati per la Matematica e le materie scientifiche in genere, e varie campagne hanno lavorato per sfatarlo, mentre le femmine sarebbero più brave nelle materie letterarie e umanistiche.

Con la nostra ricerca non vogliamo entrare in queste disquisizioni, già ampiamente trattate, ma abbiamo voluto trovare delle domande particolari, alcune con ruoli stabiliti in base agli stereotipi e altre in cui queste figure non erano ben delineate, ma dove l'esperienza comune sembrerebbe a priori favorire un sesso rispetto all'altro.

Per fare questo, abbiamo condotto una ricerca in verticale, tra il primo e il secondo ciclo, per vedere come risposte a quesiti anche all'apparenza facili potessero nascondere insidie che potessero facilitare femmine o maschi.

Abbiamo quindi selezionato dieci domande, tramite il sito Gestinv 3.0 (www.gestinv.it), e assemblato un modulo Google che poi è stato somministrato online tramite un link, e soprattutto grazie alla collaborazione di docenti di varie parti d'Italia, a studenti delle classi quinte di scuola primaria, delle classi terze di scuola secondaria di I grado e terze degli istituti secondari di II grado, con diversi indirizzi di licei, tecnici e professionali.

Per la struttura tipica dei moduli di Google nel nostro lavoro abbiamo considerato soprattutto domande a risposta univoca o multipla e, in base a quanto contenuto nelle Indicazioni nazionali per il primo ciclo e nel Quadro di riferimento Matematica INVALSI, principalmente i quesiti che riguardavano le dimensioni di "Conoscere" e "Risolvere problemi".

Lo scopo della nostra ricerca è quello di verificare se ci siano alcune tipologie di item, che possano in qualche modo favorire i maschi o le femmine e anche se ci siano errori più tipici per un sesso rispetto all'altro nei diversi ordini scolastici osservati.

There are several myths about male and female performance in mathematics that have already been debunked by various researches. Even the stereotypes carried out by advertisements, some box games and textbooks tend to distinguish the female world from the male world from an early age.

Some beliefs are still handed down that males would be better suited to mathematics and science in general, and various campaigns have worked to debunk this, while females would be better at literary and humanistic subjects.

With our research we don't want to enter into these disquisitions, which have already been dealt with extensively, but we wanted to find particular questions, some with roles established on the basis of stereotypes and others in which these figures were not well outlined, but where common experience would seem to favour one sex over the other.

To do this, we conducted a vertical research, between the first and the second cycle, to see how answers to questions, even apparently easy ones, could hide dangers that could facilitate females or males.

We then selected eight questions, through the Gestinv 3.0 website (www.gestinv.it), and assembled a google form which was then administered online through a link, and above all thanks to the collaboration of teachers from various parts of Italy, to students in the fifth grade primary school classes, the third grade secondary school classes and the third grade secondary school classes, with different high school, technical and professional addresses.

Due to the typical structure of Google's Modules, in our work we have mainly considered single or multiple-choice questions and, according to what is contained in the National Indications for the first cycle and in the INVALSI Reference Framework, mainly the questions concerning the dimensions of "Knowing" and "Solving problems".

The purpose of our research is to check whether there are some types of items, which may in some way favour males or females and also whether there are more typical errors for one sex than the other in the different school orders observed.

1. Introduzione

Negli ultimi anni, il tema delle differenze di genere è stato oggetto di numerosi studi condotti da diversi punti di vista. Altrettanto numerose sono anche le teorie che non rientrano propriamente nella didattica ma che appartengono alla sociologia e alla psicologia. Proprio in quest'ultimo settore si è focalizzata l'attenzione sulle difficoltà di apprendimento della Matematica delle ragazze legando i minori risultati a fattori di tipo affettivo e psicologico come l'ansia e la sicurezza in se stessi (Lindberg *et al.*, 2010; Primi *et al.*, 2014).

Puntualmente, da alcuni anni nel mese di luglio in concomitanza con la pubblicazione del Rapporto Prove INVALSI, i quotidiani scrivono articoli sul precario stato di salute della scuola italiana con titoli di grande effetto: "Italiano questo sconosciuto: studenti sempre più ignoranti. Male anche in Matematica", 10/07/2019[1]; "Scuola: all'INVALSI male gli studenti in Matematica e Inglese, divario fra Nord e Sud", 10/07/2019[2]; "Dati INVALSI 2019: male in Matematica alla primaria (al sud), migliora l'Inglese. Alla secondaria risultati bassi in Italiano [SPECIALE]", 10/07/2019[3]; "Prove INVALSI 2019: studenti calabresi "ciucci" in Matematica e italiano", 10/07/2019[4].

Ultimamente, poi, l'attenzione mediatica si sofferma sempre più spesso sulle differenze delle competenze raggiunte nelle varie materie fra maschi e femmine, mettendo in evidenza come le femmine siano più portate per le materie umanistiche, mentre i maschi abbiano una naturale attitudine per la Matematica. Tuttavia, come è emerso anche dall'indagine OCSE PISA 2018, le aspettative dei ragazzi e delle ragazze sul loro futuro continuano a essere influenzate da stereotipi impliciti basati su pregiudizi senza riscontri scientifici.

Lo scopo della nostra ricerca è stato quello di indagare come, a partire dalla quinta primaria fino alla quarta secondaria di II grado, le studentesse e gli studenti abbiano affrontato alcuni item che, sia per la tipologia testuale presentata, sia per la situazione proposta, appartengono più propriamente all'universo femminile piuttosto che a quello maschile e viceversa.

[1] https://www.ilprimatonazionale.it/primo-piano/italiano-sconosciuto-studenti-sempre-piu-ignoranti-male-Matematica-124119/.

[2] https://www.fanpage.it/attualita/scuola-allinvalsi-male-gli-studenti-in-matematica-e-inglese-divario-tra-nord-e-sud/.

[3] https://www.orizzontescuola.it/dati-invalsi-2019-male-in-Matematica-alla-primaria-al-sud-migliora-linglese-alla-secondaria-risultati-bassi-in-italiano-speciale/.

[4] https://lacnews24.it/cultura/prove-invalsi-2019-calabria-risultati-bassi-Matematica-italiano_92787/.

2. L’annosa questione di Adamo ed Eva

L’introduzione, a livello internazionale, di prove standardizzate (PISA, promosse dall’Organisation for Economic Co-operatione and Development – OECD; TIMMS promosse dall’International Association for Evaluation of Educational Achievement – IEA), ha permesso di studiare le diverse performance di maschi e femmine, anche confrontando Paesi con culture e sistemi di istruzione molto diversi.

A dicembre 2020, INVALSI ha reso noti i risultati dell’ultima indagine TIMSS, il *Trends in International Mathematics and Science Study*, e IEA, International Association for the Evaluation of Educational Achievement, relativa al 2019.

Dalla *Sintesi dei risultati degli studenti italiani in Matematica e Scienze – TIMSS 2019*, pubblicata su INVALSIopen[5] apprendiamo alcune informazioni utili alla nostra riflessione, soprattutto per quanto riguarda le differenze di genere.

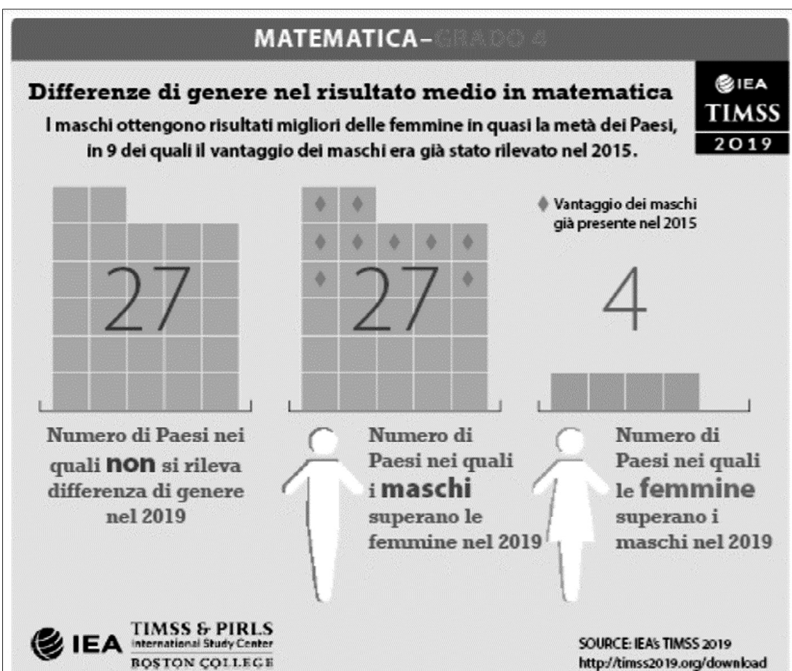


Fig. 1 – Differenze di genere in Matematica – Grado 4

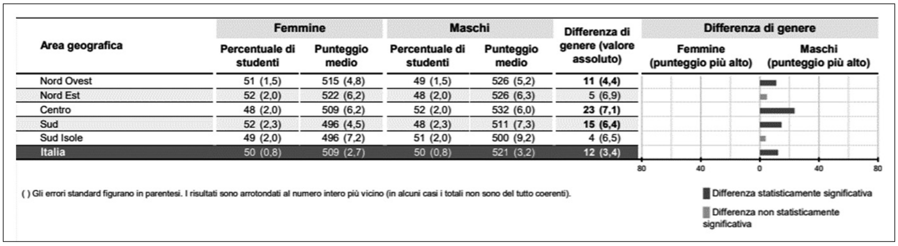
Fonte: IEA, TIMSS 2019

5 https://www.invalsiopen.it/.

Infatti, in quasi la metà dei 58 Paesi partecipanti, i bambini al quarto anno di scolarità hanno ottenuto risultati medi superiori a quelli delle bambine. Solo in 4 Paesi, 2 dei quali arabi e nessuno europeo, le bambine hanno ottenuto risultati medi più elevati rispetto ai bambini; in 27 Paesi vi è stata parità di genere nella media dei risultati in Matematica mentre in altrettanti 27 Paesi i bambini hanno ottenuto risultati medi più elevati rispetto alle bambine e in 9 di questi il vantaggio dei maschi era già stato rilevato nel 2015 (fig. 1).

In Italia la differenza di genere in Matematica è a favore dei maschi che ottengono il punteggio medio di 521 punti contro i 509 delle femmine, con un vantaggio di 12 punti sulla scala.

"Nei risultati disaggregati per area geografica (fig. 2), si osserva che nel Nord Est e Sud Isole le differenze tra maschi e femmine non sono statisticamente significative. Anche il Sud, sebbene la differenza di genere permanga significativa a vantaggio dei maschi, oggi presenta un'incidenza più contenuta (pari a 15 punti di differenza in TIMSS 2019) rispetto al precedente ciclo di indagine (24 punti di differenza in TIMSS 2015). La stessa situazione si osserva in media nelle scuole del Nord Ovest dove, sebbene la differenza di genere sia ancora significativa, l'attuale svantaggio delle femmine (-11 punti, nel 2019) risulta comunque dimezzato rispetto al 2015, quando in media 23 punti separavano le performance di bambini e bambine (fig. 2). Il Centro rappresenta un caso anomalo rispetto a questa tendenza e oggi è l'area geografica con la maggiore incidenza della differenza di genere sulla media nazionale (23 punti a favore dei maschi, 18 punti nel 2015)" (TIMSS 2019 – invalsiopen.it).



Area geografica	Femmine		Maschi		Differenza di genere (valore assoluto)
	Percentuale di studenti	Punteggio medio	Percentuale di studenti	Punteggio medio	
Nord Ovest	51 (1,5)	515 (4,8)	49 (1,5)	526 (5,2)	**11 (4,4)**
Nord Est	52 (2,0)	522 (6,2)	48 (2,0)	526 (6,3)	5 (6,9)
Centro	48 (2,0)	509 (6,2)	52 (2,0)	532 (6,0)	**23 (7,1)**
Sud	52 (2,3)	496 (4,5)	48 (2,3)	511 (7,3)	**15 (6,4)**
Sud Isole	49 (2,0)	496 (7,2)	51 (2,0)	500 (9,2)	4 (6,5)
Italia	50 (0,8)	509 (2,7)	50 (0,8)	521 (3,2)	**12 (3,4)**

( ) Gli errori standard figurano in parentesi. I risultati sono arrotondati al numero intero più vicino (in alcuni casi i totali non sono del tutto coerenti).

Fig. 2 – Differenze di genere in Matematica per macro-area geografica – Grado 4

Per quanto riguarda il grado 8, "a livello internazionale in 26 Paesi non si evidenziano differenze di genere statisticamente significative tra maschi e femmine (fig. 3). In 7 Paesi tale differenza è a favore delle femmine e in 6 Paesi, tra cui l'Italia, la differenza è a favore dei maschi" (TIMSS 2019 – invalsiopen.it).

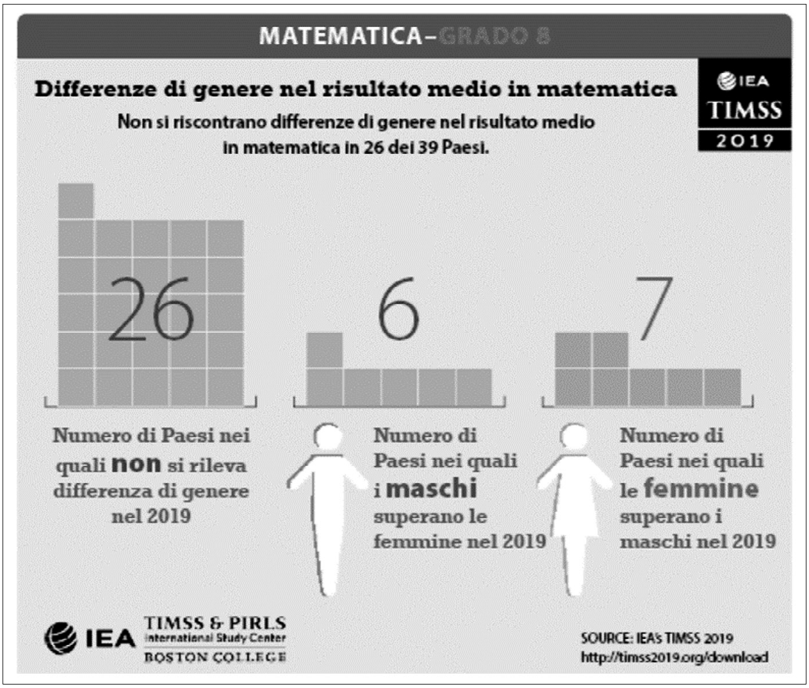


Fig. 3 – Differenze di genere in Matematica – Grado 8

Fonte: IEA, TIMSS 2019

"In Italia la differenza nel rendimento a favore dei maschi è di 12 punti, una delle più alte. Nelle aree del Paese (fig. 4), i ragazzi superano le ragazze nel Nord Est (15 punti); Centro e Sud (17 punti). Nel Nord Ovest e nel Sud Isole non sono emerse differenze significative. Ad eccezione di TIMSS 2007, dove non sono emerse differenze di genere, sia nelle rilevazioni precedenti che in quelle successive i ragazzi hanno superato le ragazze. A partire da TIMSS 2011 (fig. 8) le ragazze hanno mostrato una certa stabilità dei risultati, mentre i ragazzi hanno avuto una flessione nel 2015 con una ripresa nel 2019 tornando ai livelli del 2011" (TIMSS 2019 – invalsiopen.it).

La situazione italiana descritta dai dati delle Rilevazioni internazionali è una delle più allarmanti: l'Italia risulta uno dei Paesi in cui il gender gap è maggiormente marcato e il divario di genere in Matematica viene confermato anche dalle prove INVALSI.

Area geografica	Femmine		Maschi		Differenza di genere (valore assoluto)
	Percentuale di studenti	Punteggio medio	Percentuale di studenti	Punteggio medio	
Nord Ovest	52 (1,9)	512 (5,4)	48 (1,9)	523 (6,0)	11 (6,3)
Nord Est	46 (2,5)	504 (5,3)	54 (2,5)	518 (5,0)	**15** (5,2)
Centro	48 (1,6)	487 (6,5)	52 (1,6)	503 (6,2)	**17** (5,8)
Sud	50 (2,3)	476 (7,2)	50 (2,3)	493 (6,9)	**17** (6,1)
Sud Isole	51 (2,2)	470 (5,9)	49 (2,2)	469 (9,9)	0 (8,7)
Italia	50 (1,0)	491 (3,0)	50 (1,0)	504 (3,3)	**12** (3,0)

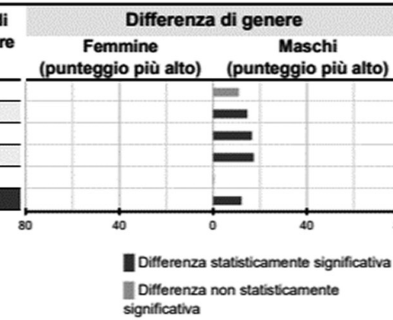


Fig. 4 – Differenze di genere in Matematica per macro-area geografica – Grado 8

Vista la risonanza mediatica e l'enorme mole di dati in possesso l'uso delle prove nel campo della ricerca didattica è ancora limitato (Maffia e Giberti, 2016) e per quanto riguarda lo studio delle differenze di genere, soprattutto in Matematica, i dati vengono usati quasi esclusivamente sul piano statistico. Manca un'interpretazione in chiave didattica del fenomeno a livello nazionale.

È da qui che dovrebbe ripartire una riflessione generale, che coinvolga docenti, ma non solo, psicologi, sociologi, editori per affrontare seriamente e serenamente questo problema.

3. Quali sono le cause del gender gap e dove vanno ricercate?

La letteratura è molto ampia e dibattuta sull'individuazione dei fattori che sono alla base del gender gap: si possono trovare interpretazioni di natura psicologica, biologica, sociale e culturale, che vanno considerate congiuntamente. Nello specifico si possono trovare fattori cosiddetti interni, o dipendenti dall'individuo fra cui i *bias cognitivi* spesso inconsci, e fattori esterni riconducibili al contesto socio-culturale e ambientale. Per esempio, quando le bambine entrano per la prima volta nella scuola dell'infanzia, il divario di genere in Matematica non esiste, ma poi inizia ad ampliarsi quando entrano in gioco l'insegnante e le aspettative di sé. È lo stesso *bias di genere* o pregiudizio che porta le donne a sottovalutare le loro capacità quando viene chiesto loro il voto ottenuto nei compiti di Matematica a scuola, mentre gli uomini sovrastimano il loro punteggio.

Libri e testi scolastici svolgono *in primis* una funzione importante nello sviluppo culturale delle bambine e dei bambini. Storie in cui emergono protagonisti maschili coinvolti in attività avventurose e figure femminili assenti, di secondo piano o dedite solo alla cura della casa, non fanno che perpetrare alcuni stereotipi e rafforzare *bias cognitivi*. Lo stesso effetto è quello dei giochi che vengono loro proposti: le classiche costruzioni per i maschi e le bambole per le femmine assegnano a uomini e donne ruoli e hobby che possono influenzare e modellare l'idea dei ruoli sin dalla prima infanzia.

4. Le fasi di lavoro

4.1. Ricerca dei quesiti in coerenza con il nostro intento

L'intento principale del nostro lavoro è stato quello di analizzare l'andamento di alcune domande con differenti livelli di difficoltà e in verticale, ma anche con connotazioni particolari riferite ai cosiddetti universi e modelli maschili e femminili. Lo scopo è stato quello di vedere se alcuni stereotipi testuali potevano in qualche modo condizionare le risposte degli studenti di diversi gradi scolastici.

Per tale motivo la nostra ricerca si è orientata soprattutto verso quei quesiti che avevano già riscontrato particolari difficoltà anche nel campione nazionale quando erano stati somministrati.

Come nostra consuetudine abbiamo deciso di proporre in diversi gradi scolastici, a partire dalla quinta primaria fino alla seconda secondaria di II grado, gli item che più si adattavano alla nostra ricerca, costruendo un unico fascicolo che abbiamo somministrato online tramite un modulo Google a tutti gli studenti di tutti gli istituti indipendentemente dal grado scolastico.

4.2. Composizione del fascicolo

Per l'analisi e la successiva scelta degli item funzionali al nostro studio incentrato sulla ricerca di strategie e tipologie di errori differenti tra maschi e femmine, in base a quanto contenuto nelle Indicazioni nazionali per il primo ciclo e nel Quadro di riferimento INVALSI, abbiamo utilizzato il sito GESTINV 3.0, focalizzando principalmente la nostra ricerca su domande a risposta univoca o multipla e orientate verso abitudini di vita più propriamente maschili e/o femminili.

La scelta ha visto prevalere le dimensioni di "Conoscere" e "Risolvere problemi".

Una volta definito il numero degli item e la tipologia abbiamo creato il nostro fascicolo e, una volta assemblato, lo abbiamo caricato su un modulo Google e diffuso tra i colleghi delle scuole toscane e emiliano-romagnole attraverso un link.

Il fascicolo si compone di dieci domande afferenti ai diversi ambiti Numeri, Relazioni e funzioni e Dati e previsioni destinate ai gradi 5, 6, 8 e 10.

4.3. Scelta del campione

Il campione scelto, trattandosi di uno studio in verticale, è formato da studenti di scuola primaria e secondarie di I e II grado di Toscana ed Emilia-Romagna.

Il momento particolare che la scuola sta affrontando a causa dell'emergenza Covid ha fatto sì che la collaborazione dei docenti somministratori si sia rivelata molto proficua per la nostra ricerca.

Gli studenti coinvolti sono stati in totale 1.111.

Dei 121 studenti della quinta primaria, 25 appartengono a una classe di un comprensivo di Firenze con un background familiare alto, i cui esiti nella prova di Matematica del maggio 2021 hanno visto una differenza nei risultati rispetto a classi/scuole con background familiare simile pari a 17,7 e un esito degli studenti al netto del cheating nella stessa scala del Rapporto nazionale di 248,2. Si tratta di una classe che fin dalla prima ha avuto la continuità di un docente che insegna Italiano e Matematica e che da anni lavora sul problem solving e sull'argomentazione in Matematica.

I restanti 96 studenti appartengono rispettivamente a 2 quinte primarie di un comprensivo di Bologna entrambe con ESCS medio e medio basso con risultati generali nelle prove standardizzate in linea o leggermente al di sotto delle medie di riferimento; le altre 2 quinte primarie fanno parte di un comprensivo della provincia di Forlì-Cesena con un ESCS medio e medio alto e con risultati nelle prove standardizzate generalmente in linea con le medie di riferimento. In queste quattro quinte primarie vi è stata una buona stabilità dei docenti di Matematica che pur privilegiando una didattica di tipo trasmissivo-frontale hanno lasciato spazio alle attività laboratoriali e al problem solving.

In generale, a livello di scuola primaria per le classi interessate nella nostra ricerca abbiamo notato l'utilizzo da parte dei docenti di metodologie didattiche attive cioè quelle pratiche in cui lo studente è al centro del processo di apprendimento, nel quale svolge un ruolo attivo nella dinamica di costruzione della propria conoscenza, con azioni che gli consentono l'elaborazione attiva e costruttiva dei contenuti di apprendimento, lo sviluppo del pensiero procedurale e la sua integrazione col pensiero dichiarativo e teorico.

Gli studenti delle 8 classi terze di secondaria di I grado coinvolti sono stati 168. Due classi appartengono a un comprensivo di Santa Sofia nella provincia di Forlì-Cesena con un background familiare medio-basso e medio, i cui risultati generalmente si attestano in linea con le medie di riferimento. Da rilevare la presenza di un docente di Matematica che lascia ampio spazio al problem solving. Le altre 4 classi di secondaria di I grado appartengono rispettivamente 2 a un comprensivo nella provincia di Pistoia con un ESCS medio-alto, mentre le rimanenti a un comprensivo della provincia di Pisa con ESCS alto: i risultati delle quattro classi nelle prove standardizzate risultano in linea con le medie di riferimento. I docenti seguono una metodologia didattica di tipo trasmissivo, lasciando poco spazio all'argomentazione.

Il numero degli studenti che frequentano le classi seconde e quarte della scuola secondaria di II grado è di 822. Nello specifico abbiamo attinto da due licei scientifici di Forlì e Bologna, un liceo artistico di Parma e un linguistico di Cesena. Per quanto riguarda gli istituti tecnici e professionali, che appartengono alle province di Pisa, Bologna e Forlì, gli studenti del campione frequentano nel primo caso l'indirizzo commerciale e tecnologico, mentre nel secondo l'indirizzo è meccanico e alberghiero. L'indice ESCS delle classi campione per la secondaria di II grado è generalmente medio-alto per i licei e medio e medio-basso per gli istituti tecnici e professionali.

Le classi seconde della secondaria di II grado analizzate sono state 6 per il liceo scientifico, 1 per il liceo artistico, 1 per il liceo linguistico, 10 per l'istituto tecnico e 4 per l'istituto professionale, per un totale di 22 classi. Le classi quarte della secondaria di II grado analizzate sono state 8 per il liceo scientifico, 1 per il liceo artistico, 1 per il liceo linguistico, 6 per l'istituto professionale e 4 per l'istituto tecnico.

Nel complesso gli studenti delle classi seconde della secondaria di II grado sono 427, mentre quelli delle classi quarte sono 395.

4.4. Somministrazione fascicolo

Il fascicolo è stato somministrato direttamente e individualmente agli studenti in un periodo compreso fra settembre 2020 e gennaio 2021, durante l'orario di lezione con date scelte liberamente dai docenti delle classi coinvolte.

La restituzione delle risposte è avvenuta contestualmente all'invio del Modulo da parte degli studenti coinvolti. Ciò ha reso possibile a noi avere un quadro immediato della situazione in base alle classi e alla tipologia di istituzione scolastica coinvolta; ma al tempo stesso ha consentito ai docenti coinvolti un'analisi in tempi brevi delle risposte date dai propri studenti e un successivo momento di discussione e condivisione dei risultati emersi con la classe, spunto di riflessione per eventuali manovre correttive da attuare nel corso dell'anno scolastico.

4.5. Analisi dei risultati ottenuti (confronto in verticale)

La correzione del fascicolo, l'analisi dei dati ottenuti e delle discussioni tenutesi a seguito dell'attività svolta all'interno di alcune delle classi interessate, ha fatto sì che concentrassimo la nostra attenzione e conseguentemente la nostra ricerca proprio sugli aspetti più significativi, legati a particolari procedimenti risolutivi e che ci focalizzassimo anche sulle diverse tipologie di errori riconducibili a situazioni e consuetudini propriamente attribuibili agli universi femminili e maschili.

Particolarmente utili si sono dimostrati i momenti di condivisione e ridiscussione del fascicolo nelle classi coinvolte, durante i quali sono emersi i diversi approcci risolutivi, le strategie messe in atto dagli studenti e gli errori commessi, questi ultimi sostanzialmente collegabili o imputabili all'inesperienza da parte dei maschi a compiere attività rivelatesi più familiari per le femmine e viceversa.

L'analisi delle percentuali delle risposte corrette ed errate per ogni item, ha fatto sì che ci concentrassimo non solo sull'analisi degli errori in generale ma in particolare per ognuno dei quesiti abbiamo preso in considerazione la tipologia di errori commessi nei diversi gradi di scuola e dai due sessi. Infine, abbiamo poi selezionato i cinque quesiti che avevano avuto i risultati più significativi.

Primo item: Percentuali

Il primo quesito, uscito nella prova di grado 10 del 2017, è composto da due item ed è relativo all'ambito Dati e previsioni (fig. 5).

Abbiamo deciso di proporlo anche ai gradi inferiori perché pur chiedendo di estrapolare dati percentuali da una tabella, a nostro avviso, il fatto che fossero percentuali non precludeva a nessuno, neppure a studenti di quinta primaria, la possibilità di rispondere correttamente.

Infatti, i risultati ottenuti hanno confermato questa nostra ipotesi: anche nella scuola primaria le risposte corrette sono significativamente migliori rispetto al campione nazionale.

Nel campione nazionale INVALSI, di grado 10, per i due item, a e b, si erano registrati i seguenti risultati (tab. 1).

Tab. 1 – Risultati del campione INVALSI di grado 10 nel 2017

Item	*Risposte corrette*	*Risposte errate*	*Risposte mancanti*
a	52,7%	27,8%	19,5%
b	57,2%	21,6%	21,2%

D29. **Una fabbrica utilizza due diverse macchine M_1 e M_2 che lavorano indipendentemente l'una dall'altra. Ciascuna delle due macchine produce chiavette USB da 16 GB e da 32 GB nelle percentuali descritte dalla seguente tabella.**

	chiavette USB da 16 GB	chiavette USB da 32 GB	Totale
M_1	18%	42%	60%
M_2	22%	18%	40%
Totale	40%	60%	100%

a. **Qual è la probabilità di estrarre dalla produzione della fabbrica una chiavetta da 16 GB prodotta da M_1?**

Risposta: .... %

b. **Qual è la probabilità che una chiavetta USB estratta dalla produzione della fabbrica sia da 16 GB?**

Risposta: .... %

Fig. 5 – Quesito di grado 10 del 2017

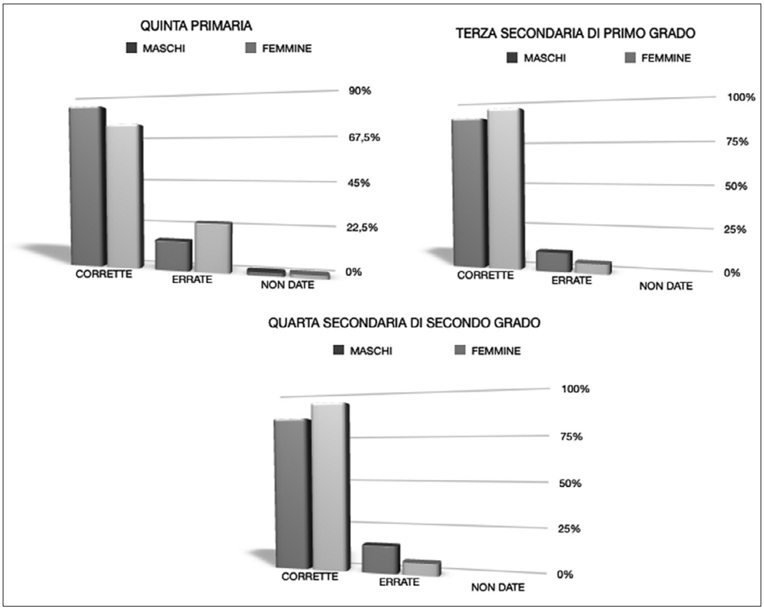


Fig. 6 – Grafici di confronto tra i tre ordini di scuola del nostro campione per l'item a

Gli esiti del nostro campione per l'item 1a (fig. 6) mettono in evidenza che solo nella scuola primaria i maschi hanno ottenuto risultati migliori rispetto alle femmine. Ciò può dipendere dal fatto che a quell'età i maschi sono in genere un po' più propensi a "provare a rispondere", strategia risolutiva quasi sconosciuta per le femmine che preferiscono di gran lunga scegliere l'opzione "non lo so fare" andando così ad aumentare la percentuale delle risposte errate.

Per quanto riguarda l'item 1b riportiamo in seguito (fig. 7) i risultati del nostro campione.

Anche in questo secondo item l'andamento nei vari gradi di scuola è stato analogo alla risposta precedente. Solo nelle quinte primarie i maschi hanno avuto una percentuale di risposte corrette più alta rispetto alle femmine. Sulla base delle discussioni avvenute nelle classi della primaria è emersa la tendenza da parte dei maschi di provare a dare una risposta, tentando di indovinare la risposta esatta là dove vi fosse incertezza. Infatti, nel momento in cui veniva richiesto ai maschi di argomentare il procedimento seguito per giungere alla risposta data, in molti hanno risposto "ho tirato a indovinare!".

Le femmine, invece, hanno preferito confermare anche in fase di condivisione degli elaborati di non saper fare il calcolo richiesto.

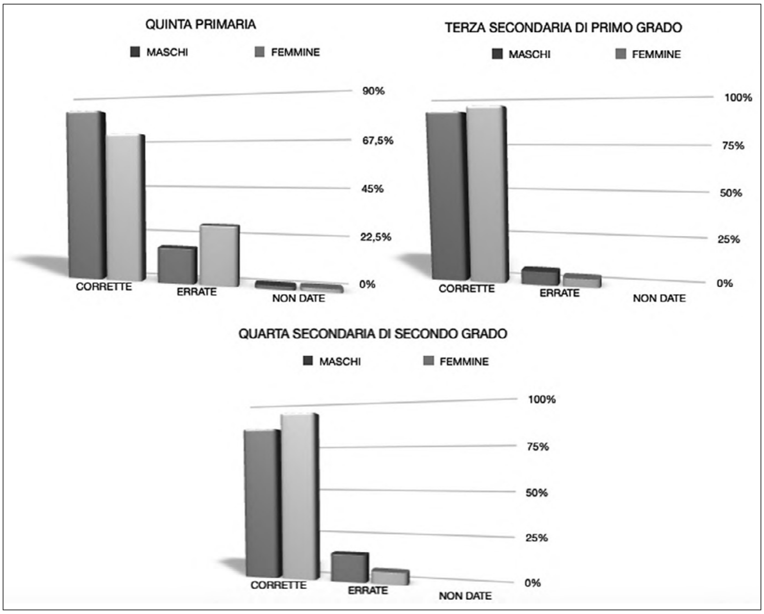


Fig. 7 – Grafici di confronto tra i tre ordini di scuola del nostro campione per l'item b

Secondo item: Testa o croce?

L'ambito del secondo quesito, composto da due item, è sempre Dati e previsioni. Si tratta di un quesito uscito nella prova del grado 8 del 2011 (fig. 8).

D11. Per scegliere chi deve lavare i piatti del pranzo, Marco, Lorenzo e Livia decidono di lanciare due volte una moneta da 1 euro come quella che vedi in figura:

Testa **Croce**

Stabiliscono che:

- **se verranno 2 croci, laverà i piatti Marco;**
- **se verranno 2 teste, laverà i piatti Livia;**
- **se verranno una testa e una croce, laverà i piatti Lorenzo.**

a. Pensi che tutti e tre abbiano la stessa probabilità di lavare i piatti?

☐ Sì

☐ No

b. Giustifica la tua risposta.

....

....

....

Fig. 8 – Quesito di grado 8 del 2011

I risultati del campione nazionale di INVALSI per il grado 8 nel 2011, che mostriamo nella tabella 2, evidenziano una percentuale di risposte errate molto alte per entrambi gli item, ma quel che ci ha incuriosito sono state le percentuali delle risposte mancanti sul secondo item, 11,8% che sommate alle 71,6% delle errate danno un 83,4% di studenti che non sono stati in grado di giustificare correttamente la risposta data.

Tab. 2 – Risultati del campione INVALSI di grado 8 nel 2011

Item	*Risposte corrette*	*Risposte errate*	*Risposte mancanti*
a	No: 33,3%	Sì: 64,9%	1,8%
b	16,6%	71,6%	11,8%

Nella figura 9 abbiamo riportato i risultati relativi al nostro campione.

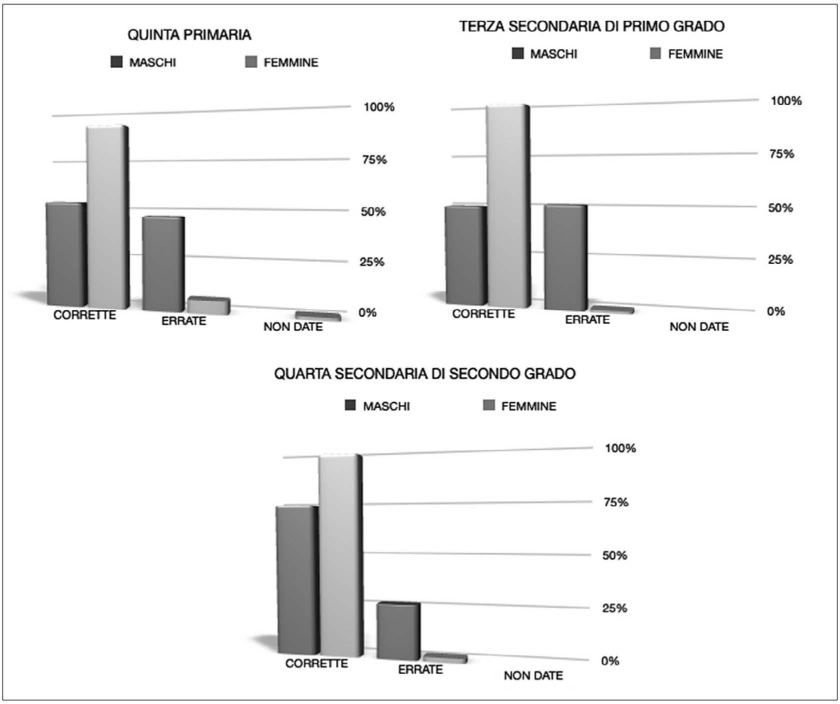


Fig. 9 – Grafici dei risultati del nostro campione del secondo item

Anche per il nostro campione, pur riportando risultati superiori al campione nazionale, le maggiori difficoltà sono state riscontrate nella seconda risposta nella quale dovevano giustificare la risposta data.

Gli studenti dei vari ordini, durante la condivisione e la discussione degli errori negli elaborati, hanno fornito generalmente le stesse tipologie di argomentazioni, di cui forniamo una sintesi.

Gli studenti delle classi quinte di scuola primaria hanno argomentato:
- perché la probabilità è sempre 50%;
- perché sia testa che croce sono due lati e quindi hanno la stessa probabilità;
- perché sono due monete uguali, quindi c'è la stessa probabilità che vengano fuori 2 croci, 2 teste o una croce e una testa.

Gli studenti della terza secondaria di I grado, in modo analogo ma molto più sinteticamente, hanno detto:
- è probabile che possano uscire tutti e 3 ugualmente;
- stessa probabilità che esca testa o croce;
- sì, perché è tutta fortuna.

Per gli studenti della secondaria di II grado le argomentazioni sono state le seguenti:

- tutti e tre hanno la stessa probabilità perché non si può sapere cosa verrà fuori;
- tutti e tre hanno una probabilità del 50% che la moneta venga col simbolo a loro designato;
- 50% di probabilità che venga testa uguale con croce la percentuale non varia in base al risultato del primo tiro.

Il nostro campione in tutti e tre i gradi di scuola interessati, ha riportato dati superiori alla media nazionale con una percentuale di risposte corrette per le femmine di gran lunga superiore rispetto ai maschi.

Nella primaria, infatti, il 90% delle femmine ha risposto correttamente al quesito e alla secondaria di I e di II grado la percentuale di risposte corrette delle femmine sale addirittura al 100%; mentre i maschi della primaria registrano un 50% di risposte corrette confermato anche dai maschi della secondaria di I grado che sale al 75% nella secondaria di II grado.

Per quanto riguarda le risposte corrette abbiamo invece assistito a un crescente livello di formalizzazione rispetto alla verbalizzazione della scuola primaria dove i bambini sono più abituati ad argomentare le proprie risposte.

Una bambina di una quinta primaria ha così motivato la propria risposta esatta: "secondo me è molto più probabile che venga fuori prima testa e poi croce che 2 volte consecutive testa o croce quindi per me è molto più probabile che Lorenzo lavi i piatti"; mentre uno studente della secondaria di I grado, e come lui molti altri, ha scritto: "perché TT CC TC CT". Ugualmente sintetica, seppur con il dettaglio delle percentuali, è la risposta di una ragazza della secondaria di II grado: "50% TC invece 25% TT e CC".

Terzo item: Gli spaghetti

Il terzo quesito selezionato è un item di ambito Relazioni e funzioni che quando uscì nella prova del grado 6 del 2005 suscitò molto clamore.

Poiché ante GESTINV, abbiamo ricavato i risultati del campione nazionale da Garuti (2006). Da un'analisi attenta emerge che in Italia solo il 25,45% degli studenti rispondeva correttamente e in Emilia-Romagna solo il 21,97%. I risultati del campione nazionale e l'argomento trattato nel quesito, il tempo di cottura degli spaghetti, ci sembrava molto adatto per verificare la presenza di errori legati al genere, ma soprattutto al condizionamento ambientale che ne può derivare (fig. 10).

7. Su una scatola di spaghetti c'è scritto:

Spaghetti

cottura 12 minuti

500 grammi

Per cuocere, secondo le indicazioni, 250 g di spaghetti quanti minuti sono necessari?

☐ A. 6

☐ B. 9

☐ C. 12

☐ D. 24

Fig. 10 – Item di grado 6 del 2005

I risultati relativi al nostro campione (fig. 11) evidenziano come un quesito di questo tipo possa mettere in difficoltà maggiormente i maschi per la minore familiarità che hanno con il contesto della domanda e applicano una regola di proporzionalità dove invece bastava del semplice buonsenso.

Il cuocere la pasta è infatti una situazione che si può considerare familiare per gli alunni, ma perde questa sua caratteristica quando viene inserita in un contesto prettamente scolastico, nel quale la situazione viene equiparata, forse anche per contratto didattico (Brousseau, 1986), a una semplice relazione di proporzionalità.

Nella primaria la percentuale di risposte corrette per le femmine è del 50% mentre per i maschi è il 45%: ancora troppo presto per bambine e bambini di 10 anni mettersi ai fornelli! Nella secondaria di I grado, in particolare, possiamo notare che i maschi hanno fatto il doppio degli errori rispetto alle femmine mentre, come prevedibile negli istituti professionali alberghieri il risultato è stato per entrambi i sessi nettamente migliore rispetto agli altri indirizzi secondari di II grado.

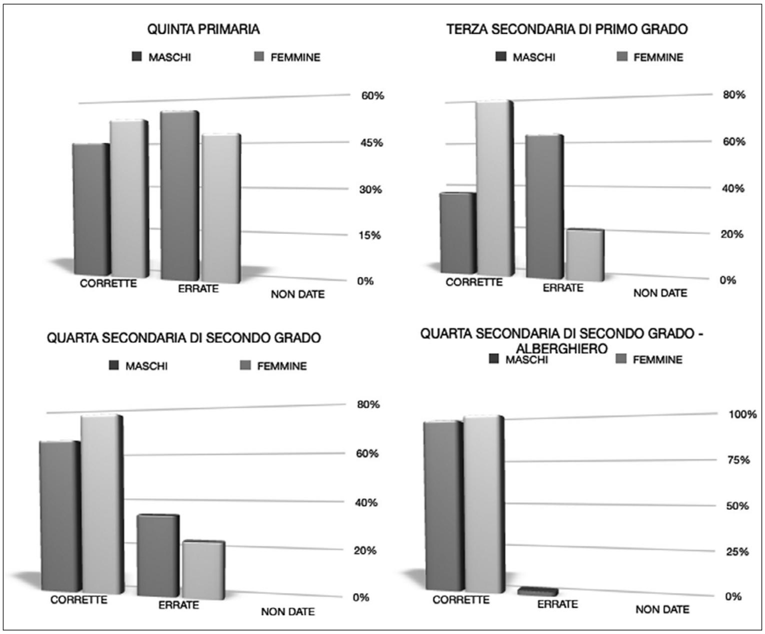


Fig. 11 – Grafici dei risultati del nostro campione del terzo item

Quarto item: Lancio a canestro

Il quarto è un item di Dati e previsioni uscito nella prova del grado 5 del 2013 (fig. 12), in cui meno della metà degli studenti del campione nazionale INVALSI aveva risposto correttamente (tab. 3).

D29. La tabella qui sotto riporta il numero di canestri e il numero totale di lanci fatti da quattro giocatori durante i primi 10 minuti di un allenamento di pallacanestro.

GIOCATORI	NUMERO CANESTRI	NUMERO LANCI
Andrea	4	9
Bruno	6	13
Claudio	5	8
Dario	5	10

Chi è stato il giocatore migliore tenuto conto dei lanci che ha effettuato?

A. ☐ Andrea

B. ☐ Bruno

C. ☐ Claudio

D. ☐ Dario

Fig. 12 – Item di grado 5 del 2013

Tab. 3 – Risultati del campione INVALSI di grado 5 nel 2013

Item	*Risposte corrette*	*Risposte errate*	*Risposte mancanti*
D29	44,4%	54,7%	0,9%

Nel nostro campione (fig. 13) i risultati sono stati in genere superiori rispetto a quelli del campione nazionale, ma decisamente migliori per le femmine rispetto ai maschi.

Il fatto che il distrattore più scelto da chi ha sbagliato sia stata l'opzione b, porta a pensare che questo sia dovuto soprattutto a una lettura parziale o frettolosa del testo, da parte di quegli studenti che hanno concentrato la loro attenzione solo sul numero maggiore sia dei canestri sia dei lanci, trascurando invece la parte di testo dove si dice "tenuto conto del numero di lanci che ha effettuato".

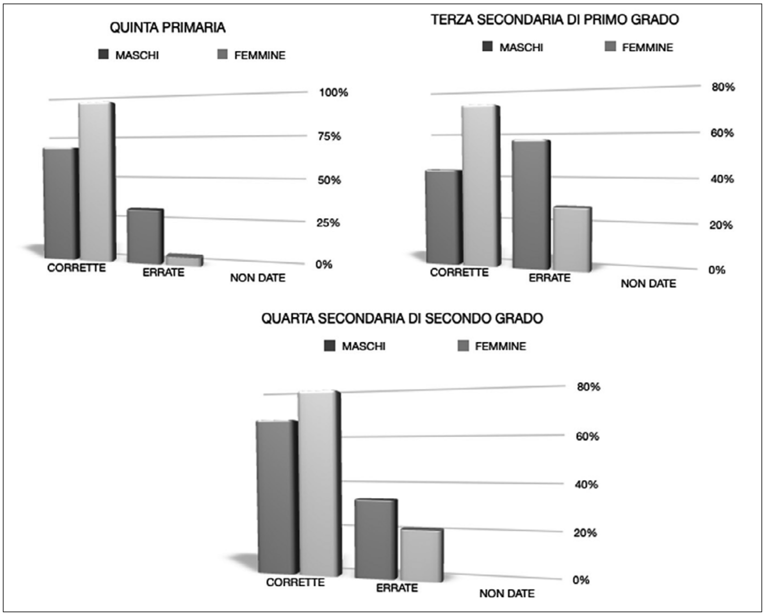


Fig. 13 – Grafici dei risultati del nostro campione del quarto item

Le risposte corrette delle femmine del nostro campione partono da un 95% nella primaria per poi scendere nella secondaria di I grado al 75% e all'80% della secondaria di II grado. I maschi della primaria fanno registrare un 70% di risposte corrette confermato dai ragazzi della secondaria di II grado; da rilevare il 40% di risposte corrette dei maschi della secondaria di I grado.

Come nel campione nazionale, anche il nostro campione ha visto prevalere come errore la scelta del distrattore b: la lettura skimming dei maschi conduce all'errore di sottovalutare l'informazione data di tenere presenti i numeri dei lanci effettuati, informazione invece captata dalla lettura scanning delle femmine. Come già anticipato questa differenza nei risultati può attribuirsi a una caratteristica tipica delle allieve, cioè la diligenza con la quale studiano ed eseguono le consegne; qualcuno sostiene però che tale fattore faccia perdere loro vivacità e creatività fattore che emerge soprattutto nel problem solving con strategie risolutive piuttosto standardizzate.

Quinto item: Tavoletta di cioccolata

L'ultimo quesito dell'ambito Relazioni e funzioni è uscito nella prova del grado 6 del 2012 e si compone di tre item (fig. 14). I risultati del campione nazionale INVALSI mettono in evidenza le grandi difficoltà incontrate dagli studenti nelle domande b e c, dove le risposte corrette sono rispettivamente il 18,7% e il 13,5%. Anche in questo caso i risultati del nostro campione in tutti e tre i gradi di scuola sono in controtendenza.

D17. **Marco vuole preparare una torta al cioccolato per il suo compleanno. La ricetta dice che occorrono 600 g di cioccolato. Al supermercato vendono tavolette di cioccolata da 250 g l'una.**

a. **Qual è il numero minimo di tavolette di cioccolata che Marco deve comprare?**

Risposta: ....

b. **Se ogni tavoletta è formata da 10 quadretti, quanti quadretti di cioccolata servono a Marco per preparare la torta?**

Risposta: ....

c. **Scrivi come hai fatto per trovare la risposta.**

....

....

....

Fig. 14 – Item G06 del 2012

Tab. 4 – Risultati del campione INVALSI di grado 6 nel 2012

Item	*Risposte corrette*	*Risposte errate*	*Risposte mancanti*
a	58,6%	36,2%	5,2%
b	18,7%	70,9%	10,4%
c	13,5%	68,3%	18,2%

Gli studenti del nostro campione durante la fase di condivisione e discussione degli elaborati, hanno mostrato diverse strategie per risolvere le domande b e c. Si può dividere 600 per 250 e moltiplicare per 10, oppure si può dividere la quantità di cioccolata occorrente per il peso di ogni quadretto di cioccolata oppure si possono utilizzare le frazioni 10/10 + 10/10 + 4/10 = 24/10.

Gli errori più frequenti nella scuola primaria sono stati i seguenti:

– (risposta: 50). Ho fatto 10 diviso 500 (il risultato di quanto doveva prendere) che fa 50;
– (risposta: 60). Ho visto che servono 600 mentre ogni barretta ha 10 quadretti quindi 10 per 60 che fa 600;
– (risposta: 100). Perché per una torta serve molto più di una tavoletta di cioccolato visto che ogni barretta ha 10 quadretti 10 barrette fanno 100.

Nella secondaria di I grado:

– (risposta: 37,5). 600:16 =37.5.
– (risposta: 20). Visto che sono 2 tavolette se ne prendo 2 e in una ce ne sono 10 raddoppio. 600 g: 3 cioccolate (30 quadretti) = 20.

Nella secondaria di II grado, solo una, ma molto particolare:

– (risposta: 2,4). Ho fatto 600:250=2,4.

Anche per questo quesito il nostro campione ha evidenziato, in tutti e tre i gradi di scuola, risultati migliori per le femmine. Nella domanda b registriamo nella secondaria di I grado il picco di quasi il 100% che scende all'80% nella secondaria di II e nella primaria; mentre per la domanda c le risposte corrette delle femmine delle secondarie di I e II grado si attestano intorno al 90% e alla primaria al 55%.

Il quesito, pertanto, si presta a una discussione in classe sulle diverse strategie che si possono utilizzare per la sua risoluzione.

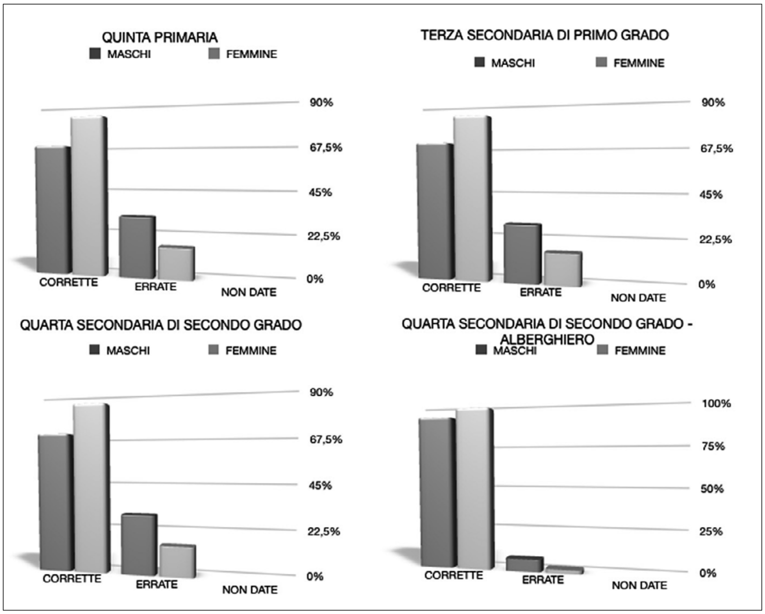


Fig. 15 – Grafici dei risultati del nostro campione del quinto item a

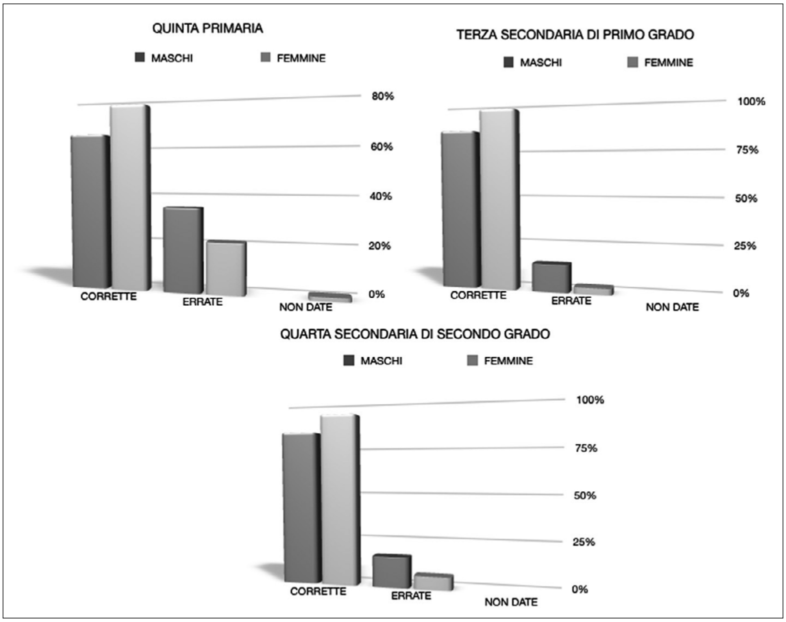


Fig. 16 – Grafici dei risultati del nostro campione del quinto item b

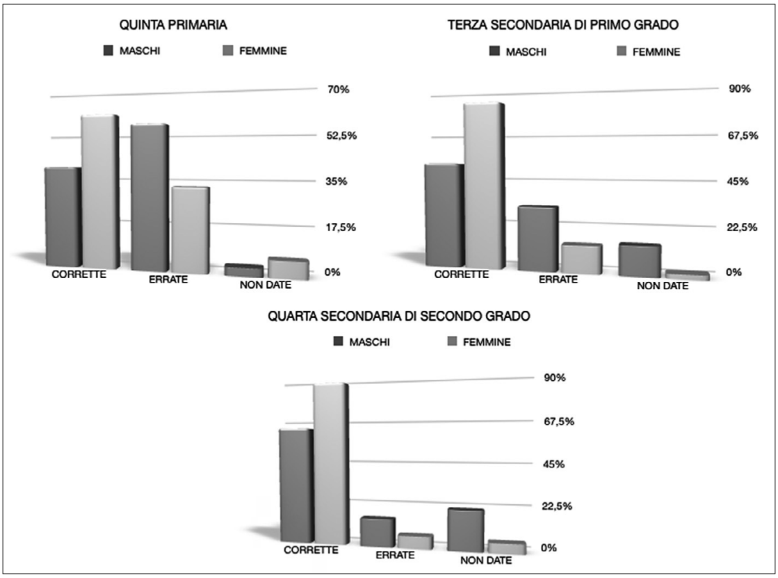


Fig. 17 – Grafici dei risultati del nostro campione del quinto item c

7. Conclusioni

La nostra ricerca ha in parte capovolto l'idea che ci siano alcune tipologie di item che possano in qualche modo favorire i maschi o le femmine, e che ci siano errori tipici per un sesso rispetto all'altro. Quel che appare è che le differenze emerse nelle risposte, siano in parte riconducibili a una minore familiarità dei maschi con il contesto proposto dal quesito, come nel caso del tempo della cottura degli spaghetti e della grammatura del cioccolato per la torta.

I differenti metodi di studio possono spiegare il migliore rendimento scolastico delle femmine ma non vengono sottovalutate le conseguenze negative sulla possibilità di esprimersi rispetto ai maschi, che appaiono più liberi di manifestare la propria creatività.

Sicuramente, un altro aspetto che può fare la differenza è una lettura parziale o frettolosa del testo che porta i maschi a concentrare l'attenzione solo su un dato a scapito delle altre informazioni utili per la risoluzione del quesito, mentre le femmine, più riflessive per natura, sono portate a effettuare una lettura più attenta volta alla ricerca di informazioni precise e mirate.

Ci sono precisi stereotipi sociali che possono minare e annientare gli stimoli producendo una perdita di autostima e possibili difficoltà in ambito matematico. Si tratta di stereotipi che nascono anche inconsapevolmente in famiglia e che proseguono prima nella scuola, poi nelle università e successivamente nella società e nei luoghi di lavoro, generando quei pregiudizi spesso inconsci: è naturale che i maschi siano più appassionati alle discipline tecniche, mentre le femmine abbiano una maggior propensione per le materie legate all'accudimento oppure è opinione diffusa la visione della Matematica come una disciplina prettamente maschile verso la quale i maschi sono portati e le femmine no.

Insegnare a una bambina che le materie scientifiche sono più adatte ai maschi farà sì che alla lunga se ne possa convincere e difficilmente sceglierà un percorso STEM. Certi *bias* sedimentano nella nostra memoria, vengono assorbiti per poi diventare del tutto normali.

Cercare di evitare a scuola certi pregiudizi significa compiere un progetto a sostegno dei bambini e delle bambine e della società tutta. Si tratta di porre le basi per permettere a ogni futuro uomo e donna di vivere pienamente la propria esistenza e di realizzare il proprio progetto di vita senza condizionamenti e limiti, nella prospettiva di promuovere un percorso di crescita in cui il dentro e il fuori di ogni individuo possano sintonizzarsi con i bisogni di crescita e con una promozione del proprio pieno benessere.

Riferimenti bibliografici

Brousseau G. (1986), *La relation didactique: le milieu. Actes de la IVème Ecole d'Eté de didactique des mathématiques*, IREM, Paris, pp. 54-68.

D'Amore B., Sbaragli S. (2011), *Principi di base di Didattica della Matematica*, Pitagora, Bologna.

Baccaglini-Frank A., Di Martino P., Natalini R., Rosolini G. (2017), *Didattica della Matematica*, Mondadori, Milano.

Garuti R. (2006), "Analisi dei quesiti INVALSI 2004/2005", *Innovazione Educativa*, 3-4, marzo-aprile, pp. 31-37.

Ghigi R. (2019), *Fare la differenza. Educazione di genere dalla prima infanzia all'età adulta*, il Mulino, Bologna.

INVALSI (2013), *Quadro di riferimento della prova di italiano-La prova di italiano nell'obbligo di istruzione*, testo disponibile al sito https://invalsi-areaprove.cineca.it/, data di consultazione 3/8/2022.

Lindberg S.M., Hyde J.S., Petersen J.L., Linn M.C. (2010), "Nuove tendenze nella performance di genere e Matematica: una meta-analisi", *Bollettino psicologico*, 136, 6, pp. 1123-1135, doi: 10.1037/a0021276.

Maffia A., Giberti C. (2016), "Didattica della Matematica e PISA: strade percorse e nuovi sentieri da battere", in L. Palmerio (a cura di), *PISA 2012. Contributi di approfondimento*, Milano, FrancoAngeli, pp. 190-200.

MIUR (2012), Indicazioni nazionali per il curricolo della scuola dell'infanzia e del primo ciclo d'istruzione, *Annali della Pubblica Istruzione*, numero speciale.
TIMMS (2019), *Sintesi dei risultati degli studenti italiani in Matematica e Scienze*, testo disponibile al sito https://www.invalsiopen.it/wp-content/uploads/2020/12/Sintesi-dei-risultati-TIMSS-2019.pdf, data di consultazione 3/8/2022.
Zan R. (2016), *I problemi di Matematica*, Carrocci, Roma.
Zan R., Baccaglini-Frank A. (2017), *Avere successo in Matematica. Strategie per l'inclusione e il recupero*, UTET, Torino.

2. Matematica, apprendimenti e formazione docente

di Ester Valloreo, Francesco Mammarella,
Roberta Franchi, Ettore D'Agostino

Nel corso dell'a.s. 2019/2020, l'istituto omnicomprensivo di Città Sant'Angelo, con 1.337 studenti, ha avviato un percorso sulla percezione che ogni studente ha in relazione alle proprie competenze, al livello di autostima e motivazione nei confronti della Matematica, accompagnato da un'autoformazione dei docenti, che ha coinvolto in particolare i neo-immessi e i rispettivi tutor.

Nelle attività didattiche attuate, prima in presenza e poi in DAD durante il lockdown, si è promossa l'esplorazione di concetti matematici in modo da favorire la formulazione di semplici congetture, l'argomentazione e la riflessione tra pari e con l'insegnante. L'insegnante ha assunto il ruolo di mediatore e facilitatore e al termine della proposta didattica ha motivato gli alunni a riorganizzare quanto appreso. Gli obiettivi formativi hanno privilegiato come gli studenti siano in grado di utilizzare rappresentazioni di dati in situazioni significative per ricavare informazioni, formulare giudizi e prendere decisioni, costruire ragionamenti e sostenere tesi.

Contestualmente, l'adesione per la prima volta alle gare e ai giochi matematici ha permesso di lavorare con una banca dati, facilitando il processo di insegnamento/apprendimento. Le attività hanno privilegiato la costruzione di un modello risolutivo di una situazione problematica, partendo dalle condizioni e relazioni tra *dati* e *incognite.*

Tutti gli alunni delle classi interessate hanno imparato a usare il software di geometria dinamica GeoGebra come strumento per elaborare congetture e costruzione di concetti, riconoscere relazioni numeriche in contesti geometrici, esplorare, riflettere, congetturare e argomentare fra pari e con l'insegnante.

Nel costruire un database di attività svolte durante la DAD, si è instaurata una collaborazione attiva e costruttiva con i docenti dell'Istituto, che mai avevano utilizzato la multimedialità come pratica in classe. Si è contestualmente è sviluppato un percorso di autoformazione e sistematizzazione di buone prassi, coinvolgendo anche i docenti in anno di prova.

During the school year 2019/2020, the Istituto Omnicomprensivo of Città Sant'Angelo, for a total of 1.337 students, started a path on the perception that each student has, in relation to his skills, level of self-esteem and motivation in relation to mathematics, accompanied by a self-training of teachers, which involved in particular newly hired teachers and their tutors.

In the course of the didactic activities, first in presence and then in online learning, the exploration of mathematical concepts has been promoted in order to encourage the formulation of simple conjectures, argumentation and reflection among peers and with the teacher. The teacher assumed the role of mediator and facilitator and at the end of the teaching proposal, the teacher motivated the pupils to reorganize what they had learned. The training objectives focused on how students are able to use representations of data in significant situations to obtain information, make judgments and make decisions, to construct reasoning and support their theses.

At the same time, the adherence to the competitions and mathematical games for the first time, by the whole Institute, allowed to work with a database, in order to facilitate the teaching/learning process. The activities have privileged the construction of a model to solve a problematic situation, starting from the conditions and relationships between data and unknowns.

All students in the concerned classes have learned how to use the dynamic geometry software GeoGebra as a tool for conjecture and concept building, for recognizing of numerical relationships in geometric contexts, exploration, reflection and conjecture and to defend an argument among peers and with the teacher.

In organizing our Institute database created during the online learning period, an active and constructive collaboration between the teachers of different school levels has been established, also teachers who had never used multimedia as a classroom environment. We developed a path of self-training and systematization of best practices, with the involvement of teachers in their probationary period.

1. Introduzione

L'istituto omnicomprensivo di Città Sant'Angelo è composto da una scuola primaria, una scuola secondaria di I grado e un liceo con 5 indirizzi (linguistico, scienze umane, scienze umane-economico sociale, scienze applicate, sportivo) per un totale di 1.337 studenti. Durante l'anno scolastico 2019/2020, partendo dalle criticità emerse dopo l'analisi dei dati sul profitto scolastico e dei risultati INVALSI, ha promosso un'attività di autoformazione dei docenti, con il coinvolgimento in particolare dei neo-immessi e dei rispettivi tutor. Le azioni poste in essere hanno avuto come focus la percezione che ogni studente ha relativamente alle proprie competenze e al livello di autostima e di motivazione nei confronti della Matematica e l'elaborazione di attività didattiche volte a migliorare tale percezione.

L'orientamento strategico ha posto le condizioni per una riflessione sulle pratiche organizzative e didattiche a partire dalla logica della valutazione per l'apprendimento (Stiggins *et al.*, 2004, pp. 33-35):

> Secondo la teoria di Arie W. Kruglanski, l'individuo manifesta un bisogno di chiusura cognitiva, inteso come desiderio di ottenere una risposta definitiva e certa a una situazione ambigua: egli mostra avversione verso l'ambiguità e rifugge dall'incertezza che ne deriva, sia in riferimento alle conoscenze sul mondo esterno, sia in merito alle conoscenze di sé. Ne nasce una spinta a soddisfare il bisogno di valutazione del sé, volta a ridurre l'incertezza circa le proprie competenze e a presentarsi agli altri in modo positivo, così da possedere un'immagine di sé congruente con il proprio sé ideale. Dunque, una valutazione è necessaria. Per Kruglanski, preservare una valutazione positiva della propria competenza contribuisce all'espressione del proprio vero potenziale e alla riduzione del deterioramento delle prestazioni in prove diagnostiche. La valutazione negativa del proprio sé suscita, al contrario, un senso di «minaccia», il quale rappresenta una delle cause del deterioramento delle prestazioni: livelli elevati di ansia e di stress producono effetti negativi sul funzionamento del sistema cognitivo, e di conseguenza sulla prestazione in compiti diagnostici.
>
> Il concetto di valutazione formativa è stato proposto da Scriven nel 1967, in opposizione a quello di valutazione sommativa, la cui funzione consiste nel determinare il valore di un programma la cui elaborazione è terminata. La funzione della valutazione formativa consiste invece nel migliorare, per quanto è possibile, nel corso dell'elaborazione, il progetto d'azione. Perrenoud definisce "realmente" formativa quella valutazione che "diagnostica in maniera analitica i modi di funzionamento, le difficoltà specifiche, gli interessi, i ritmi di ciascuno. Non si tratta dunque di misurare, ma di analizzare, di diagnosticare: concentrarsi sull'allievo per conoscerlo meglio, al fine di aiutarlo meglio. Tale è l'ambizione di fondo della valutazione formativa. Lungi dall'essere una misura, essa è un atto sociale.

La valorizzazione delle risorse ha posto come traguardo l'autoformazione tra docenti[1] a partire dal CCNI sulla formazione del personale scolastico, sottoscritto il 19/11/2019, che fissa i criteri generali di ripartizione delle risorse

[1] Testo disponibile al sito https://scuolaoggi.com/2020/02/04/lautoformazione-a-scuola-come-percorso-di-sviluppo-professionale/, data di consultazione 31/1/2021.

finanziarie e suggerisce (all'insegna della possibilità) un ampio ventaglio di nuove metodologie formative, la cui presenza il Piano di formazione d'istituto (PFI) deve garantire.

Nel testo del contratto, all'art. 2, si dice che il PFI può comprendere "anche iniziative di autoformazione, di formazione tra pari, di ricerca e di innovazione didattica, di ricerca-azione, di attività laboratoriali, di gruppi di approfondimento e di miglioramento", lasciando alle singole scuole ampi margini di libertà realizzativa, oltre al tradizionale corso di formazione strutturato secondo il consueto rapporto verticale esperto/discente.

La Nota MIUR n. 49062 del 28/11/2019 ribadisce questa prospettiva (§ 3, penultimo capoverso), facendola rientrare tra le "nuove" metodologie di formazione da "garantire" e diffondere anche nel contesto scolastico, riprendendo esattamente le proposte contenute nel contratto:

> L'autoformazione è una metodologia nata e sviluppatasi inizialmente nell'ambito della formazione degli adulti lungo tutta la vita (lifelong) e in ogni campo dell'esperienza umana del vivere (widelife), soprattutto in ambiente anglofono, in particolare negli USA, e francofono. L'obiettivo è di mettere la persona nelle condizioni di fronteggiare la complessità derivante dalla "società conoscitiva" attraverso l'apprendimento continuo in contesti non formali, non solo in vista dell'occupabilità ma anche per un proprio sviluppo e una piena realizzazione di sé. Essa è contraddistinta dall'iniziativa del soggetto singolo e nasce dal bisogno di superare criticità di origine sia professionale sia, in senso lato, personale. A questo proposito, G.P. Quaglino distingue tra formazione di sé – orientata al capire che cosa si è autenticamente, alla realizzazione personale, alla cura di sé, a prescindere da condizionamenti o richieste esterne – e la formazione da sé – in un percorso di apprendimento affidato alla responsabilità, all'autonomia e alla gestione del soggetto; si tratta di interpretazioni dell'autoformazione "non reciprocamente escludentesi, […] due facce della stessa medaglia".

Anche nel periodo della didattica a distanza, a partire dal 05/03/2020, le scelte didattiche e gli strumenti adottati nel primo quadrimestre 2019/2020 hanno posto come prioritari i seguenti elementi.

– L'accoglienza per conoscerci e la sua documentazione nel numero del giornale scolastico *L'angolino*: gli studenti e i docenti sono stati coinvolti in una narrazione e una riflessione sulle proprie scelte, aspettative e conoscenze, abilità.

L'ANGOLINO

Rivista dell'Istituto Omnicomprensivo
Città Sant'Angelo

Ottobre 2019
Anno I n. 2

Largo Mazzini 1, 65013 Città Sant'Angelo
tel: 0859699052 mail: peis00400q@istruzione.it

EDIZIONE SPECIALE Progetto accoglienza Liceo

Osservatorio Accoglienza: classi terze, quarte, quinte

Dall'Invalsi all'Esame di Stato: sui banchi le sfide del futuro

Riflettere sul rapporto tra "Io e la matematica" e "Io e l'Italiano", scoprire attraverso test digitali quali sono i nostri stili di apprendimento, rilevare la propria impronta ecologica: sono alcune delle attività che hanno coinvolto gli studenti del triennio del Liceo "B. Spaventa" durante le due settimane di accoglienza del nuovo anno scolastico. Per tutti, il ritorno sui banchi è stato scandito dalla parola consapevolezza: dei risultati raggiunti e di quelli da costruire. Per gli studenti delle classi terze, le attività hanno ruotato principalmente attorno all'Invalsi: la riflessione sulle prove Invalsi svolte nell'anno scolastico passato ha consentito loro di scoprire i punti di debolezza e di esplorare meglio le caratteristiche della prova che ritroveranno al quinto anno. Oltre a testare prove di comprensione del testo, proposte anche da docenti di Scienze e Scienze Motorie, gli studenti si sono trasformati essi stessi in ideatori di prove: hanno costruito, infatti, test sul modello Invalsi di Italiano e Matematica da somministrare ai compagni delle classi seconde. Hanno anche scritto lettere ai ricercatori Invalsi. Hanno inoltre riflettuto sul senso del loro viaggio nella scuola, mettendo in una ideale valigia fatta di post-it ciò che di significativo hanno appreso nel biennio e ciò che si aspettano di imparare. Dai percorsi per le competenze trasversali e l'orientamento al nuovo Esame di Stato: anche gli studenti delle classi quarte e quinte hanno passato al setaccio ciò che li attende al termine del loro percorso. Per tutti, la riflessione si è allargata alle sfide dell'ambiente, con un'attenzione particolare rivolta ai 17 obiettivi di sviluppo sostenibile dell'Agenda 2030, esplorati in tutte le lingue del nostro mondo scolastico: dall'inglese al francese, dallo spagnolo al tedesco.

Dall'alto: Agenda 2030; esempio di tabulazione di questionario "Io e la matematica"

Idee per un Book Crossing a cura della 5F Les

1) Elaborare una proposta da indirizzare al Comune di Città Sant'Angelo per inserire, nella mappa di interesse culturale del centro storico, i punti in cui sistemare dei box ("casette") di lettura, contenenti libri inizialmente donati dagli studenti e poi alimentati dalla cittadinanza angolana, da prendere in prestito libero. Booking-box proposti: Giardino comunale, Ospedale, Belvedere, "Belvedere dei fotografi", bar, pizzerie e ristoranti. 2)Distribuire bigliettini, con citazioni tratte da libri, in punti strategici del centro storico e all'interno dell'Istituto scolastico, con l'obiettivo di stimolare la curiosità alla lettura e far conoscere i monumenti più significativi di interesse culturale, attraverso una sorta di "caccia al tesoro". 3)Cercare sponsor per l'acquisto dei box in cui custodire i libri. 4)Promuovere le suddette attività attraverso locandine in formato digitale.

Una lettera ai ricercatori Invalsi

Gentili ricercatori Invalsi,
siamo alcune studentesse dell'Istituto Omnicomprensivo B. Spaventa di Città Sant'Angelo.
A nostro parere le prove da voi preparate sono adeguate al nostro grado d'istruzione, anche se abbiamo riscontrato delle difficoltà per quanto riguarda il test di matematica.
Nella somministrazione online delle prove abbiamo individuato sia vantaggi che svantaggi. Alcuni vantaggi sono, ad esempio, il risparmio della carta, la rapidità nell'inserire le risposte e la possibilità di poterle cambiare senza cancellature. Invece gli svantaggi da noi riscontrati riguardano la prova d'ascolto di Inglese, che spesso si blocca, problemi con la connessione e il fatto che alcuni studenti potrebbero accusare dei fastidi agli occhi o dolori alla testa causati dalla lunga esposizione a uno schermo.
Speriamo che le nostre riflessioni possano aiutare alla preparazione delle prossime prove.
Distinti saluti.
Città Sant'Angelo, 26/09/2019

8

Fig. 1 – Una pagina de L'angolino

– Condivisione del framework INVALSI e della piattaforma GESTINV[2]: sia nel corso del collegio di approvazione del PTOF sia nell'individuazione degli obiettivi di processo connessi alle priorità del RAV, i docenti sono stati invitati ad approfondire il framework INVALSI e la piattaforma GESTINV per una riflessione sugli obiettivi di apprendimento e sui traguardi secondo un'ottica verticale.
– Questionario iniziale rivolto a tutti i docenti sui bisogni formativi a inizio anno scolastico 2019/2020, dato il forte avvicendamento dei docenti, con un'alta percentuale di docenti a tempo determinato (grigio scuro) rispetto alle percentuali di confronto.

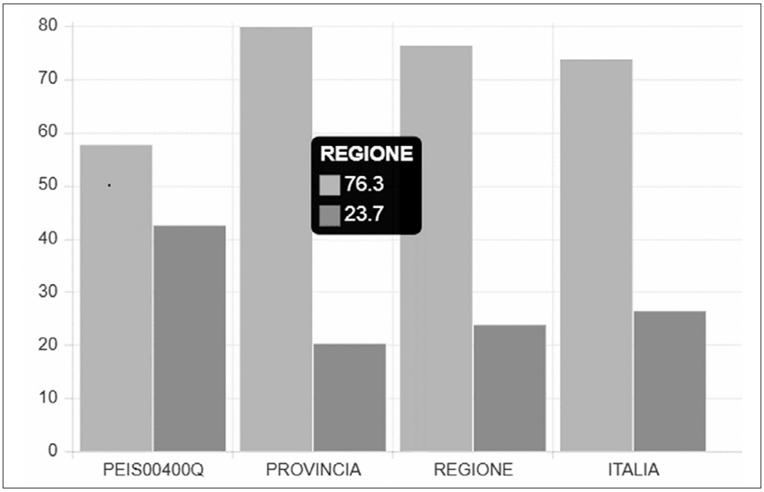


Fig. 2 – Confronto tra percentuale di docenti a tempo determinato e a tempo indeterminato

– Condivisione del Piano di sviluppo professionale dei docenti neo-immessi in ruolo attraverso la produzione dei seguenti documenti:
  • "Relazione sulla partecipazione a Matematica senza frontiere" (a cura della neo-immessa, prof.ssa Mariangela Defeo): la docente aveva conosciuto nel periodo del tirocinio la scuola del Molise, organizzatrice per il Sud dei giochi. La scelta di partecipare è stata motivata perché permette un confronto con il framework INVALSI;
  • "INVALSI – Continuità nei diversi gradi di istruzione" (a cura della neo-immessa, prof.ssa Beatrice Teseo): la prof.ssa Teseo, insegnante in

[2] https://www.gestinv.it/Index.aspx.

una classe quarta del liceo delle scienze umane ha coinvolto gli studenti a riflettere su alcuni item tratti da GESTINV per comprendere i processi cognitivi e gli atteggiamenti richiesti a partire dalla scuola primaria.
– Sviluppo in verticale (primaria, media, liceo) del percorso di autoformazione e analisi delle pagelle, delle certificazioni degli studenti in ingresso al liceo a partire dall'anno scolastico 2019/2020 e monitorarne i progressi nel corso del quinquennio.

2. Oggetto e ipotesi di ricerca

In questa sezione si descrive quanto svolto nel liceo "Spaventa" (classi 2° e 3° del liceo linguistico, scienze applicate e sportivo, scienze umane e LES) prima come indagine sulla percezione della propria competenza in Matematica, successivamente sulla scomposizione e ricomposizione di più prove di Matematica, secondo il framework di Matematica.

Il lavoro è in linea con le Indicazioni nazionali, in cui si sottolinea l'importanza di sviluppare negli studenti la capacità di comunicare e discutere, di argomentare in modo corretto, di comprendere i punti di vista e le argomentazioni degli altri.
– Dal confronto tra gli esiti delle prove INVALSI nei diversi ordini di scuola (vedi lavoro della prof.ssa Teseo precedentemente citato) sono emerse criticità sulla costruzione del pensiero geometrico e sulla capacità di argomentare un ragionamento o un processo risolutivo. Durante le gare di Matematica senza frontiere (vedi lavoro della prof.ssa Defeo precedentemente citato) sono riemerse le stesse difficoltà, ma abbiamo osservato che gli studenti che mostravano poco interesse durante le ore curricolari di Matematica, si sono mostrati generalmente più coinvolti e sono stati catturati dai quesiti che richiedevano di risolvere problemi di geometria attraverso l'utilizzo di materiali quali carta, penna e forbici per la realizzazione delle figure. Abbiamo inoltre notato che in genere gli studenti del primo biennio superiore hanno una buona predisposizione nella comprensione e nella gestione del significato geometrico delle formule algebriche. Considerando che molto spazio viene dedicato all'algebra nella prassi didattica dell'ultimo anno della scuola secondaria di I grado e nel primo biennio della scuola secondaria di II grado, ci sembra una buona prassi approfondire il significato geometrico delle operazioni algebriche, cosicché l'Algebra venga in soccorso della Geometria.
– Uno dei più popolari software che permettono di integrare lo studio dell'Algebra e della Geometria (e non solo) e che secondo la nostra opinione

può diventare uno strumento prezioso da integrare nella prassi didattica è GeoGebra. I motivi di gradimento del software, "oltre alla possibilità di coniugare ambiente geometrico e ambiente algebrico, nonché ambiente simbolico, sono dovuti anche alla sua gratuità (free software), nonché alla possibilità di essere aperto (open-source) ad accogliere contributi di sviluppatori di tutto il mondo. Punto di forza del software inoltre è la rete, in continua crescita a livello mondiale, dei GeoGebra Institute, organizzazioni a carattere non profit che riuniscono e mettono in collegamento tra loro insegnanti, studenti, sviluppatori di software e ricercatori con i seguenti obiettivi: creazione di materiale libero per l'insegnamento e la formazione degli insegnanti; seminari frontali e online per insegnanti; organizzazioni di competizioni per gli studenti; supporto on-line agli utenti; sviluppo di software; elaborazione di progetti di ricerca" (Montone, 2017, p. 125).

Seguono alcuni esempi di utilizzo di GeoGebra finalizzati allo sviluppo di conoscenze, abilità e competenze.

2.1. Attività per lo sviluppo di conoscenze

Consiste nella realizzazione di tutorial che formano gli studenti all'uso di Geogebra per la rappresentazione di triangoli e figure o di funzioni e curve.

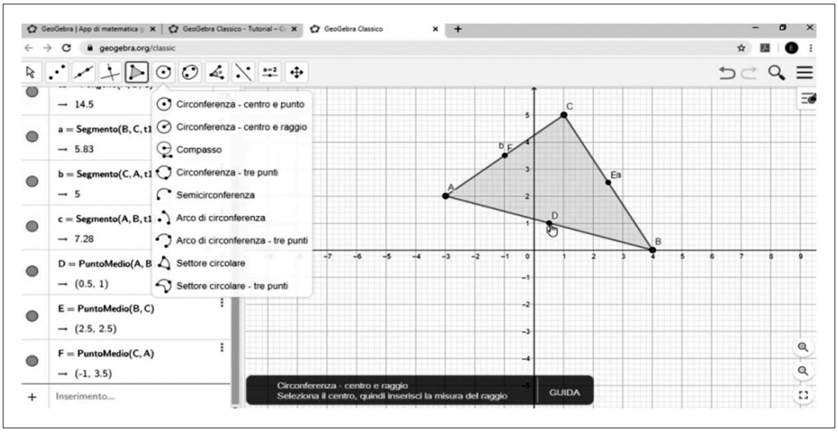


Fig. 3 – Fotogramma di un tutorial sull'uso di Geogebra

Si tratta di un'attività di formazione e autoformazione sintetizzata dalla seguente scheda:

– docente: predispone videotutorial o presentazioni;
– studenti: si esercitano e fanno pratica con il software;
– modalità: asincrona;
– obiettivi:
  • imparare a usare il software;
  • rappresentare virtualmente enti geometrici e algebrici;
  • costruire, integrare e potenziare “immagini mentali” di concetti astratti.

2.2. *Attività per lo sviluppo di abilità*

Consiste nella compilazione sincrona e/o asincrona di un documento condiviso da parte degli studenti, sulla risoluzione grafica delle disequazioni supportata da Geogebra.

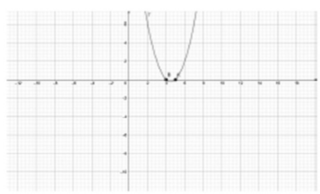
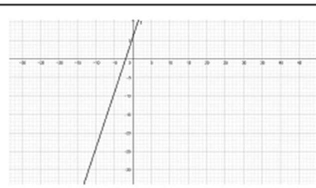
$x^2 - 9x + 20 < 0$		4<x<5
3x+6>0		x>-2

Fig. 4 – Particolare di un’attività collaborativa sulle disequazioni (classe 3a del liceo scienze umane opz. economico-sociale)

È un’attività di studio collaborativo sintetizzata dalla seguente scheda:
– docente: predispone una tabella su documento condiviso;
– studenti: rappresentano funzioni per risolvere graficamente disequazioni; modificano e integrano il documento condiviso;
– modalità: sincrona o asincrona;
– obiettivi:
  • usare il software per rappresentare funzioni;
  • risolvere disequazioni;
  • imparare a utilizzare strumenti collaborativi di scrittura.

2.3. Attività per lo sviluppo di competenze

Gli studenti svolgono un compito integrando strumenti analogici e digitali, sfruttando le potenzialità dello strumento "slider" di Geogebra per comprendere il significato algebrico dei parametri attraverso la manipolazione dinamica delle figure.

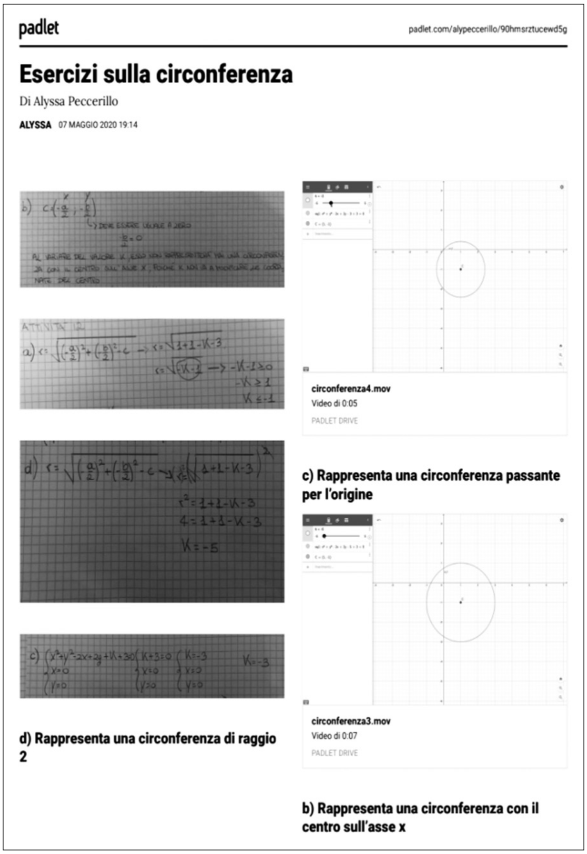


Fig. 5 – Particolare di un lavoro sulla circonferenza (classe 3ª del liceo linguistico)

È un'attività creativa sintetizzata dalla seguente scheda:
- docente: propone un tema da sviluppare;
- studenti: scelgono quali aspetti sviluppare, come illustrarli e con quali strumenti;
- modalità mista (asincrona per lo sviluppo del lavoro, sincrona per la restituzione);

– obiettivi:
  - selezionare e costruire materiali;
  - integrare l'utilizzo di strumenti digitali e analogici;
  - potenziare le capacità espressive e argomentative.

3. Metodo

Nel corso delle attività didattiche, prima in presenza e poi a distanza nel periodo di lockdown, si è promossa l'esplorazione di concetti matematici in modo da favorire la formulazione di semplici congetture, l'argomentazione e la riflessione tra pari e con l'insegnante. L'insegnante ha assunto il ruolo di mediatore e facilitatore e al termine della proposta didattica ha motivato gli alunni a riorganizzare quanto appreso. Sono state messe a punto varie attività che hanno stimolato gli studenti a una lettura attenta e critica di grafici di diverso tipo, con riferimento a situazioni reali al fine di imparare a confrontare tra loro grafici diversi e a saper scegliere le condizioni opportune per la loro costruzione. Gli obiettivi formativi hanno privilegiato come gli studenti siano in grado di utilizzare rappresentazioni di dati in situazioni significative per ricavare informazioni; costruire ragionamenti e sostenere le proprie tesi, grazie ad attività laboratoriali, alla discussione tra pari e all'osservazione di modelli; utilizzare le rappresentazioni per ricavare informazioni, formulare giudizi e prendere decisioni.

3.1. Attività per favorire la formulazione di congetture

In Matematica esiste l'arte di "fare congetture"; fare una congettura consiste nel dire "ecco c'è questo problema e penso che la risposta sia questa, però non sono capace di dimostrarlo". Per essere interessante una congettura deve riferirsi a un problema importante e la presunta risposta deve, in qualche modo, "spiegare il problema", gettare luce, aprire nuovi orizzonti; oppure la risposta proposta deve essere molto sorprendente (cfr. congettura di Goldbach). È chiaro, inoltre, che una buona congettura non deve essere facilmente risolvibile (altrimenti rischia di diventare un semplice esercizio...). È molto difficile fare una buona congettura e spesso chi le fa non le risolve! Le congetture in Matematica sono molto importanti perché indirizzano le ricerche, servono da guide. Le congetture più note sono in generale quelle che riguardano l'aritmetica, questo è anche dovuto al fatto che hanno enunciati comprensibili anche da non specialisti[3].

[3] http://dm.unife.it/geometria/Mat2000/conj.htm.

La figura che segue illustra un'attività guidata che, con l'utilizzo di Geogebra e l'aiuto di domande stimolo, conduce alla classificazione delle coniche a partire dalla relativa equazione algebrica. Gli studenti compilano un questionario che richiede il continuo ricorso a Geogebra come ambiente virtuale di osservazione e manipolazione e stimola la riflessione e il ragionamento induttivo. L'analisi di casi particolari dovrebbe condurre alla formulazione di regole generali da validare con ulteriori esplorazioni.

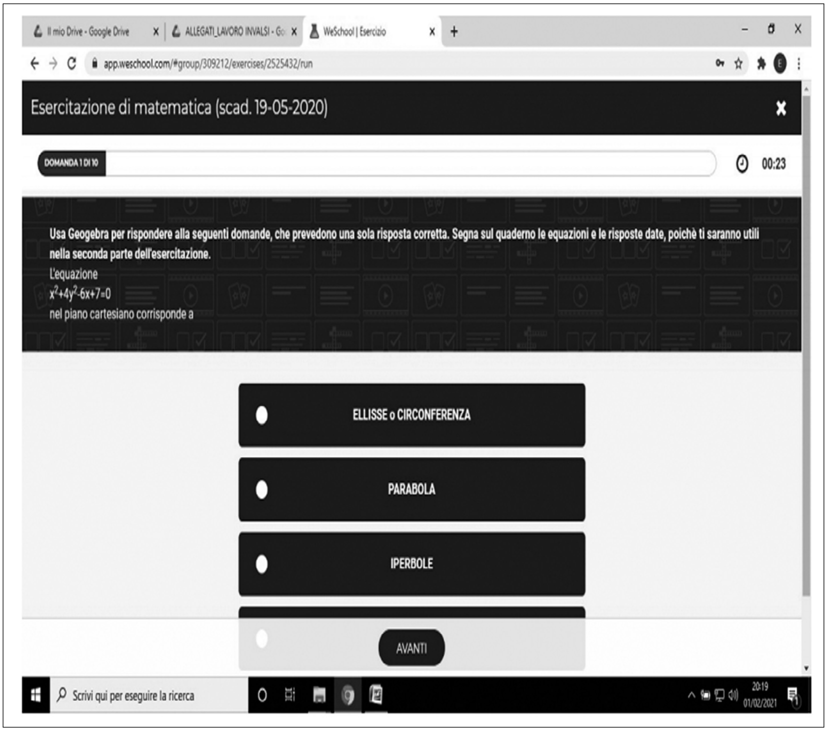


Fig. 6 – Attività guidata realizzata sulla piattaforma WeSchool

È un'attività esplorativa e logico-previsionale sintetizzata dalla seguente scheda:

- docente: predispone un questionario con domande stimolo la cui risposta richiede l'uso del software;
- studenti: sperimentano, elaborano congetture, condividono attraverso gli strumenti collaborativi e si confrontano;
- modalità mista (asincrona per lo sviluppo del lavoro, sincrona per il confronto e il dibattito);
- obiettivi:

- riconoscere le coniche;
- scorgere relazioni numeriche e analogie strutturali tra i coefficienti di polinomi;
- costruire relazioni ed elaborare classificazioni.

3.2. Attività per stimolare l'argomentazione e la riflessione tra pari e con l'insegnante

L'insegnante che intenda gestire in modo corretto e produttivo l'argomentazione e la riflessione deve possedere le competenze basilari relative:
– alla natura dell'ambito di indagine;
– alle dinamiche dei processi di pensiero che portano alla formazione di concetti e alla costruzione di conoscenza;
– alle metodologie e agli strumenti didattici più idonei a una gestione produttiva delle discussioni (Santi, 2006).

La figura che segue si riferisce a un'attività sul metodo scientifico progettata nell'a.s. 2019/2020, da utilizzare durante l'orientamento in ingresso nell'a.s. 2020/2021 in un'ottica di verticalità. Gli studenti vengono invitati a riflettere sul metodo scientifico e in particolare sulle fasi della "previsione" e della "verifica". Lo scopo dell'attività è formulare ipotesi su come varia la gittata del proiettile in funzione dell'inclinazione dell'angolo di lancio. Gli studenti e il docente possono confrontarsi e decidere insieme come far variare l'angolo di lancio e su quali procedure utilizzare per tenere traccia degli esiti dei lanci (come, per esempio, segnare le posizioni di caduta con dei punti A, B, C…). L'ambiente virtuale nel quale osservare i lanci è realizzato mediante Geogebra. La programmazione del software può essere effettuata dal docente o dagli studenti che, in tal modo, imparano le leggi del moto e le applicano realizzando semplici animazioni.

Si tratta di un'attività laboratoriale simulata in ambiente virtuale, sintetizzata dal seguente schema:
– docente: predispone un ambiente virtuale per simulare un fenomeno cinematico – modera un dibattito;
– studenti: applicano il metodo scientifico attraverso le fasi di osservazione:
  - ipotesi;
  - previsione;
  - verifica;
  - conclusione;
– modalità: sincrona;
– obiettivi:

- approfondire il concetto di parabola;
- approfondire il moto del proiettile;
- applicare il metodo scientifico.

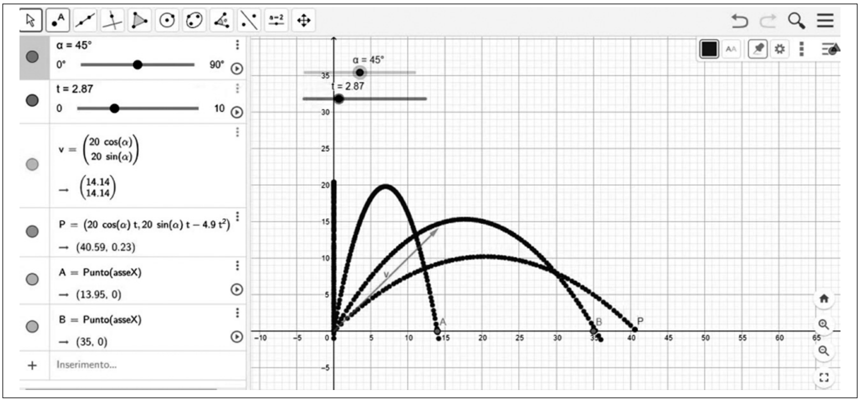


Fig. 7 – Laboratorio virtuale realizzato con Geogebra

4. Dati utilizzati

Quanto avviato in presenza, è poi stato riformulato e proposto anche nella DAD mediante i prerequisiti dei processi cognitivi e metacognitivi indagati nelle prove nazionali che hanno messo in condizione gli alunni di affrontare il problema stabilito inizialmente.

Contestualmente, l'adesione per la prima volta alle gare e ai giochi matematici, da parte di tutto l'istituto, ha permesso di lavorare con una banca dati, in modo da facilitare il processo di insegnamento/apprendimento. Le attività hanno privilegiato la costruzione di un modello risolutivo di una situazione problematica, partendo dalle condizioni e relazioni tra dati e incognite e arrivando alla conseguente procedura risolutiva.

Dall'analisi dei dati INVALSI abbiamo individuato due aspetti critici e un punto di forza dell'apprendimento della Matematica nel nostro istituto.

Sono emerse difficoltà crescenti degli studenti, nel passaggio dalla scuola primaria alla scuola secondaria di I e II grado, nell'apprendimento della Geometria e nello sviluppo delle capacità argomentative (figg. 8-9).

Da quanto emerso, inoltre, durante lo svolgimento delle gare di Matematica sia in presenza sia a distanza abbiamo notato che l'analisi e la risoluzione dei problemi di natura geometrica può essere agevolata se supportata da attività di manipolazione con artefatti che in qualche modo aiutano a rendere più concreti i concetti che normalmente nella scuola superiore sono analizzati e affrontati da un punto di vista astratto. Per alcuni studenti questo passaggio non è scontato ed è auspicabile che l'uso degli artefatti (anche simulati in ambiente virtuale) non venga completamente abbandonato.

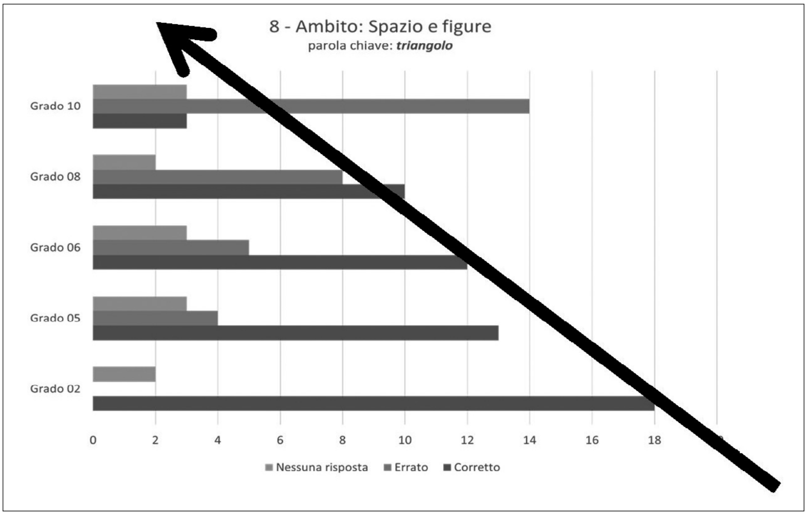


Fig. 8 – Crescente criticità in ambito geometrico nel passaggio dalla scuola secondaria di I grado alla scuola secondaria di II grado

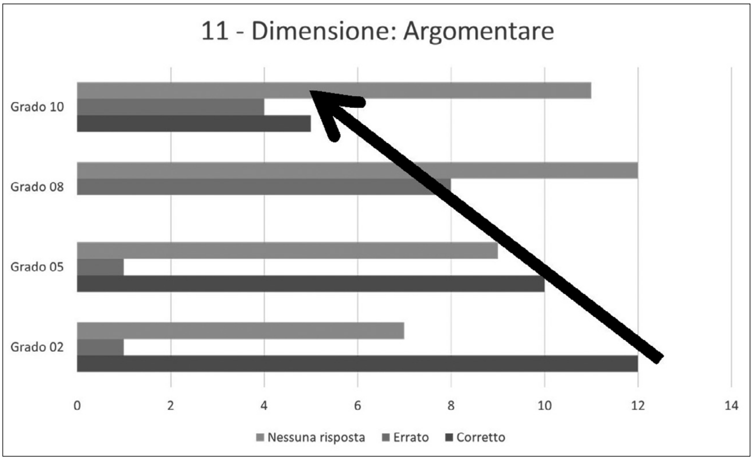


Fig. 9 – Crescente criticità in ambito argomentativo nel passaggio dalla scuola secondaria di I grado alla scuola secondaria di II grado

In compenso abbiamo rilevato che il linguaggio algebrico e l'interpretazione geometrica dello stesso possono costituire una risorsa sulla quale costruire e potenziare il pensiero geometrico degli studenti.

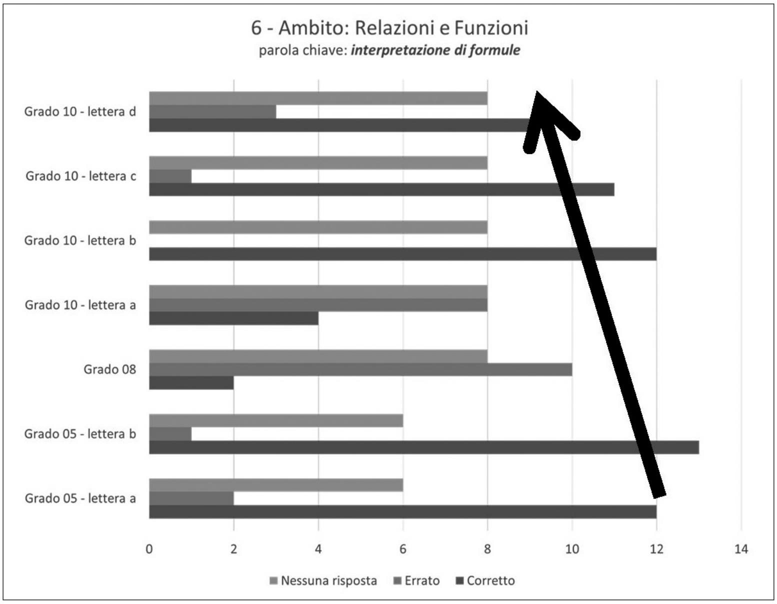


Fig. 10 – Difficoltà contenute nell'ambito Relazioni e funzioni nel passaggio dalla scuola secondaria di I grado alla scuola secondaria di II grado

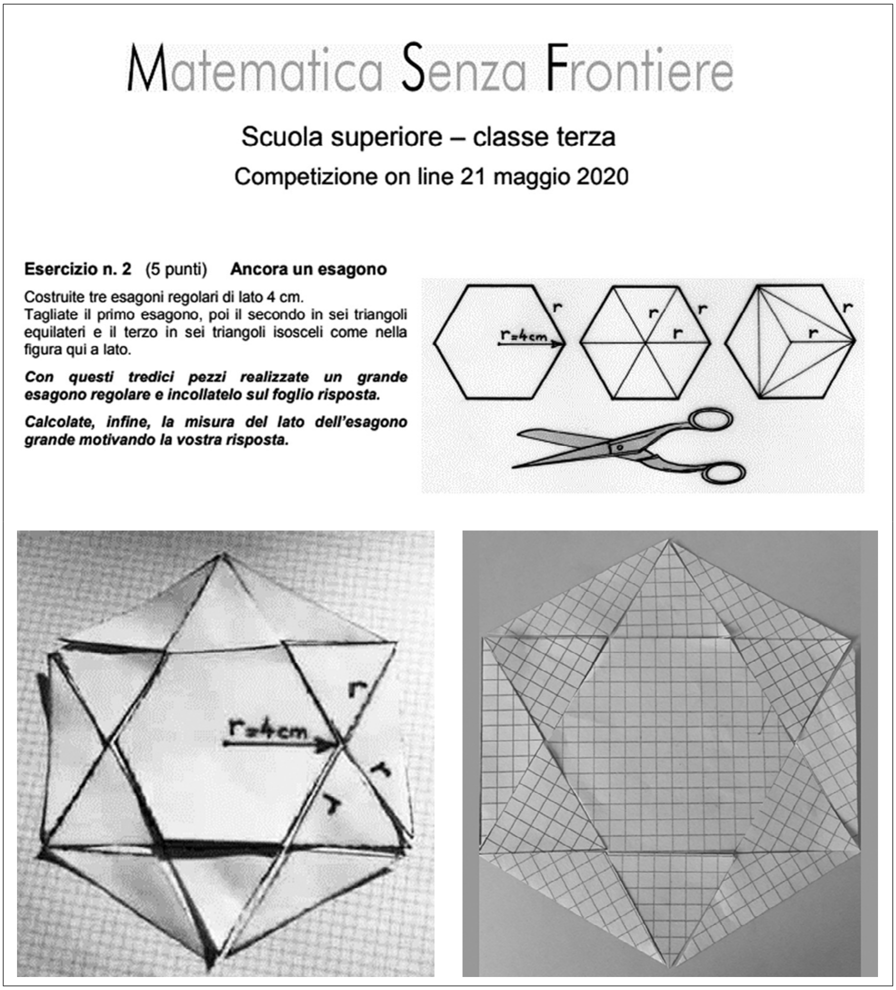


Fig. 11 – Testo e risoluzione di un quesito tratto da una gara di Matematica

5. Risultati

Tutti gli alunni delle classi interessate hanno imparato a usare il software di geometria dinamica GeoGebra. Le finalità e gli obiettivi di apprendimento sono stati: usare GeoGebra come strumento di elaborazione di congetture e di costruzione di concetti; riconoscere relazioni numeriche in contesti geometrici; esplorare tramite software, riflettere e congetturare, argomentare fra pari e con l'insegnante.

Inizialmente si era pensato di utilizzare schede per l'elaborazione delle fasi risolutive di un problema che aiutassero gli studenti a passare dal *linguaggio naturale*, in cui sono formulati i problemi proposti, al *linguaggio algebrico/geometrico* giungendo a trovare un modello e la soluzione dei problemi.

La riorganizzazione della scuola, dovuta alla pandemia da Covid-19, ha reso necessaria una riprogettazione delle attività. Durante il periodo della DAD, gli studenti sono stati coinvolti in:
- attività sincrone di tipo collaborativo (laboratori con compilazione in rete di documenti condivisi, gare di Matematica);
- attività asincrone guidate da questionari con domande stimolo (svolte autonomamente dagli studenti e discusse successivamente con docente e compagni, eventualmente attraverso un elaborato multimediale realizzato dagli studenti stessi).

Molti sono gli esempi di attività svolte confluiti nel database costruito nel periodo della DAD.

Si è instaurata una collaborazione attiva e costruttiva con i docenti dell'Istituto di tutti gli ordini di scuola, che mai avevano utilizzato la multimedialità come pratica in classe o funzionali alle attività svolte in classe (organizzazione e realizzazione dei giochi matematici, orientamento in entrata, supporto al lavoro dei colleghi durante i consigli di classe o per altri adempimenti della funzione docente, adozione per le future classi prime 2020/2021 dei volumi di book in progress).

Si è sviluppato un percorso di autoformazione e di sistematizzazione di buone prassi anche attraverso incontri periodici in cui sono stati condivisi i risultati INVALSI 2018/2019; i risultati dei Giochi del Mediterraneo e di Matematica senza frontiere, l'uso di strumenti diversificati nella valutazione di Matematica-Fisica e dei processi della valutazione formativa nel corso della DAD).

I docenti di Matematica e Fisica, in anno di prova, sono stati coinvolti nelle analisi degli esiti prove INVALSI, delle prove parallele e delle prove delle gare svolte on line per la prima volta sia per i Giochi del Mediterraneo, sia per Matematica senza frontiere. Quest'ultima gara ha coinvolto l'intero consiglio di classe.

Infine, l'autoformazione, tra pari, docenti tutor e docenti neo-immessi in ruolo, mediante la piattaforma GESTINV, ha posto le basi per rivedere il curricolo e le strategie didattiche nell'a.s. 2020/2021 anche in considerazione dei PAI e dei PIA.

Per promuovere l'uso e l'integrazione di risorse digitali (strumenti collaborativi e Geogebra, per citare solo quelli menzionati in questo lavoro) nella normale pratica didattica, sono state operate alcune scelte strategiche:

– adozione di una piattaforma digitale per tutta la scuola, sulla quale condividere materiali (Repository d'istituto) e implementare attività complementari a quelle svolte in classe (Didattica digitale integrata);
– adesione per le classi prime alla rete nazionale Book in progress: "i cambiamenti nella didattica sono fondamentali. L'alunno è posto al centro del processo di apprendimento. Mediante la tecnologia presente nelle nostre aule, alunni e docenti della rete, in qualunque parte del mondo si trovino possono interagire fra loro. Le lezioni vengono videoregistrate e rese disponibili in rete al fine di promuovere ulteriormente lo sviluppo degli apprendimenti" (DS Salvatore Giuliano di Book in progress – incontro online prima delle adozioni per l'a.s. 2021/2022).

Sono state operate delle scelte strategiche in modo che il clima di positivo confronto e costruttiva collaborazione, creatisi durante le gare di Matematica, divenisse sistematicamente parte della prassi didattica quotidiana, così da innalzare i livelli di apprendimento degli studenti.

Le due classi prime del liceo scientifico (1D e 1E), nell'a.s. 2021/2022 sono state organizzate in ambiente laboratoriale in modo da creare una classe aperta. Sono state collocate in uno spazio condiviso: un'aula open space nella mediateca comunale. In tale ambiente gli studenti sono disposti sempre a gruppi di quattro attorno a tavoli di lavoro (opportunamente dotati di divisori in plexiglass, durante l'emergenza sanitaria). In un simile setting d'aula la lezione frontale è impiegata in maniera marginale e durante le attività sono incoraggiati la collaborazione e il confronto di idee tra gli studenti.

L'iniziativa è stata documentata dal Ministero che l'ha messa in rilievo nel suo sito web NoiLeScuole.

Riferimenti bibliografici

Franchi R. (ottobre 2019), *L'angolino*, 1, 2, testo disponibile al sito https://drive.google.com/file/d/1M5duBsuHOvgp1j-oze5boSCpkdjGxMsF/view, data di consultazione 3/8/2022.

Giacci M. (2020), *L'autoformazione a scuola come percorso di sviluppo professionale*, testo disponibile al sito https://scuolaoggi.com/2020/02/04/lautoformazione-a-scuola-come-percorso-di-sviluppo-professionale/, data di consultazione 3/8/2022.

INVALSI (2018), *Quadro di riferimento delle prove di Matematica del Sistema nazionale di valutazione*, testo disponibile al sito https://invalsi-areaprove.cineca.it/docs/file/QdR_MATEMATICA.pdf, data di consultazione 3/8/2022.

Montone A. (2017), *Il mio nome è GeoGebra: uno strumento per migliorare le pratiche didattiche*, testo disponibile al sito http://www.rivistabricks.it/wp-content/uploads/2017/08/11_Montone.pdf, data di consultazione 3/8/2022.

Santi M. (2006), *Ragionare con il discorso. Il pensiero argomentativo nelle discussioni in classe*, Liguori, Napoli.

Stiggins R., Arter J., Chappuis J., Chappuis S. (2004), *Classroom assessment for student learning: doing it right using it well*, Assessment Training Institute, Portland.

Università degli Studi di Ferrara (2000), *Problemi aperti, congetture*, testo disponibile al sito http://dm.unife.it/geometria/Mat2000/conj.htm, data di consultazione 3/8/2022.

3. *GeoSkills: i quesiti INVALSI entrano in* Geometriko*!*

di Leonardo Tortorelli, Nicola Chiriano, Marianna Nicoletti, Emanuela Conte

GeoSkills è un'attività integrata con *Geometriko*, progetto di ricerca nell'ambito della *Didattica della Geometria euclidea* nato nel 2014 e basato sull'omonimo gioco didattico, utilizzato come strumento per rilevazioni e misurazioni di conoscenze e competenze. Il progetto *Geometriko* è gestito dal Centro Pristem dell'Università "L. Bocconi" di Milano e si sostiene su due pilastri. Il primo è il "Torneo nazionale di Geometriko" (TNG), che nel 2020 ha visto iscritti 26.000 studenti di ogni ordine e grado da tutta Italia, il cui scopo è rendere più accattivante e innovativo lo studio della Geometria stimolando curiosità, partecipazione e motivazione degli studenti. Il secondo pilastro è il *Modello didattico Geometriko*, avente come obiettivo il miglioramento delle competenze in geometria. Le classi iscritte al TNG iniziano il percorso di apprendimento sfidandosi, a partire da quesiti denominati *GeoSkills*, in un *Torneo di classe di Geometriko*. Seguiranno un torneo di istituto, i quarti di finale nazionali e, infine, le fasi nazionali (semifinali e finalissima).

Durante una partita di *Geometriko*, lo studente deve rispondere a due questionari. A causa della pandemia di Covid-19, il TNG 2020 si è disputato in modalità online. In tale occasione, i suddetti questionari sono stati svolti in simultanea da tutti i concorrenti tramite moduli Google. Il format nazionale verrà riproposto nella prima fase del TNG 2021 (tornei di classe). In questo modo l'insieme dei questionari previsti potrà anche essere valutato e registrato dal docente come verifica scritta. Ogni questionario è composto da 5 item, da GK1 a GK5, di livelli di difficoltà crescente. Uno o più dei 5 item appartenenti alla stessa domanda – detti *item di taratura* – sono tratti dall'archivio dei quesiti rilasciati da INVALSI (per lo più dell'ambito Spazio e figure); a partire da essi sono stati costruiti i rimanenti item come segue. Il livello degli *item di taratura* è stabilito dalla percentuale di risposte esatte del campione, per come riportata da gestinv.it, in base all'intervallo di ripartizione della distribuzione in quintili, presi in ordine decrescente. Per es. a un item con il 36% di risposte esatte (intervallo dal 20% al 40%) viene attribuito un livello GK4. Il questionario viene quindi assemblato come segue: 3 item di livello rispettivamente GK1, GK2 e GK3, più semplici di quello di taratura, l'*item di taratura* (livello GK4); un ultimo item più difficile (livello GK5).

Dopo la somministrazione, i docenti hanno inviaro tramite Moduli Google le risposte dei questionari al comitato scientifico, il quale ha utilizzato i dati raccolti per poter realizzare un monitoraggio degli apprendimenti su scala nazionale, approfondire la casistica delle misconcezioni riscontrate cercando di analizzarne le cause e proporre eventuali rimedi in occasione della preparazione del TNG 2022. I quesiti sono stati redatti dagli autori utilizzando una piattaforma cloud condivisa (G Drive e G Doc).

GeoSkills is an activity integrated with Geometriko, which is a research project in the field of the Didactics of the Euclidean Geometry started in 2014 and based on the didactic game, also known by the same name. This game is used as an instrument for the evaluation of competences and skills of pupils.

The Geometriko project is managed by the Centro Pristem of the Università "L. Bocconi", Milan, Italy, and it is based on two pillars: 1. The Geometriko National Tournament or, in Italian the Torneo nazionale di Geometriko (TNG) and 2. The Geometriko Didactic Model. The first one, the TNG, has seen in 2020 alone 26.000 pupils subscribed from any school grade. Its aim is to make more innovative and appealing the geometry's learning by stimulating curiosity, participation and motivation of pupils. The second has the aim to improve the geometry's competences.

The classes subscribed to the TNG start the learning path by challenging each other in a Geometriko tournament within the class itself. They do it using a number of questions called GeoSkills. This will be followed by a turnament involving the whole school. The winner students will move to the National "quarter-finals" to then end with the national phases (Semifinal and Final). During a Geometriko match a pupil has to answer to two questionnaires. Due to COVID-19, the TNG 2020 had to be run online. In this case such questionnaires have been answered simultaneously by all participants by using a Google Modules.

The national format will be suggested in the same way in the TNG 2021 (class tournament). In this way the questionnaires proposed could also be evaluated by the teacher as a written test.

Each questionnaire is made of 5 items with different level of difficulty, GK1 being the easier and GK5 being the most difficult.

One or more of the 5 items belonging to the same questions – called calibration's items – are taken from the archive of the questions given by INVALSI (an Italian way to test pupils in every school to evaluate the level of the school) mostly in the field of Space and Shapes. From them the remaining items are built as follows. First of all the level of the calibration is established from the percentage of correct questions of the sample (as reported in gestinv.it) on the base of the distribution in quintiles, taken in decreasing order. i.e. to an item corresponding to 36% of correct answers (interval from 40% to 20%) will be attributed the level GK4. Then the questionnaire is assembled as follows: 3 items of GK1, GK2 e GK3 level respectively, which are easier of the ones of the calibration item (level GK4) and then finally a more difficult item (level GK5).

After having submitted the questionnaire, the teachers sent the answers via the Google Modules to the Scientific Committee. The latter used the data collected in order to monitor the level of learning on a national scale as well as to deepen the statistical data about misconceptions emerging from data, which will allow to identify the possible causes and therefore improving the preparation of the TNG 2022.

The questions have been created by the authors using a shared platform (G Drive and G Doc).

1. Cosa è *Geometriko*?

1.1. Cenni storici sul modello

Geometriko è un modello ludodidattico sperimentale che ben si integra con la didattica tradizionale. *Geometriko* nasce nel 2012 come tesina di un percorso di alta formazione in Psicologia dell'apprendimento della Matematica (avente come direttore scientifico la prof.ssa Daniela Lucangeli, Università di Padova). Nel 2014 la tesi viene pubblicata e già nel 2015, grazie all'impulso della dott.ssa Franca Da Re (dirigente tecnico MIUR-USR Veneto), nasce una rete di istituti di ogni ordine e grado che gestisce una sperimentazione di didattica della geometria euclidea su scala provinciale. Tale sperimentazione, denominata *Torneo pilota di Geometriko*, viene inizialmente limitata alle scuole secondarie di II grado della Provincia di Treviso non licei scientifici e poi estesa nel 2016 agli istituti di ogni ordine e grado di tutta la nazione.

La scelta di partire con l'attività di ricerca dagli istituti superiori non liceo scientifico avvenne perché già allora appariva al di fuori di tali licei più grave la crisi della didattica della Geometria. Non è un mistero, infatti, che molti docenti in tali istituti tendono a trascurarne lo studio per una molteplicità di fattori, tra cui quello ambientale, la bassa motivazione degli allievi che demotiva la classe docente e l'utilizzo di strategie didattiche della geometria ormai desuete.

Nel 2016 tale sperimentazione didattica viene estesa a tutte scuole di ogni ordine e grado a partire dalla terza primaria fino alla terza superiore, sempre col necessario distinguo per gli istituti superiori tra liceo scientifico e non.

Dal 2017 la sperimentazione *Geometriko* passa sotto l'ombrello del Centro Pristem dell'Università "L. Bocconi" di Milano e diventa un'attività di ricerca/azione basata sull'omonimo gioco didattico.

1.2. Breve descrizione del gioco

A inizio gara ogni giocatore riceve tre tipi di carte:

- 4 *carte quadrilatero* da difendere "costi quel che costi";
- 10 *carte d'attacco* (di tipo definizione o teorema) utili a far perdere *carte quadrilatero* agli avversari;
- 1 *flash/nerd card*.

Ciascuna *flash/nerd card*, accattivante dal punto di vista grafico, riserva a sorpresa piccoli handicap di gioco o benefit, spesso a fronte dell'esecuzione di piccoli compiti disciplinari.

Le *flash/nerd card* hanno tre scopi principali. Il primo è quello di offrire un maggior tasso di imprevedibilità e di brio all'attività ludodidattica, il che aumenta notevolmente il livello di inclusività del gioco. La seconda funzione è quella che, all'atto del loro utilizzo, lo studente deve affrontare in un minuto un problem solving più articolato e complesso rispetto a una mossa standard poiché ciascuna *flash/nerd card* giocata cambia gli equilibri di una partita e ne condiziona in modo più o meno impattante il suo andamento. Il terzo obiettivo di tali carte è quello di creare un immediato aggancio psicologico e motivazionale con i discenti, in special modo quelli del primo ciclo.

In fig.1 alcune *flash/nerd card* del gioco, tra cui il famigerato *Caprone Ugo*, che risulta didatticamente una delle carte più interessanti poiché con essa i discenti esercitano una competenza inedita: inventare in un tempo limitato una domanda di teoria o di logica geometrica (senza calcoli dunque) a cui il possessore del *Caprone* deve rispondere in un solo minuto se non vuole incorrere in penalizzazioni di gioco (la c.d. *multona Geometrika*). La domanda ovviamente deve essere coerente con il percorso teorico svolto e con il tempo a disposizione. Chi formula la domanda, per regolamento, è tenuto a saper fornire la risposta se non vuole incorrere anche lui in una multona Geometrika. Dal punto di vista del docente risulta molto interessante come dall'ascolto della domanda che un player pone al possessore del *Caprone Ugo* e dalla conseguente risposta possa farsi un'idea del livello di preparazione dei due allievi coinvolti nella giocata.

Fig. 1 – Esempi di flash/nerd card

Nella fase attiva del gioco, il concorrente si confronta con i suoi competitors in un'attività ludodidattica da concludere con il massimo punteggio di gara possibile, che viene assegnato in base alla classifica dei *punti quadrilatero* (ben visibili su ciascuna carta, v. fig. 2) che ogni giocatore ha in mano al termine di una partita. Il punteggio su ciascuna *carta quadrilatero* è stato assegnato ispirandosi alla gerarchia dei quadrilateri (v. fig. 5 più avanti) e, in base a essa, si va quindi dai 5 punti di una carta quadrilatero generico ai 100 punti di una *carta quadrato*.

Nelle dinamiche standard di gioco sono previste penalizzazioni per i giocatori che, giocando senza cognizione di causa, commettano errori di geometria: la già citata *multona Geometrika*, ossia la perdita di una *carta quadrilatero* estratta a caso dall'arbitro.

A titolo di esempio, nelle due immagini seguenti si riporta, nell'ordine, una giocata con risposta coerente e una con risposta non coerente, che causa una *multona Geometrika*.

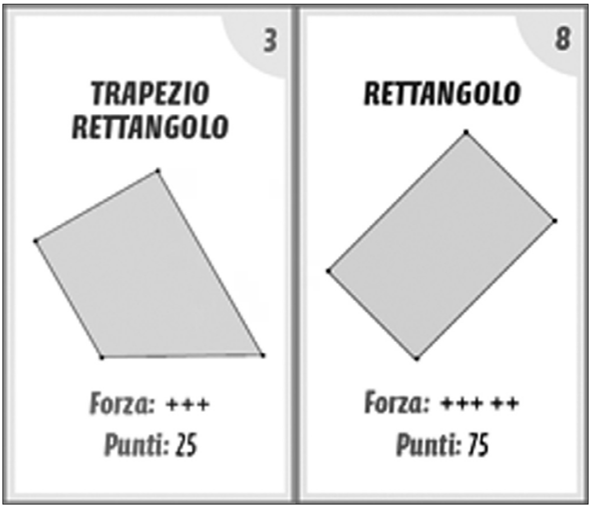


Fig. 2 – Esempi di carte quadrilatero

Fig. 3 – Giocata in cui il difensore risponde coerentemente "Ho vinto!"

Fig. 4 – Giocata in cui il difensore risponde incoerentemente "Ho vinto!"

Un giocatore che rimane con una sola *carta quadrilatero* per restare in gioco deve affrontare i c.d. *Sorteggi della speranza* costituiti ciascuno da 5 *GeoSkills*, di cui si parlerà più diffusamente nei prossimi paragrafi.

Il progetto *Geometriko* si sostiene su due pilastri, che saranno descritti nel prossimo paragrafo: il *Torneo nazionale* e l'omonimo modello teorico/didattico.

2. Primo pilastro: il Torneo nazionale di *Geometriko*

2.1. Numeri e obiettivo del torneo nazionale

Il primo pilastro del progetto è il Torneo nazionale di *Geometriko* (TNG), che anno dopo anno ha visto una sempre maggiore partecipazione in termini di iscrizioni: 400 partecipanti nella sperimentazione provinciale di Treviso del 2015, 3.600 studenti di ogni ordine e grado da tutta Italia nel 2016, 12.400 nel 2017, 19.600 nel 2018, 21.400 nel 2019 fino a giungere nel 2020 alla massima adesione al progetto con circa 26.000 iscrizioni.

L'obiettivo del TNG è quello di rendere più accattivante e innovativo lo studio della Geometria euclidea stimolando attraverso il coinvolgimento nell'attività ludodidattica (il "gioco"), la partecipazione, una sana competizione e la motivazione degli studenti allo studio della geometria.

2.2. Struttura e cronoprogramma del torneo nazionale

Il Torneo nazionale di *Geometriko* è una gara articolata in cinque fasi, elencate qui di seguito con indicato, tra parentesi, il periodo di svolgimento dell'edizione 2021 (la sesta) che ospita questa sperimentazione.

Fase 1) T*orneo di classe/sedicesimi di finale* (febbraio 2021).

È l'oggetto della presente ricerca e consiste in un test scritto, redatto dal nucleo di docenti autori di questo articolo. I risultati del test vengono utilizzati sia per selezionare gli allievi delle varie classi che accederanno agli *ottavi di finale* sia come punteggio disciplinare valido per la partita denominata *finale di istituto*.

Fase 2) *Torneo di istituto/ottavi di finale* (febbraio/marzo 2021).

Fase 3) *Quarti di finale nazionali* ex *Torneo regionale* (marzo 2021).

Fase 4) *Semifinali nazionali* (aprile/maggio 2021)

Fase 5) *Finalissima nazionale* (aprile/maggio 2021).

2.3. Categorie di gara

Le difficoltà dei giochi sono commisurate alle diverse categorie di gara che riportiamo nella seguente tabella insieme ai corrispondenti gradi INVALSI.

Tab. 1 – Corrispondenza tra categoria di Geometriko *e grado INVALSI*

Categoria	*Scuola*	*Classi*	*Grado*
G1	Primaria	4ª, 5ª	G05
G2	Secondaria di I grado	1ª, 2ª, 3ª	G08
G3	Secondaria di II grado non LS	1ª, 2ª, 3ª	G10
G4	Liceo scientifico	1ª, 2ª, 3ª	G10

3. Secondo pilastro: modello didattico *Geometriko*

3.1. Breve descrizione e finalità del modello didattico

Il secondo pilastro del progetto è il modello didattico *Geometriko* la cui nascita risale al 2016, anno in cui la sperimentazione passa sotto l'ombrello del Centro Pristem dell'Università "L. Bocconi" di Milano. Proprio in quell'anno, alla sezione ludodidattica si affianca una fervente attività di ricerca/azione che utilizza *Geometriko* come strumento di rilevazioni annuali di conoscenze e abilità al fine di migliorare con un approccio dinamico sia la formazione degli studenti che la didattica degli insegnanti. Ciò avviene facendo leva sulla dimensione ludodidattica e su misurazioni degli apprendimenti agganciate, mediante un processo di taratura, alla preziosa banca dati gestinv.it messa a disposizione della comunità scolastica e scientifica.

Il modello *Geometriko*, per come è strutturato, contribuisce a individuare ed eliminare misconcezioni diffuse tra studenti (e docenti) e a facilitare grazie all'aumento della motivazione personale l'acquisizione di conoscenze, abilità e competenze soprattutto, ma non solo, nell'ambito Spazio e figure delle Indicazioni nazionali e del Quadro INVALSI di riferimento per la Matematica.

3.2. La gerarchia dei quadrilateri secondo Geometriko

A livello disciplinare, al fine di aumentare la "profondità" della gerarchia dei quadrilateri, *Geometriko* rientra nella scuola di pensiero che considera i parallelogrammi come trapezi particolari. In fig. 5 è riportato un classico diagramma di Eulero-Venn che rappresenta la suddetta gerarchia, in cui l'insieme dei parallelogrammi è un sottoinsieme in quello dei trapezi.

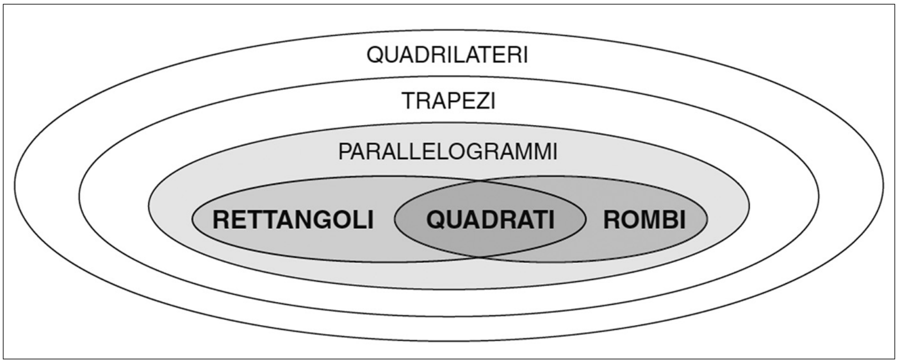


Fig. 5 – Gerarchia quadrilateri

Quello precedente è considerato un *diagramma semplificato* poiché non completo (mancano per esempio alcuni quadrilateri particolari come i vari trapezi, i romboidi e gli aquiloni) e non chiarisce in alcun modo come la classificazione dei trapezi interagisca con la gerarchia dei quadrilateri universalmente accettata dalla letteratura nel caso in cui l'insieme dei trapezi sia un sovra-insieme di quello dei parallelogrammi. Nel modello *Geometriko*, invece, si va a fondo a molte questioni di logica geometrica e di teoria degli insiemi, questioni totalmente ignorate dalla letteratura e dalla didattica tradizionale e/o dominante. La cosa più interessante è che tali domande vengono poste in modo naturale "giocando".

Durante l'attività ludodidattica – in base alla teoria dei quadrilateri universalmente condivisa dai fruitori di *Geometriko* – lo studente deve riflettere, da una giocata singola su domande di *logica geometrika* del tipo:

– "Un rettangolo è o non è un trapezio rettangolo?";
– "Un quadrato è o non è un trapezio isoscele?";
– "Un rombo è o non è un aquilone?".

Di supporto alla riflessione sulle risposte a tali domande – solo all'apparenza banali – oltre che i manuali ufficiali di studio c'è anche un *diagramma complesso* della gerarchia dei quadrilateri (riportato in fig. 6) che caratterizza l'impianto di *Geometriko*. Tale diagramma, la cui comprensione richiede un certo sforzo cognitivo da parte dei discenti, una volta compreso guiderà con maggior sicurezza gli allievi nell'analisi delle domande e nella formulazione delle risposte.

Per intelligere al meglio questo grafico è necessario conoscere le definizioni adottate per i singoli quadrilateri: a tal fine si rimanda al vol. 3 dei *Quaderni di Geometria verticale* interamente dedicato alla trattazione della teoria dei quadrilateri declinando i contenuti in tre livelli di difficoltà graduale: scuola primaria, scuola secondaria di I grado e biennio della scuola secondaria di II grado.

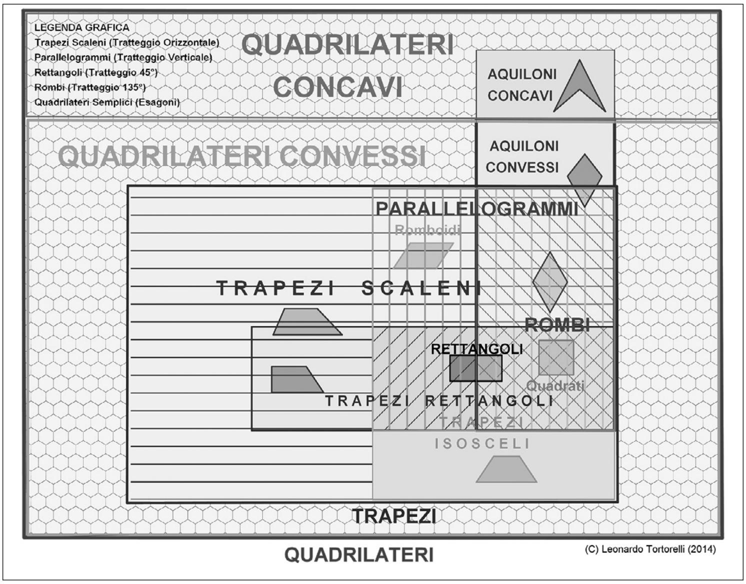


Fig. 6 – Diagramma della gerarchia dei quadrilateri secondo Geometriko

4. Il torneo di classe e i *GeoSkills*

4.1. I **GeoSkills**

Nella nostra sperimentazione definiremo *GeoSkills* i quesiti strutturati per competenze (*skills*) di livello crescente. Tali quesiti hanno il compito di misurare le abilità degli studenti, soprattutto in ambito Spazio e figure.

4.2. Struttura del torneo di classe

Il torneo di classe è utilizzato come verifica sommativa dell'unità didattica *Geometriko* che ha come guida di riferimento non il proprio libro di testo, ma un manuale unico per tutti gli iscritti al torneo nazionale: il III volume della collana di *Quaderni di Geometria verticale* (Dedalo, 2019) interamente dedicato alla *Teoria dei quadrilateri*. Trattandosi di una verifica, per comodità è stata strutturata e condivisa con i docenti una griglia di valutazione in modo che possa risultare per il torneo di classe un esito finale in decimi oltre che un dettagliato correttore. Il docente al termine dell'attività potrà decidere autonomamente se tenere conto o meno di tale verifica ai fini della valutazione finale nel suo registro personale.

Il torneo di classe è composto da due momenti formativi. Nella prima parte del torneo i concorrenti svolgono i questionari dei *GeoSkills* a cui vengono assegnati da 0,0 a 5,0 punti totali. La seconda parte, in cui vengono assegnati da 1,0 a 5,0 punti, è costituita dalla "partita a *Geometriko*", ossia un'attività ludodidattica inclusiva, poiché oltre alle classiche competenze disciplinari e di problem solving tipico di tutti i giochi di strategia, contano le competenze psicologiche e relazionali di ciascun allievo.

Ciò che è evidente in tutto il processo è la centralità dell'alunno; durante tutta l'attività ludodidattica, le carte del gioco (quadrilateri, teoremi, definizioni, *flash* e *nerd card*) si configurano come un mediatore didattico iconico mentre la strategia di gioco, in cui l'alunno è sia attaccante che attaccato, come un mediatore analogico alla portata di tutti i discenti.

4.3. Struttura dei questionari dei **GeoSkills**

Ciascuno dei due questionari dei *GeoSkills* (*Sorteggi della speranza*) è composto da 5 item che testano conoscenze e abilità – generalmente dell'ambito *Spazio e figure* – denominati per l'appunto *GeoSkills*, proposti in un presunto ordine di difficoltà crescente ed etichettati con le sigle GK1, GK2, GK3, GK4 e GK5. Uno o più dei 5 test appartenenti allo stesso *Sorteggio*, detti *item di taratura*, sono tratti dall'archivio dei quesiti INVALSI.

Rete Didattica Nazionale "E. Castelnuovo"
Centro PRISTEM / Università "L. Bocconi"- Milano

Emma Castelnuovo

VI Torneo Nazionale di Geometriko
a.s. 2020/2021

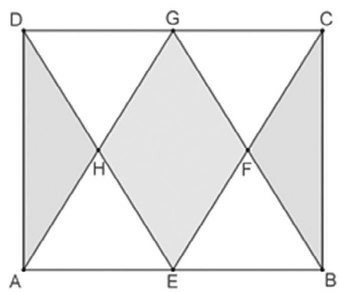
CATEGORIA G1 - 1° SORTEGGIO DELLA SPERANZA

QUESITO N°G1.TDC.2021_1

TORNEO DI CLASSE SDS.1 / CATEGORIA G1

BASATO SUL QUESITO INVALSI RN 2009 - G05 (V Primaria) - D03

Fra' Cicciuzzo regala a Zio Pippuzzo la tela *ABCD* che vedi nella seguente immagine formata da varie figure geometriche, alcune bianche e altre colorate.



[GK1]. La tela *ABCD* ha la forma di un *quadrilatero*, quale? **Risposta:** ______________________

[GK2]. Scrivi la definizione del *quadrilatero* che hai individuato al punto **[GK1]**.

[GK3]. I *triangoli* bianchi sono tutti *triangoli isosceli* e il segmento *AH* misura 3,5 cm. Allora il perimetro del *rombo EFGH* è… **Risposta:** ___________ cm.

[GK4]. Zio Pippuzzo osserva le figure geometriche della tela e afferma: «Ci sono 4 *triangoli isosceli* e 2 *rombi*!». Fra' Cicciuzzo invece sostiene: «Non è vero, ci sono 6 triangoli equiestesi al *triangolo AEH*!». Solo uno dei due ha ragione. Chi? Giustifica la risposta.

Risposta: ______________________ 

Giustificazione: ____

____

____

[GK5]. A quale frazione della superficie del *rettangolo* corrisponde la parte colorata?

A. ☐ $\frac{1}{2}$. **B.** ☐ $\frac{3}{4}$. **C.** ☐ $\frac{4}{7}$. **D.** ☐ $\frac{4}{6}$.

Fig. 7 – Sorteggio della speranza, categoria G1

Rete Didattica Nazionale "Emma Castelnuovo"
Centro PRISTEM / Università "L. Bocconi", Milano

VI Torneo Nazionale di Geometriko
a.s. 2020/2021

CATEGORIA G2 - 2° SORTEGGIO DELLA SPERANZA

QUESITO N°G2.TDC.2021_2

TORNEO DI CLASSE SDS.2 / CATEGORIA G2

BASATO SUL QUESITO INVALSI RN 2015 - G08 (III Secondaria di 1° grado) – D11

[GK1]. Considera la frase "*Almeno una diagonale è asse di simmetria per il quadrilatero*". Per quale quadrilatero questa frase è FALSA?

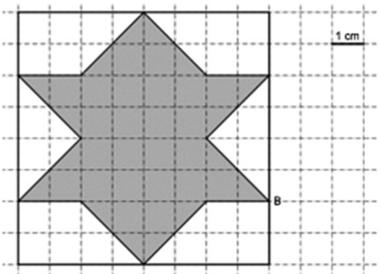
A. ☐ *Rombo.*

B. ☐ *Rettangolo.*

C. ☐ *Quadrato.*

D ☐ *Aquilone.*

Osserva la seguente figura formata da un quadrato Q al cui interno è disegnato un poligono colorato S a forma di stella.



[GK2]. Qual è l'area del poligono S?

Risposta: _________ cm^2.

[GK3]. Quale tra le seguenti misure si avvicina maggiormente al perimetro del poligono grigio?

A. ☐ 22 cm.

B. ☐ 24 cm.

C. ☐ 31 cm.

D ☐ 32 cm.

[GK4]. Disegna una diagonale del *quadrato Q*. La diagonale è asse di simmetria del poligono S?

A. ☐ Sì, perché la diagonale divide il poligono in due parti uguali e simmetriche.

B. ☐ Sì, perché la diagonale è asse di simmetria del quadrato.

C. ☐ No, perché il poligono grigio non ha assi di simmetria.

D ☐ No, perché il simmetrico di B rispetto alla diagonale non è un vertice del poligono grigio.

[GK5]. Sia W la figura geometrica costituita dalla parte bianca del *quadrato*.

Qual è la percentuale di superficie di Q ricoperta da W?

Risposta: _________ %.

Fig. 8 – Sorteggio della speranza, categoria G2

A titolo di esempio, si riportano due questionari dei *GeoSkills* (figg. 6-7): uno di categoria G1 (scuola primaria) e uno di categoria G2 (scuola secondaria di I grado). Purtroppo, a causa della pandemia, per le categorie G3 (scuola secondaria di II grado non liceo scientifico) e G4 (scuola secondaria di II grado liceo scientifico), si è stati costretti a rinviare la sperimentazione al successivo anno scolastico 2021/2022.

L'*item di taratura* è considerato nel nostro lavoro di ricerca come un livello *GeoSkills* di riferimento, poiché a partire da esso sono stati costruiti i rimanenti item. Nell'immagine che segue si illustra in che modo è stato assegnato il livello GKX a ciascun *item di taratura*: l'associazione avviene in base a quale intervallo X di ripartizione individuato dalla distribuzione dei quintili, presi in ordine decrescente, si colloca la percentuale di risposte esatte del campione rilasciata da INVALSI (fonte dati: gestinv.it).

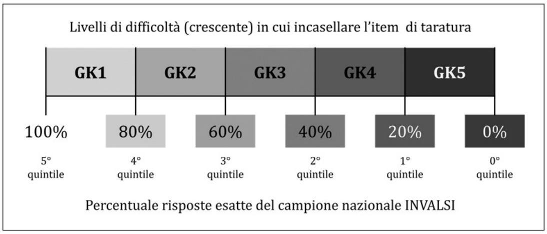


Fig. 9 – Schema di assegnazione livello di difficoltà degli item di taratura

Per esempio, a un item INVALSI con il 58% di risposte esatte del campione (intervallo dal 40% al 60%) viene attribuito un livello GK3. Il *Sorteggio della speranza* viene quindi costruito come segue: 2 item di livello rispettivamente GK1 e GK2 "più semplici" di quello di taratura, l'*item di taratura* (livello GK3) e due item "più difficili" (livello GK4 e GK5).

Nota importante: il livello di difficoltà GKX assegnato *ex ante* a ciascun item non di taratura dagli autori – ossia prima della somministrazione del questionario *GeoSkills* – è ovviamente basato su una stima presunta. Dopo la somministrazione dei test e l'elaborazione dei dati restituiti, si otterrà, in base ai risultati del campione, la conferma dell'esattezza o meno del livello GKX assegnato a ciascun *GeoSkills ex ante*. In future edizioni del torneo, la prova sarà ristrutturata assegnando a ciascun *GeoSkills* il livello corrispondente agli esiti della rilevazione. Il questionario viene così riorganizzato e restituito alla comunità scolastico/scientifica con una struttura costituita da *GeoSkills* cui sono assegnati livelli GKX più rispondenti ai reali livelli di competenze posseduti dagli allievi.

4.4. Griglia di valutazione

Nell'immagine è riportata la griglia di valutazione in decimi di un torneo di *Geometriko*, cui più volte si è fatto riferimento.

In particolare, i contenuti delle due sezioni sono i seguenti:

– valutazione in decimi dell'attività strettamente disciplinare (il questionario dei *GeoSkills*) con punteggio che va da 0,0 a 5,0 punti e che dipende dal numero di *GeoSkills* a cui si è risposto in modo corretto;
– valutazione dell'attività ludodidattica (il "gioco") che dipende dalla posizione di gara raggiunta a fine partita e che va da 1,0 a 5,0 punti.

GRIGLIA DI VALUTAZIONE - Tavolo da 3 a 6 Giocatori (o Coppie)			
INDICATORI		PUNTI	
Sezione 1 - Valutazione delle abilità e competenze nell' ATTIVITA DISCIPLINA		PUNTI	LIVELLO
Valutazione della risposta al *Sorteggio della Speranza* n.1 => (somministrato in forma scritta prima della gara)	Nullo	0,0	/
	Gravemente Insufficiente	0,5	GK1
	Insufficiente	1,0	GK2
	Sufficiente	1,5	GK3
	Discreto / Buono	2,0	GK4
	Distinto / Eccellente	2,5	GK5
Valutazione della Risposta al *Sorteggio della Speranza* n.2 => (somministrato in forma scritta prima della gara)	Nullo	0,0	/
	Gravemente Insufficiente	0,5	GK1
	Insufficiente	1,0	GK2
	Sufficiente	1,5	GK3
	Discreto / Buono	2,0	GK4
	Distinto / Eccellente	2,5	GK5
Sezione 2 - Valutazione competenze evidenziate nel corso dell'ATTIVITA LUDODIDATTICA			
Posizione raggiunta nell'attività ludodidattica al termine della gara	5°/6° Posto	1,0	
	4° Posto	2,0	
	3° Posto	3,0	
	2° Posto	4,0	
	1° Posto	5,0	
Condotta durante la gara	da 0,0 a -3,0	#	
VALUTAZIONE (in decimi)		0,0	/ 10

Fig. 10 – Griglia di valutazione utilizzata nei tornei di classe di Geometriko

5. Restituzione, elaborazione e analisi dei risultati

5.1. Modalità di restituzione/elaborazione dei risultati dei GeoSkills

I test sono stati elaborati dagli autori attraverso le webapp di Google (G Docs e G Sheets), attraverso le quali ciascun autore ha potuto fornire il suo contributo.

La somministrazione del test è avvenuta in data 9 febbraio 2021 su un campione su scala nazionale di circa 4.500 studenti di scuola primaria e secondaria di I grado. I docenti di ciascun istituto hanno raccolto e condiviso i propri risultati attraverso G Sheet; successivamente, ciascun coordinatore di istituto del progetto *Geometriko* ha provveduto alla trasmissione delle risposte al comitato scientifico mediante G Forms. Il comitato scientifico, una volta acquisiti da G Form tutti i dati di ciascun istituto partecipante alla rilevazione sperimentale, li ha rielaborati utilizzando G Sheet e ha realizzato dei report di sintesi con G Slides.

5.2. Obiettivi dell'elaborazione e analisi dei risultati dei test

I dati ricevuti dai singoli istituti delle categorie G1 e G2 sono stati elaborati dalla Commissione che si è proposta di conseguire gli obiettivi seguenti:

- determinare gli item con la maggiore percentuale di insuccesso al fine di individuarne le cause o l'esistenza di eventuali misconcezioni;
- nei casi in cui emergono le percentuali più elevate di errore, proporre modifiche al manuale di riferimento (QGV – vol. 3) da integrare nelle nuove edizioni entro il TNG 2022, o realizzare nuovi materiali di studio integrativi a esso;
- confrontare le percentuali di successo degli *item di taratura* (gestinv.it) con quelle ottenute, per riflettere sull'efficacia del modello Geometriko in base ai risultati ottenuti.

A causa della situazione sanitaria dovuta alla pandemia da Covid-19 si è dovuta rinviare la sperimentazione per quel che concerne le categorie G3 e G4 (studenti della scuola secondaria di II grado) poiché tale segmento è stato quello più colpito dalla pandemia in termini di soppressione delle lezioni in presenza.

5.3. Analisi dei dati e osservazioni sulla categoria G1

5.3.1. Obiettivo 1

Il primo obiettivo di questa ricerca è stato quello di individuare gli item con la maggiore percentuale di insuccesso al fine di evidenziare le possibili misconcezioni per poi ipotizzarne le cause. Grazie a tale analisi è stato possibile stabilire se le misconcezioni rilevate sono *evitabili* o *inevitabili.*

Il campione di alunni coinvolti di scuola primaria è stato di 731 unità di 4ª e 5ª classe (iscritte al TNG). Nel diagramma seguente è riportata la ripartizione degli alunni per macroregione italiana e per classe di iscrizione.

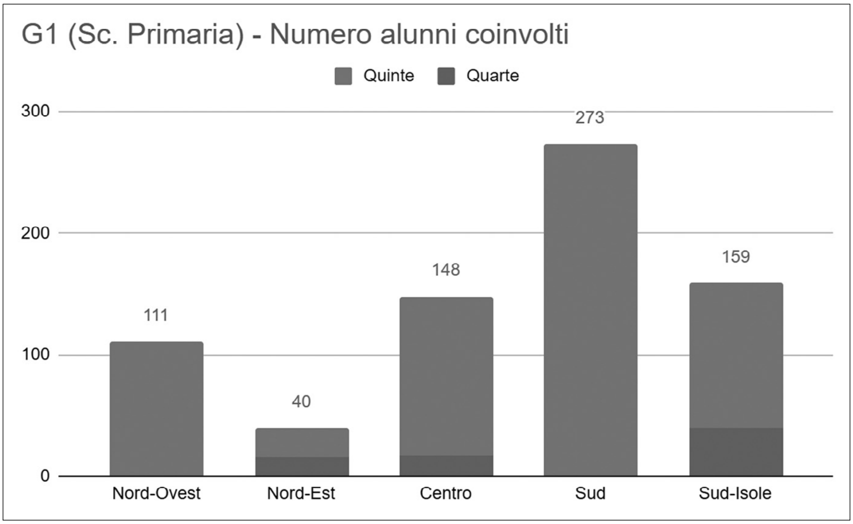
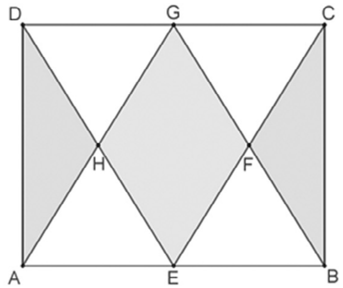


Fig. 11 – Alunni coinvolti al TNG 2021, categoria G1

L'*item di taratura* proviene dalle RN INVALSI di grado G05, per tale ragione nel confronto dei risultati si è tenuto conto soltanto dei risultati degli alunni di 5ª primaria del campione.

Il *GeoSkill* che ha attirato l'attenzione della Commissione è stato il GK2 del 1° SdS (range di insuccesso atteso tra il 20% e il 40%) che ha registrato una percentuale di risposte errate pari al 58,4% (corrispondente a un livello di difficoltà GK3 e range di insuccesso atteso tra il 40% e il 60%).

Fra' Cicciuzzo regala a Zio Pippuzzo la tela *ABCD* che vedi nella seguente immagine formata da varie figure geometriche, alcune bianche e altre colorate.



[GK1]. La tela *ABCD* ha la forma di un *quadrilatero*, quale? **Risposta:** ______________________

[GK2]. Scrivi la definizione del *quadrilatero* che hai individuato al punto **[GK1]**.

Fig. 12 – Quesiti [GK1] e [GK2] del 1° SdS della categoria G1

La nostra congettura sul risultato ottenuto è che questo alto tasso di risposte errate è probabilmente da addebitare all'utilizzo che si fa nella didattica della scuola primaria delle c.d. *carte di identità dei quadrilateri*. Tali documenti, contenenti per ciascun quadrilatero un elenco di alcune proprietà di cui gode, costituisce probabilmente uno strumento di apprendimento mnemonico piuttosto che logico. Quest'affermazione è basata su un sondaggio-intervista effettuato su un piccolo campione di docenti le cui classi hanno ottenuto i peggiori risultati nelle *GeoSkills*. Da tale indagine è emerso che:

– circa la metà di tali insegnanti ha utilizzato per la preparazione dei bambini solo i sussidiari e le relative "carte di identità";
– circa un quarto dei docenti ha optato per una preparazione mista tra sussidiari e *Quaderni di Geometria verticale*;
– il restante quarto, pur avendo utilizzato il terzo volume dei *Quaderni*, addebita il risultato negativo sostanzialmente a fattori ambientali (zone ad alto tasso di degrado) e alla scarsa continuità di lavoro dovuto a contingenze inerenti alla situazione pandemica in corso (quarantene, eccesso di DAD, problemi di salute personali).

Ovviamente tali conclusioni andrebbero ulteriormente confermate da un analogo studio effettuato su un campione di docenti più numeroso. In ogni caso, dai risultati del sondaggio potremmo ipotizzare che le *carte di identità dei quadrilateri*, se da un lato migliorano il livello mnemonico delle conoscenze, dall'altro ne impoverisce la logica sottostante poiché il bambino perde "il gusto" della scoperta graduale e logica delle proprietà di ciascun quadrilatero a partire da una sua definizione minimale e ovviamente univoca. I bambini che hanno studiato sui sussidiari piuttosto che dai *Quaderni di Geometria verticale*, da quanto emerso dai risultati delle *GeoSkills* e del successivo sondaggio, confondono una *definizione* con una *descrizione* delle figure geometriche depauperando quella che è la vera ricchezza della geometria euclidea: l'aspetto logico-deduttivo seppur a uno stadio elementare. Tornando al quesito, i bambini seppur riconoscono in GK1 la forma del rettangolo, in GK2 non riescono a fornire una sua definizione ossia una descrizione minimale e univoca di tale figura. Il programma *Geometriko* ha tra i suoi obiettivi per la primaria proprio questo traguardo: la distinzione consapevole tra descrizione e definizione di una figura geometrica.

Per indagare più a fondo sulla causa dell'elevata percentuale di insuccesso, il prossimo anno nel form di restituzione dati saranno inserite alcune domande sotto forma di rapida intervista rivolta ai docenti coinvolti nella rilevazione. Da tale questionario si assumerà quale loro percentuale – contrariamente alle indicazioni dell'organizzazione – abbia utilizzato il sussidiario o altri materiali per la preparazione del torneo piuttosto che la pubblicazione ufficiale (*Quaderni di Geometria verticale/Quadrilateri*, 3).

Le domande integrative da sottoporre ai docenti in occasione del Torneo nazionale dei *Geometriko* del 2022 saranno del tipo:

– per la preparazione teorica del torneo di classe i bambini hanno usato:
  - il sussidiario in adozione e/o altri materiali;
  - *Quaderni di geometria verticale/Quadrilateri*;
  - sia il sussidiario che i *Quaderni di Geometria verticale/Quadrilateri*.

  In caso di scelta dell'opzione (a):

– non sono stati utilizzati i *Quaderni di Geometria verticale*:
  - perché essendo un materiale più impegnativo rispetto agli altri si è optato per un'alternativa più semplice e veloce;
  - per mancanza di tempo in classe o di tempo personale per poterli interiorizzare e trasmettere agli alunni;
  - perché non lo ritengo un materiale valido.

5.3.2. Obiettivo 2

Una volta individuato l'item più problematico, il secondo step del nostro lavoro è stato quello di pensare a un'ipotesi di soluzione didattica alle difficoltà emerse. In questo caso, vista l'elevata percentuale di errore registrata sull'item GK2 del 1° SdS, più che una semplice integrazione/modifica del testo ufficiale (Q.G.V.) si è pensato a un vero e proprio percorso di ricerca denominato "Dalla descrizione alla definizione". Tale progetto sarà realizzato nel prossimo biennio ed eventualmente divulgato in una futura pubblicazione, output di un idoneo percorso di ricerca da portare avanti in collaborazione con le università che intenderanno farvi parte. Il nome del programma è molto esplicativo poiché, a partire da alcune pagine di teoria integrativa il *Quaderno di Geometria verticale* si procederà in una seconda fase con una serie di quesiti ed esercizi mirati alla distinzione tra *descrizioni* e *definizioni* di quadrilateri. La terza fase vedrà gli allievi impegnati in un'attività ludodidattica che fungerà, al pari di *Geometriko*, da raccoglitore di dati e risultati. La quarta e ultima fase sarà quella dell'elaborazione dei dati e della restituzione dei risultati alla comunità scientifica attraverso apposita pubblicazione.

5.3.3. Obiettivo 3

In questa fase di analisi sono state confrontate le percentuali di successo di tutti gli *item di taratura* (INVALSI, da gestinv.it) con quelle ottenute durante la sperimentazione con il nostro campione al fine di riflettere sull'efficacia del modello *Geometriko* in base ai risultati ottenuti.

I dati ottenuti dalle RN INVALSI e dal nostro campione negli *item di taratura* sono i seguenti.

Categoria G1 – 1° Sorteggio della speranza/item di taratura [GK5]

Quesito INVALSI RN 2009 – G05 – D03

– percentuale di successo: 11,9% → [GK5: da 0% a 20%] (dati: http://www.gestinv.it/Matematica);
– percentuale di successo: 40,9% → [GK3: da 40% a 60%] (dati: rilevazione 6° Torneo nazionale di *Geometriko*).

Confronto *Geometriko*/RN: + 29,0%.

Categoria G1 – 2° Sorteggio della speranza/item di taratura [GK4]

Quesito INVALSI RN 2014 – G05 – D14;

– percentuale di successo: 31,3% → [GK4: da 20% a 40%] (dati: http://www.gestinv.it/Matematica);
- percentuale di successo: 45,7% → [GK3: da 40% a 60%] (dati: rilevazione 6° Torneo nazionale di Geometriko).

Confronto *Geometriko*/RN: + 14,4%.

In entrambi i casi, i concorrenti di *Geometriko* hanno sovra-performato in modo evidente i risultati della Rilevazione nazionale addirittura con percentuali a doppia cifra. Ipotizziamo che il risultato sia dovuto in parte alla struttura del questionario *GeoSkills* che conduce i discenti a ragionare in modo più graduale rispetto a un item "secco" di INVALSI. Questa ipotesi andrebbe ovviamente approfondita. Altra ipotesi sensata sul risultato ottenuto è che la migliore performance del modello *Geometriko* si debba al fatto che i concorrenti del torneo compiono uno specifico e più approfondito percorso formativo strutturato inerente all'ambito Spazio e figure, caratterizzato da diversi momenti in cui si esercitano le competenze logiche e argomentative.

5.4. Analisi dei dati e osservazioni sulla categoria G2

5.4.1. Obiettivo 1

Il campione di alunni coinvolti di scuola secondaria di I grado è stato di 3.748 unità di 1ª, 2ª e 3ªclasse. Nel diagramma seguente è riportata la ripartizione degli alunni per macro-regione italiana e per classe di iscrizione.

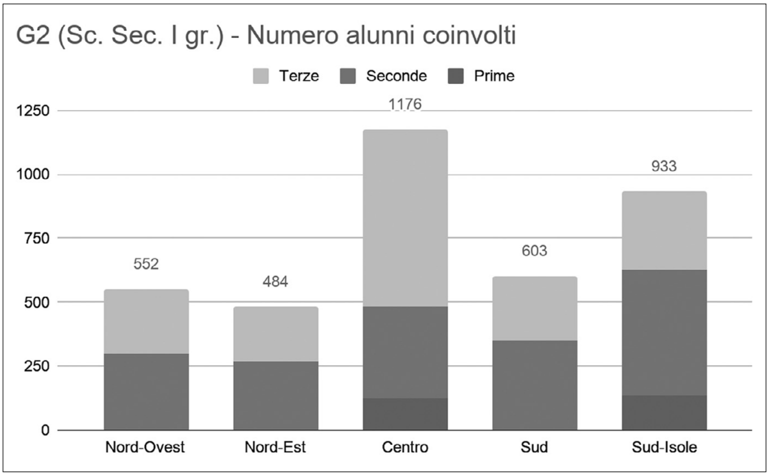


Fig. 13 – Alunni coinvolti al TNG 2021, categoria G2

L'*item di taratura* proviene dalle RN INVALSI di grado G08, per tale ragione si è tenuto ovviamente conto soltanto dei risultati dei soli alunni di 3ª classe del campione.

Per quel che concerne la 3ª classe della scuola secondaria di 1° grado, il *GeoSkills* che ha attirato l'attenzione della Commissione è stato il GK3 (range di insuccesso atteso compreso tra il 40% e il 60%) del 2° *Sorteggio della speranza* che ha registrato una percentuale di risposte errate pari all'88,6% (corrispondente a un livello di difficoltà GK5 e range di insuccesso atteso tra l'80% e il 100%).

[GK3]. Quale tra le seguenti misure si avvicina maggiormente al perimetro del poligono grigio?

A. ☐ 22 cm.
B. ☐ 24 cm.
C. ☐ 31 cm.
D ☐ 32 cm.

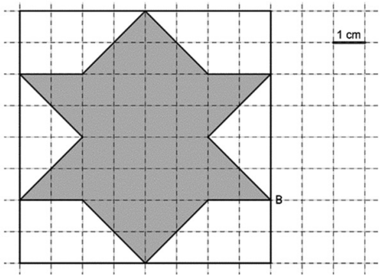


Fig. 14 – Quesito [GK3] del 2° SdS della categoria G2

Più che l'elevato tasso di errore, ciò che lascia esterrefatti è che il distrattore [B] è stato indicato come risposta esatta dal 64,2% del campione. Gli studenti hanno considerato i lati con inclinazione di 45° rispetto al bordo inferiore del foglio congruenti a quelli paralleli a esso!

Si chiede loro un'approssimazione del perimetro, ma i ragazzi contano i quadratini considerando le loro diagonali congruenti al lato. In terza media i ragazzi sanno applicare il teorema di Pitagora e sanno che la diagonale del quadrato non ha la stessa misura del lato. Nonostante ciò, in un contesto più articolato e complesso come quello di un poligono inconsueto questa conoscenza sfugge incredibilmente.

5.4.2. Obiettivo 2

Analogamente a come si è operato per la categoria G1, una volta individuato l'item più problematico, il secondo step del nostro lavoro è stato quello di pensare a un'ipotesi di soluzione didattica per ridurre l'incidenza di questo tipo di errori. In questo caso, vista la particolarità e la precisa delimitazione della misconcezione evidenziata dagli allievi, questo gruppo di lavoro si propone di realizzare una pubblicazione contenente testo e svolgimento di entrambi i *Sorteggi della speranza* somministrati al 6° TNG per la categoria G2 con particolare attenzione rivolta al quesito GK3 del 2° SdS. Per quest'ultimo quesito, inoltre, si realizzeranno alcune video-lezioni in pillole che, partendo dai risultati riscontrati nel *GeoSkill* GK3 del 2° SdS, proporranno ai fruitori prima la sua soluzione corretta e poi dei quesiti della stessa tipologia, ossia sul calcolo di aree di poligoni non standard mediante equiscomposizioni, ma soprattutto sul calcolo dei perimetri di tali figure in modo da consolidare l'insegnamento proposto.

Per giudicare l'impatto di queste due attività, in occasione del 7° TNG, verrà proposta un nuovo *GeoSkill* atto a verificare se lo studente possegga o meno la misconcezione evidenziata dai risultati del *GeoSkill* GK3 del 2° SdS. I dati saranno raccolti, elaborati e confrontati con quelli del 6° TNG in modo da verificare la bontà dei materiali realizzati e proposti alla community di *Geometriko*.

5.4.3. Obiettivo 3

In questa fase di analisi sono state confrontate le percentuali di successo di tutti gli *item di taratura* (INVALSI, da gestinv.it) con quelle ottenute, per riflettere sull'efficacia del modello Geometriko in base ai risultati ottenuti.

I dati ottenuti dalle RN INVALSI e dal nostro campione negli *item di taratura* sono i seguenti:

Categoria G2 – 1° Sorteggio della speranza/item di taratura [GK1]
Quesito INVALSI RN 2015 – G08 – D08.b1

– percentuale di successo: 81,7% → [GK1: da 80% a 100%] (dati: http://www.gestinv.it/Matematica);
– percentuale di successo: 86,8% → [GK1: da 80% a 100%] (dati: rilevazione 6° Torneo nazionale di Geometriko).

Confronto *Geometriko*/RN: + 5,1%.

Categoria G2 – 1° Sorteggio della speranza/item di taratura [GK2]
Quesito INVALSI RN 2015 – G08 – D08.b3

– Percentuale di successo: 79,7% → [GK2: da 60% a 80%] (dati: http://www.gestinv.it/Matematica);
– Percentuale di successo: 81,7% → [GK1: da 80% a 100%] (dati: rilevazione 6° Torneo nazionale di Geometriko).

Confronto *Geometriko*/RN: + 5,1%.

Categoria G2 – 1° Sorteggio della speranza/item di taratura [GK1]
Quesito INVALSI RN 2015 – G08 – D08.b2

– percentuale di successo:53,2% → [GK3: da 40% a 60%] (dati: http://www.gestinv.it/Matematica);
– percentuale di successo: 58,2% → [GK3: da 40% a 60%] (dati: rilevazione 6° Torneo nazionale di Geometriko).

Confronto *Geometriko*/RN: + 5,0%.

In tutti e tre gli *item di taratura* del 1° SdS i concorrenti di Geometriko hanno ottenuto una percentuale di risposte corrette superiore di circa il 5% rispetto ai pari livello nelle RN.

Per quel che concerne il 2° SdS si sono ottenuti i seguenti riscontri.

Categoria G2 – 2° Sorteggio della speranza/item di taratura [GK2]
Quesito INVALSI RN 2015 – G08 – D11.a

– percentuale di successo: 60,6% → [GK2: da 60% a 80%] (dati: http://www.gestinv.it/Matematica);
- percentuale di successo: 71,3% → [GK3: da 60% a 80%] (dati: rilevazione 6°Torneo nazionale di Geometriko).

Confronto *Geometriko*/RN: + 10,8%.

Categoria G2 – 2° Sorteggio della speranza/item di taratura [GK4]
Quesito INVALSI RN 2015 – G08 – D11.b

- percentuale di successo:37,7% → [GK3: da 20% a 40%] (dati: http://www.gestinv.it/Matematica);
– percentuale di successo: 46,9% → [GK3: da 40% a 60%] (dati: rilevazione 6° Torneo nazionale di Geometriko).

Confronto *Geometriko*/RN: + 9,2%.

In tutti e due gli *item di taratura* del 2° SdS i concorrenti di Geometriko hanno ottenuto una percentuale di risposte corrette superiore di circa il 10% rispetto ai pari livello nelle RN.

A conferma di quanto già osservato per la categoria G1, i player di Geometriko hanno sovra-performato in modo rilevante i risultati della Rilevazione nazionale. In questo caso, al contrario della categoria G1, siamo certi che il risultato esuli dalla strutturazione graduata del questionario *GeoSkills* perché gli *item di taratura* del 1° SdS della categoria G2 sono i primi tre. Senza dubbio, pertanto, per questo risultato va dato il giusto riconoscimento alle qualità del modello *Geometriko*.

I risultati ottenuti, inoltre, sono ancor più apprezzabili se si rammenta che il nostro questionario è stato somministrato il 9 febbraio e non a maggio come le prove INVALSI: tre mesi di scuola in meno non sono trascurabili ai fini degli apprendimenti, per di più in un tragico periodo storico caratterizzato dalla pandemia e dalla DaD/DDI che ha inevitabilmente compromesso gli ultimi due anni scolastici.

5.5. Conclusioni sul confronto dei risultati di G1 e G2

Dalle osservazioni empiriche effettuate in sei anni di torneo nazionale e dalle soluzioni in archivio, sembrerebbe che il modello *Geometriko*, tenda a potenziare nei discenti di tutte le età le competenze argomentative e quelle di logica sviluppando il c.d. *pensiero laterale geometriko*, ossia le fondamenta di una *forma mentis* che educa prima i bambini e poi gli adolescenti ad argomentare le risposte anche in modo non convenzionale e certamente più elegante. Tale pensiero, opportunamente stimolato e sviluppato nel corso degli anni, farà sì che test strutturati di geometria o algebra con riferimenti geometrici come quelli INVALSI diventino non un *ambiente ostile* ma un ambiente di apprendimento *amicale* in cui muoversi senza troppa ansia incrementando le proprie chance di successo grazie alle maggiori competenze acquisite in questo percorso verticale di formazione.

5.6. Il futuro dei GeoSkills

Geometriko è un progetto di ricerca che si sviluppa e si perfeziona di anno in anno. I *GeoSkills* nati nel 2021 durante l'emergenza pandemica come un'alternativa ai quesiti dei *Sorteggi della speranza* che venivano somministrati uno per volta durante le partite "fisiche" con le carte di *Geometriko*, diventano oggi un'interessante proposta di sviluppo del modello in quanto, proposti sotto forma di questionario somministrato a tutta la classe, consentono una valutazione più oggettiva e omogenea di tutti i candidati.

Nella sesta edizione del Torneo nazionale di *Geometriko* si contano 16.000 studenti iscritti; di questi ha partecipato a questa sperimentazione un campione rappresentativo di circa 5.000 studenti. Viste le potenzialità dello strumento, i *GeoSkills* saranno utilizzati su una più vasta scala già dalla prossima edizione del Torneo nazionale di *Geometriko*.

Le prospettive dei *GeoSkills* si possono sintetizzare nei seguenti punti:

– utilizzo come strumento di sviluppo ed *empowerment* del modello *Geometriko* non solo per i tornei di classe ma anche per le semifinali nazionali;
– utilizzo dei *GeoSkills* G3/G4 del corrente 6° Torneo nazionale come pretest per quelle del 7° Torneo nazionale;
– le innovazioni di questa ricerca diventeranno strutturali, infatti, la nuova versione *Geometriko* 5 (2023) sarà rimodulata con i *Sorteggi della speranza* in modalità *GeoSkills*.

Riferimenti bibliografici

Chiriano N. (2010), *In classe con la Matematica della vita e la didattica digitale*, testo disponibile al sito https://www.invalsiopen.it/Matematica-in-classe-didattica-digitale/, data di consultazione 3/8/2022.

Chiriano N., Bruno R., Chiodo T.A. (in press), "Dati INVALSI e G Suite: prove di condivisione e confronto "ad intra", in P. Falzetti (a cura di), *I dati INVALSI come*

strumento per l'innovazione e il miglioramento scolastico. IV Seminario "I dati INVALSI: uno strumento per la ricerca e la didattica", FrancoAngeli, Milano.
INVALSI (2919), *Rapporto nazionale prove INVALSI 2019*, testo disponibile al sito https://invalsi-areaprove.cineca.it/docs/2019/Rapporto_prove_INVALSI_2019.pdf, data di consultazione 3/8/2022.
Sbaragli S. (2005), "Misconcezioni inevitabili e misconcezioni evitabili", *La Matematica e la sua didattica*, 1, pp. 57-71.
Tortorelli L. (2014), *Geometriko*, Erickson, Trento.
Tortorelli L. (2019a), *Quaderni di Geometria verticale*, vol. 1: *Teoria degli insiemi e fondamenti di Geometria*, Dedalo, Bari.
Tortorelli L. (2019b), *Quaderni di Geometria verticale*, vol. 2: *Quadrilateri*, Dedalo, Bari.
Tortorelli L. (2019c), *Quaderni di Geometria verticale*, vol. 3: *Quadrilateri*, Dedalo, Bari.

4. Strategie nel bene e nel male, con competenze progressive, per la risoluzione di quesiti INVALSI

di Ivan Graziani, Stefano Babini

Quali sono le strategie che gli studenti mettono in atto quando si trovano a dover rispondere a un quesito? Quali competenze vanno a cercare di mettere in azione di fronte a una domanda a risposta multipla per trovare quella esatta e cosa li porta invece a scegliere quella sbagliata?

Per cercare di rispondere a queste e ad altre curiosità su come agiscano gli studenti "nel bene e nel male" per rispondere ai quesiti INVALSI, abbiamo condotto una ricerca in verticale, tra il primo e il secondo ciclo.

Abbiamo assemblato un piccolo fascicolo con tre domande, selezionate tramite il sito GESTINV (www.gestinv.it), che poi è stato somministrato, grazie all'aiuto di alcuni docenti della Regione Emilia-Romagna, a studenti delle classi terze di scuola secondaria di I grado e delle classi seconde e quarte di istituti secondari di II grado di licei, tecnici e professionali.

Abbiamo scelto due domande su Relazioni e funzioni, di grado 8, una con risposta giustificata e l'altra con risposta della tipologia vero/falso, e una domanda su Dati e previsioni, sempre di grado 8, con la tipologia di risposta multipla.

Nel nostro lavoro abbiamo considerato, in base alle Indicazioni nazionali per il primo ciclo e al Quadro di riferimento INVALSI, principalmente i quesiti che riguardavano le dimensioni di "Conoscere" e "Risolvere problemi" e solo per la prima domanda la dimensione "Argomentare".

Lo scopo della nostra ricerca era quello di verificare quali strategie mettevano in gioco gli studenti per rispondere a diverse tipologie di domande, in modo corretto, ma anche sbagliando.

Gli studenti del nostro campione del primo ciclo istituti sono delle province di Bologna, Forlì-Cesena e Ravenna, mentre quelli del secondo ciclo sono delle province di Bologna, Forlì-Cesena e Parma.

Abbiamo effettuato un'analisi dei dati ottenuti, soffermandoci sia sulle risposte corrette sia sugli errori di quelle sbagliate, e un confronto con i risultati del campione nazionale, trovati sempre nel sito GESTINV, nelle diverse classi a cui è stato somministrato il mini-fascicolo, per controllare la verticalità dell'apprendimento.

Il vantaggio di aver utilizzato un campione non casuale ci ha poi permesso di coinvolgere gli studenti tramite i loro docenti e analizzare i quesiti, in modo laboratoriale, per analizzare anche insieme a loro quali dinamiche potevano avere un esito positivo e quali invece portavano all'errore.

Con alcune classi del nostro campione abbiamo potuto chiedere agli studenti di provare a individuare le cause di alcuni errori, cercando anche di sdrammatizzare l'errore e cercando di costruire competenza anche partendo da risposte sbagliate.

What are the strategies that students put in place when they have to answer a question? What skills do they try to put into action when faced with a multiple-choice question to find the right one and what leads them to choose the wrong one instead?

To try to answer these and other curiosities about how students act "for better or worse" to answer the INVALSI questions, we conducted a vertical research between the first and second cycle.

We assembled a small booklet with three questions, selected through the GESTINV website (www.gestinv.it), which was then administered, thanks to the help of some teachers of the Emilia Romagna Region, to students in the third grade secondary school classes and in the second and fourth grade secondary school classes, technical and professional.

We chose two questions on Relationships and Functions, grade 8, one with a justified answer and the other with a true/false answer, and a question on Data and Forecasts, also grade 8, with a multiple answer.

In our work we have considered, according to the National Indications for the first cycle and the INVALSI Reference Framework, mainly the questions that concerned the dimensions of "Knowing" and "Solving problems" and only for the first question the dimension "Debate".

The aim of our research was to verify which strategies the students put into play to answer different types of questions, in a correct way, but also by making mistakes.

The students of our sample of the first cycle institutes are from the provinces of Bologna, Forlì-Cesena and Ravenna, while those of the second cycle are from the provinces of Bologna, Forlì-Cesena and Parma.

We carried out an analysis of the data obtained, focusing both on the correct answers and on the errors of the wrong ones, and a comparison with the results of the national sample, always found in the GESTINV site, in the *different classes to which the mini-file was administered, to check the verticality of learning.*

The advantage of using a non-random sample then allowed us to involve students through their teachers and analyze the questions, in a laboratory way, to analyze with them what dynamics could have a positive outcome and what instead led to the error.

With some classes of our sample we were able to ask students to try to identify the causes of some errors, also trying to defuse the error and trying to build competence also starting from wrong answers.

1. Introduzione

La Matematica è una materia che è nata per risolvere problemi e attività tipiche di questa disciplina sono l'ipotizzare, il congetturare, l'elaborazione di strategie e l'argomentare.

Le prove standardizzate non riescono per la loro struttura a toccare tutti questi aspetti, ma possono farlo se poi le prove sono analizzate a fondo in classe con gli studenti. La ricchezza di informazioni che si possono ottenere con la correzione in classe delle prove e con l'analisi non solo degli errori, ma anche delle strategie risolutive adottate per la risoluzione di situazioni problematiche, è enorme.

Lo scopo della nostra ricerca è stato quello di entrare in classe tramite i docenti e analizzare gli esiti di una breve prova composta da soli tre item che abbiamo scelto in quanto rappresentativi di alcune difficoltà comuni a tanti studenti. Grazie ai docenti abbiamo potuto vedere non solo in quanti hanno risposto correttamente, ma anche quali strategie risolutive hanno messo in campo e anche relativamente agli errori, abbiamo potuto osservare alcune delle cause che hanno portato gli studenti a commetterli.

Abbiamo utilizzato tre item selezionati dal sito GESTINV e costruito un piccolo fascicolo somministrato grazie alla collaborazione dei docenti delle classi coinvolte.

Abbiamo inoltre sempre confrontato i risultati anche con quelli del campione nazionale, rilevato dal sito GESTINV.

Abbiamo scelto di somministrare il nostro fascicolo alle classi terze della secondaria di I grado e alle seconde e quarte della secondaria di II grado, analizzando quindi i vari aspetti anche con un'ottica di verticalità.

Lavorare sulle strategie risolutive e anche sugli errori e sulle loro possibili genesi è una modalità che utilizziamo spesso anche nella nostra normale didattica di classe, soprattutto per verificare il reale livello di competenza raggiunto dai nostri studenti su determinati argomenti meglio se ritenuti normalmente ostici.

Nei nostri lavori di ricerca alcuni degli aspetti che consideriamo sempre, anche per i livelli di scuola in cui operiamo, sono quelli della verticalità e della continuità. È stato molto interessante anche poter analizzare come alcuni aspetti didattici e pure apprendimenti più o meno consolidati, "nel bene e nel male" mostrino molte similitudini di comportamento risolutivo tra i diversi ordini di scuola.

2. Le fasi di lavoro

2.1. Ricerca dei quesiti in coerenza con il nostro intento

L'intento principale del nostro lavoro è stato quello di analizzare l'andamento di alcune domande, scelte con differenti livelli di difficoltà e in verticale, per verificare se alcuni concetti matematici potevano essere assimilati correttamente nei diversi gradi di scuola e soprattutto per ricercare strategie risolutive comuni e anche errori ricorrenti alle diverse età considerate.

Per tale motivo la ricerca effettuata sul sito GESTINV si è orientata verso quesiti che avevano riscontrato particolari difficoltà nel campione nazionale quando erano stati somministrati.

Come nostra consuetudine abbiamo, inoltre, deciso di costruire un unico fascicolo da somministrare senza alcuna differenza per i diversi gradi scolastici esaminati.

2.2. Composizione del fascicolo

Il fascicolo è stato composto con solo 3 domande tutte di grado 8, due dell'ambito Relazioni e funzioni e una di Dati e previsioni.

Per il nostro studio, incentrato sulla ricerca di strategie comuni e tipologie ricorrenti di errori, abbiamo scelto, in particolare, domande, che richiedessero agli studenti di effettuare un'argomentazione o un ragionamento.

Dopo averlo assemblato, abbiamo provato a vedere se poteva essere risolto in 15 minuti, per consentire ai docenti nella restante parte dell'ora di analizzare insieme agli studenti le risposte fornite.

2.3. Scelta del campione

Il campione è stato formato da studenti delle classi terze di scuola secondaria di I grado e delle seconde e quarte di alcuni indirizzi di secondaria di II grado.

Le scuole che hanno aderito appartengono tutte alla regione Emilia-Romagna.

La collaborazione dei docenti somministratori è stata molto proficua per la nostra ricerca.

Le scuole che sono state coinvolte per questo progetto sono state:

– scuole secondarie di I grado delle province di Forlì-Cesena, Bologna e Parma;
– scuole secondarie di II grado – licei: artistico (Parma) e scientifico (Forlì-Cesena); ITT, ITE, e ITAS, IPIA e IPA (Forlì-Cesena).

Gli studenti coinvolti sono stati in totale 867: 321 delle scuole secondarie di I grado e 546 delle secondarie di II grado.

2.4. Somministrazione fascicolo

Il fascicolo è stato somministrato tra i mesi di settembre 2019 e febbraio 2020, con date scelte dai docenti somministratori. Sono stati somministrati e discussi in classe nelle loro scuole e noi poi siamo passati a ritirarli per la loro elaborazione.

2.5. Analisi dei risultati ottenuti (confronto in verticale)

Abbiamo deciso di somministrare dei mini-fascicoli con soli tre quesiti anche per favorire la successiva discussione in classe con i docenti coinvolti. Dalla correzione dei fascicoli e dall'analisi dei dati ottenuti nel campione abbiamo deciso di concentrare la nostra ricerca su alcuni aspetti significativi, legati ai procedimenti risolutivi e anche alle diverse tipologie di errori dei quali abbiamo ricercato, grazie al prezioso aiuto dei docenti di classe le principali cause.

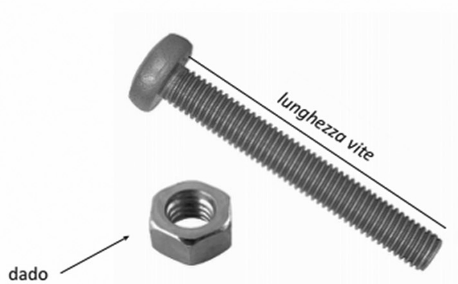
Dopo aver osservato le percentuali di risposte corrette ed errate per ogni item, ci siamo concentrati sull'analisi degli errori e abbiamo analizzato in particolare per ognuno dei tre item la tipologia di errori commessi nei diversi gradi di scuola. Abbiamo poi verificato se la tipologia di errore rimaneva la stessa passando da un livello scolastico all'altro.

Come quadro teorico abbiamo considerato, per quanto riguarda le strategie risolutive (Arrigo, 2009; Polya, 2016; Zan e Baccaglini-Frank, 2017) la tipologia degli errori riscontrati; ci siamo anche riferiti alle diverse possibili origini degli errori (Binanti, 2001), alle misconcezioni relativi alle rappresentazioni delle formalizzazioni e alle frazioni (D'Amore e Sbaragli, 2011), con un occhio anche al contratto didattico nell'eccessivo ricorso a calcoli, talvolta non necessari, (Brousseau, 1986; D'Amore, 2003; Zan e Baccaglini-Frank, 2017) e alla lettura selettiva del testo di un problema e alle diverse modalità di lettura (Zan, 2016; INVALSI, 2013).

Primo item

Il primo quesito che abbiamo scelto e somministrato è dell'ambito Relazioni e funzioni ed è uscito per il grado 8 nel 2017 (fig. 1).

D5. **Osserva la vite e il dado rappresentati in figura.**



Ogni volta che il dado compie 5 giri completi attorno alla vite, si sposta lungo la vite di 0,5 cm.
Il dado compie 120 giri per percorrere tutta la vite.
Quanto è lunga la vite?

Scrivi come hai fatto per trovare la risposta e poi riporta il risultato.

....

....

....

Risultato: .... cm

Fig. 1 – Item G08 del 2017

Questo item nel campione nazionale INVALSI, di quinta primaria, aveva registrato il seguente risultato (fig. 2).

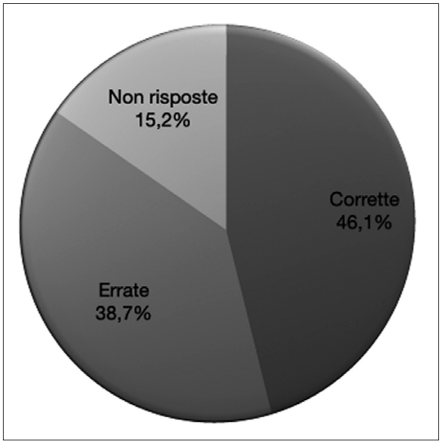


Fig. 2 – Grafico relativo alle risposte del campione nazionale G08 del 2017

Di seguito riportiamo i risultati relativi al campione a cui abbiamo sottoposto il fascicolo (fig. 3). A sinistra riportiamo i risultati della scuola secondaria di I grado e a destra quelli della scuola secondaria di II grado.

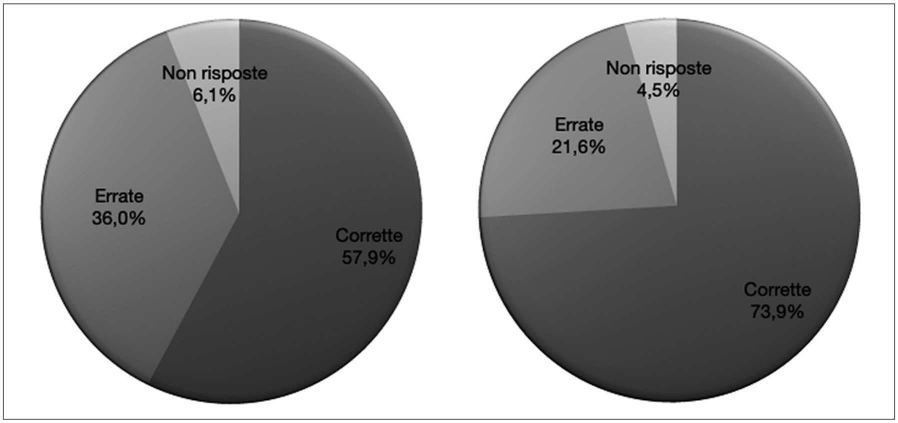


Fig. 3 – Grafici degli esiti nel I e II grado del nostro campione

Possiamo osservare che aumentano sensibilmente le percentuali di risposte corrette, passando dal primo al II grado, mentre rimangono molto simili le percentuali relative alle risposte mancanti.

Grazie alle risposte che ci hanno fornito i colleghi somministratori, abbiamo potuto vedere anche in quanti hanno risolto il quesito ricorrendo a una proporzione. Riportiamo di seguito i grafici che riportano le percentuali sui metodi utilizzati dagli studenti che hanno dato la risposta corretta (fig. 4).

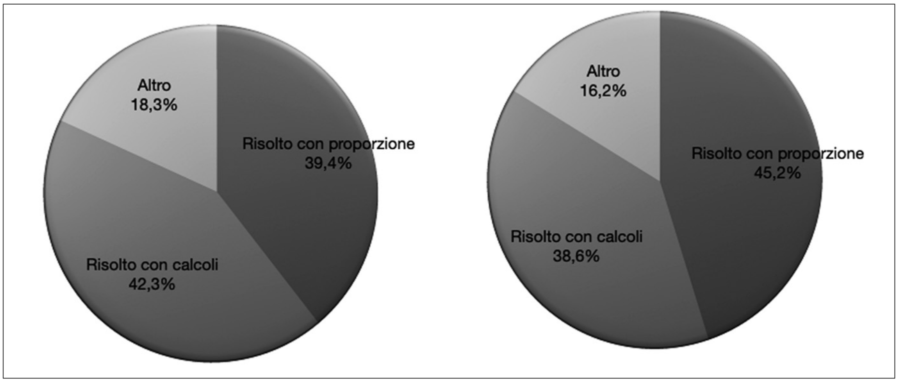
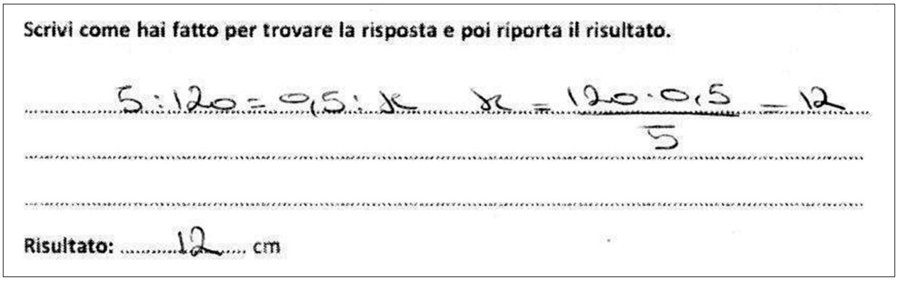


Fig. 4 – Grafici sulle strategie adottate nel I e II grado del campione

Riportiamo, di seguito, alcune immagini in cui possiamo osservare qualche procedimento utilizzato dagli studenti per giungere alla risposta.

Abbiamo potuto analizzare anche dai dati in nostro possesso che le strategie risolutive più utilizzate, sia nella secondaria di I grado sia in quella di II grado, sono stati essenzialmente due:

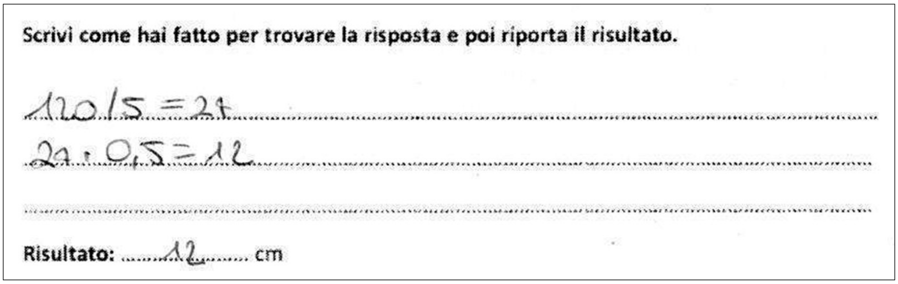
– ricorrere a una proporzione (fig. 5);
– effettuare dei calcoli eseguendo prima una divisione poi una moltiplicazione (fig. 6);
– altre tipologie risolutive sono per lo più discorsive, sia nel primo (fig. 7) sia nel II grado (fig. 8).


Scrivi come hai fatto per trovare la risposta e poi riporta il risultato.

$5 : 120 = 0{,}5 : x \quad x = \frac{120 \cdot 0{,}5}{5} = 12$

Risultato: 12 cm

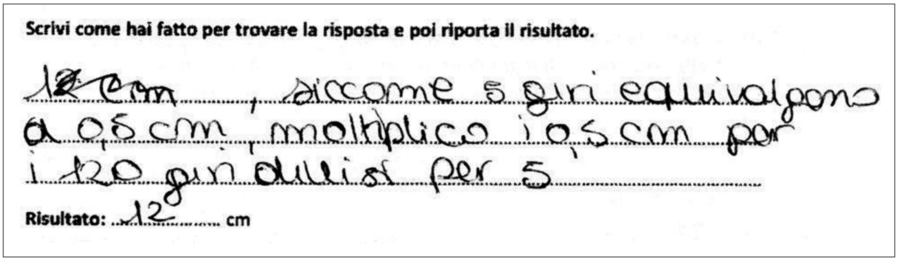
Fig. 5 – Soluzione di uso studente del I grado


Scrivi come hai fatto per trovare la risposta e poi riporta il risultato.

120/5 = 24
24 · 0,5 = 12

Risultato: 12 cm

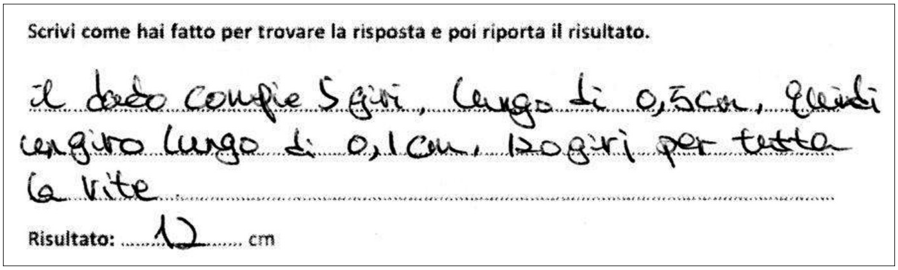
Fig. 6 – Soluzione di uno studente del II grado


Scrivi come hai fatto per trovare la risposta e poi riporta il risultato.

12 cm, siccome 5 giri equivalgono a 0,5 cm moltiplico i 0,5 cm per i 120 giri divisi per 5

Risultato: 12 cm

Fig. 7 – Soluzione discorsiva nel I grado


Scrivi come hai fatto per trovare la risposta e poi riporta il risultato.

il dado compie 5 giri, lungo di 0,5cm, quindi un giro lungo di 0,1 cm, 120 giri per tutta la vite

Risultato: 12 cm

Fig. 8 – Soluzione discorsiva nel II grado

Nelle figure successive (figg. 9, 10, 11 e 12) sono riportati alcuni esempi di procedimenti errati adottati dagli studenti della secondaria di I grado, anche senza verifica della plausibilità del risultato.

Ogni volta che il dado compie 5 giri completi attorno alla vite, si sposta lungo la vite di 0,5 cm.
Il dado compie 120 giri per percorrere tutta la vite.
Quanto è lunga la vite?

Scrivi come hai fatto per trovare la risposta e poi riporta il risultato.

0,5 · 120 = 60cm

Risultato: 60 cm

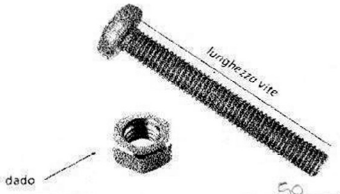
Fig. 9 – Prima strategia "moltiplicativa e senza verifica" nel I grado

Scrivi come hai fatto per trovare la risposta e poi riporta il risultato.

0,5 · 6 = 3
lunghezza 120 · 3 = 360 cm

Risultato: 360 cm

Fig. 10 – Seconda strategia "senza verifica" nel I grado



50 5 0,5
mm dm cm mm

Ogni volta che il dado compie 5 giri completi attorno alla vite, si sposta lungo la vite di 0,5 cm. 0,5 cm → 50 mm
Il dado compie 120 giri per percorrere tutta la vite. 50 · 120 =
Quanto è lunga la vite?

50 =
000 +
600 =
6000

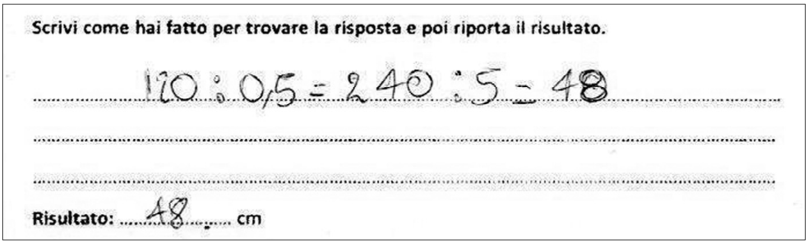
6000 600 60 6
mm dm cm mm

Scrivi come hai fatto per trovare la risposta e poi riporta il risultato.

0,5 cm → ~~5000~~ 50 mm
50 · 120 = 6000 mm
6000 mm → 60 cm

Risultato: 60 cm

Fig. 11 – Terza strategia con calcoli "senza verifica" nel I grado

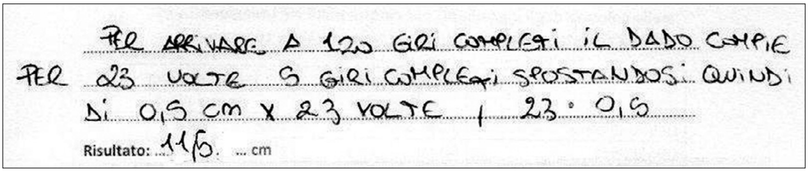

Scrivi come hai fatto per trovare la risposta e poi riporta il risultato.

120 : 0,5 = 240 : 5 = 48

Risultato: 48 cm

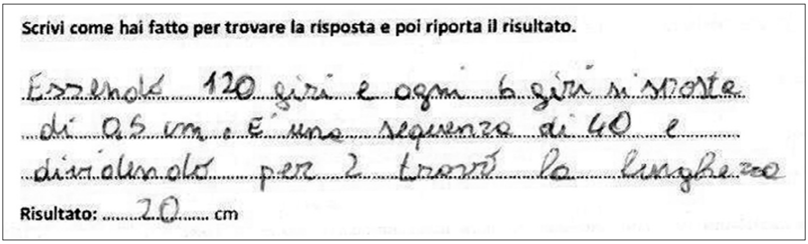
Fig. 12 – Quarta strategia con calcoli “senza verifica” nel I grado

Poi anche alcuni esempi di procedimenti di studenti della secondaria di II grado (figg. 13, 14, 15 e 16), da cui emerge che le strategie risolutive errate cambiano sensibilmente procedendo nei gradi scolastici.


PER ARRIVARE A 120 GIRI COMPLETI IL DADO COMPIE PER 23 VOLTE 5 GIRI COMPLETI SPOSTANDOSI QUINDI DI 0,5 cm X 23 VOLTE | 23 · 0,5

Risultato: 11,5 cm

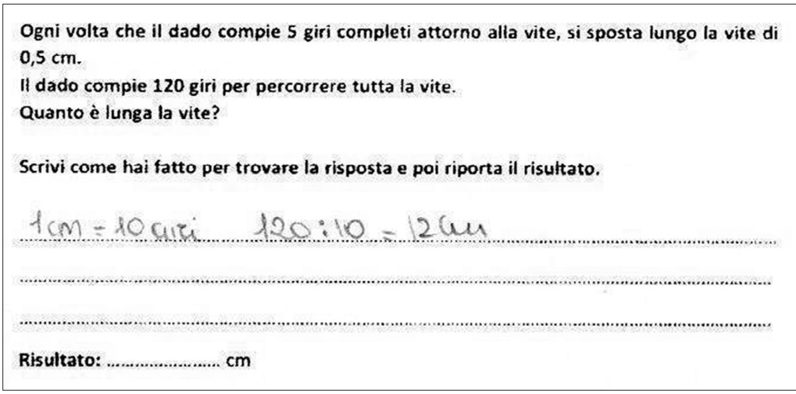
Fig. 13 – Prima strategia con calcoli e discorsiva nel II grado


Scrivi come hai fatto per trovare la risposta e poi riporta il risultato.

Essendo 120 giri e ogni 6 giri si sposta di 0,5 cm, è una sequenza di 40 e dividendolo per 2 trovo la lunghezza

Risultato: 20 cm

Fig. 14 – Seconda strategia con calcoli e discorsiva nel II grado



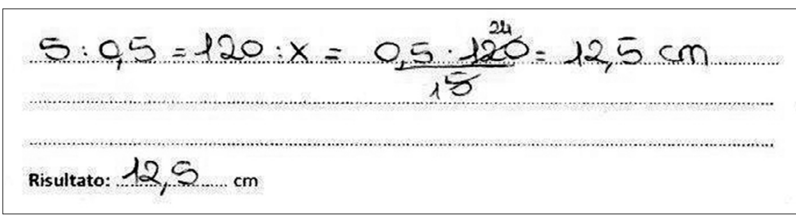
Ogni volta che il dado compie 5 giri completi attorno alla vite, si sposta lungo la vite di 0,5 cm.
Il dado compie 120 giri per percorrere tutta la vite.
Quanto è lunga la vite?

Scrivi come hai fatto per trovare la risposta e poi riporta il risultato.

1cm = 10 giri   120 : 10 = 12cm

Risultato: .... cm

Fig. 15 – Terza strategia corretta ma non risposta nel II grado



$5 : 0{,}5 = 120 : x = \frac{0{,}5 \cdot \cancel{120}^{24}}{\cancel{5}_{1}} = 12{,}5$ cm

Risultato: 12,5 cm

Fig. 16 – Quarta strategia con calcoli nel II grado

Abbiamo analizzato, passando dalla secondaria di I grado alla secondaria di II grado anche le percentuali relative al tipo di errore nel caso di risposta errate.

Abbiamo suddiviso gli errori in quattro macro-aree:
- errore di comprensione del testo;
- errore di procedimento;
- errore di calcolo;
- altro.

In altro ricadono gli studenti che hanno svolto bene l'esercizio ma hanno poi inserito la risposta errata oppure non l'hanno inserita affatto.

Nei grafici (fig. 17) riportiamo i risultati della scuola secondaria di I grado (a sinistra) e quelli della scuola secondaria di II grado (a destra).

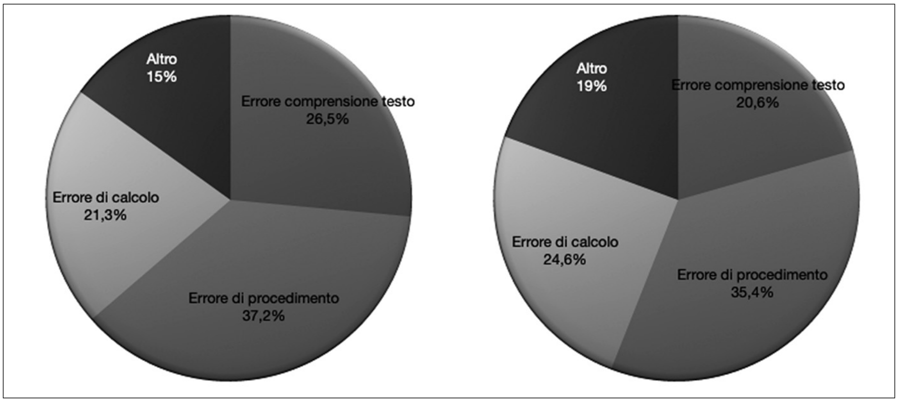


Fig. 17 – Strategie relative agli errori nel nostro campione

Possiamo osservare che non cambiano in modo estremamente significativo le motivazioni di errore. Si osserva però in particolare, una diminuzione degli errori relativi alla comprensione del testo, mentre aumentano gli errori di calcolo.

Secondo item

Anche il secondo quesito proposto, uscito per il grado 8 nel 2010, appartiene all'ambito Relazioni e funzioni (fig. 18).

D9. Il prezzo p (in euro) di una padella dipende dal suo diametro d (in cm) secondo la seguente formula:

$$\boxed{p = \frac{1}{15} d^2}$$

Indica se ciascuna delle seguenti affermazioni è vera o falsa.

		V	F
a.	Il prezzo della padella è direttamente proporzionale al suo diametro	☐	☐
b.	Il prezzo della padella aumenta all'aumentare del suo diametro	☐	☐
c.	Il rapporto fra il diametro della padella e il suo prezzo è 15	☐	☐

Fig. 18 – Quesito G08 del 2010

Questo quesito nel campione nazionale INVALSI aveva registrato i seguenti risultati per i tre item (tab. 1).

Tab. 1 – Risultati del campione INVALSI di grado 8 nel 2010

Item	*Risposte corrette*	*Risposte errate*	*Risposte mancanti*
a	67,6% (F)	27,7%	4,7%
b	34,3% (V)	61,5%	4,2%
c	83,9% (F)	12,6%	3,5%

Nel nostro campione si sono registrati i seguenti risultati per i tre item e nei due ordini di scuola (figg. 19, 20 e 21).

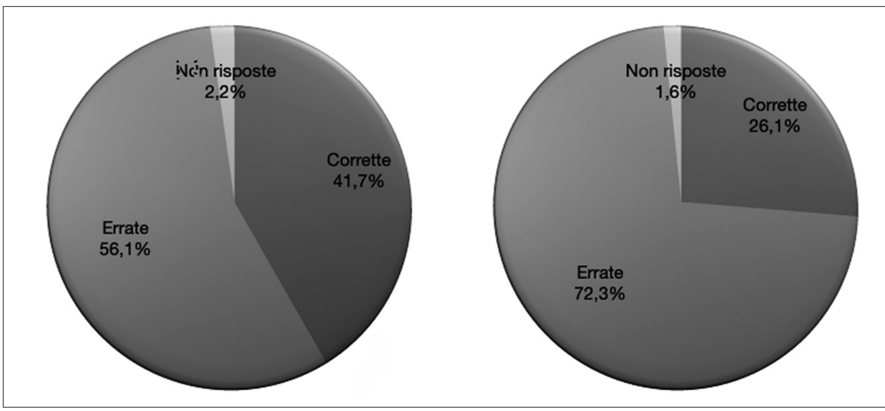


Fig. 19 – Risultati del nostro campione per l'item a

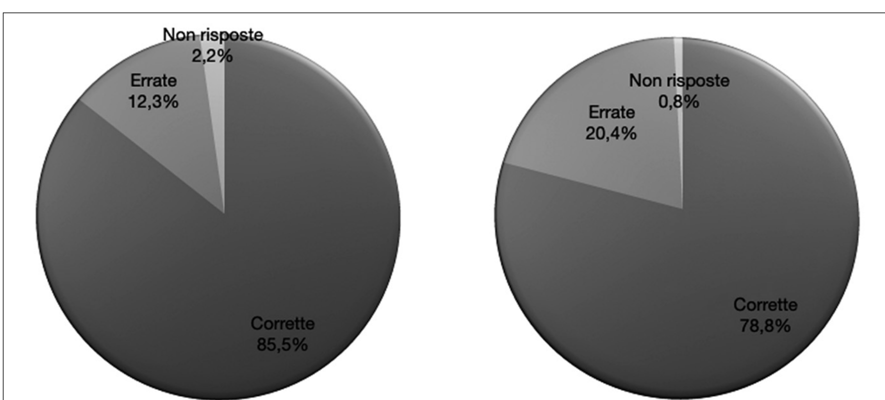


Fig. 20 – Risultati del nostro campione per l'item b

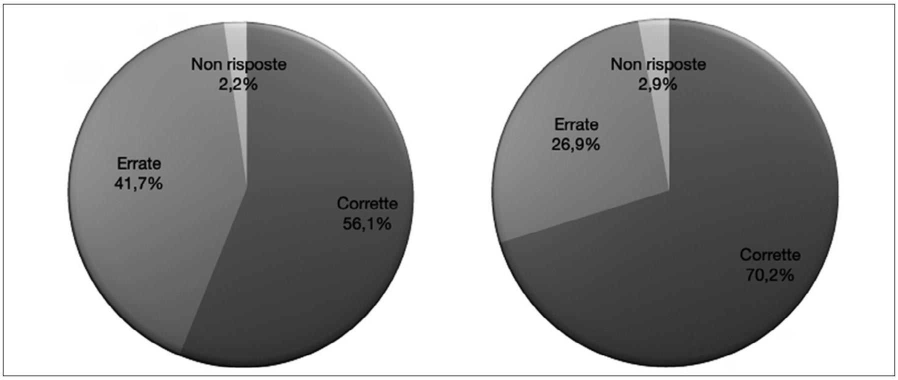
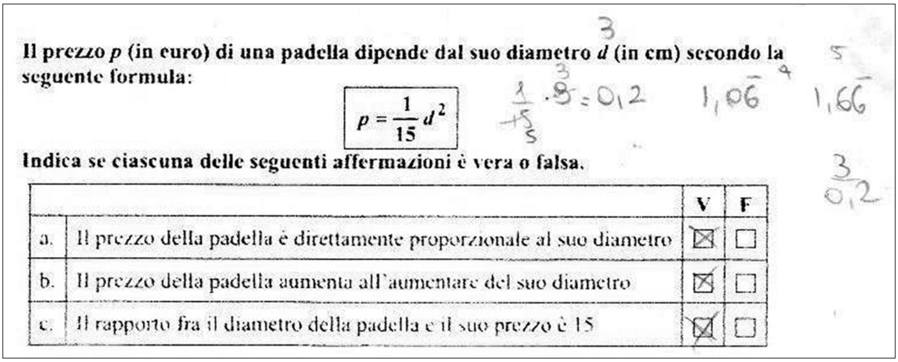


Fig. 21 – Risultati del nostro campione per l'item c

Dai grafici relativi al nostro campione possiamo osservare che cambiano le distribuzioni degli errori rispetto ai singoli item: per gli item a e b sono stati più numerosi gli errori nel secondo ciclo, mentre per l'item c la situazione si capovolge. Questo può essere sicuramente legato al fatto che gli studenti del I ciclo non hanno tenuto conto dell'esponente nel termine relativo al diametro, pur individuando che non si trattava di proporzionalità diretta. Dalle interviste fatte dai docenti è emerso, però, che non sono state ritenute corrette solo per la presenza di un numero al denominatore. Questo fatto indica l'importanza di effettuare un'analisi in classe sulle risposte fornite, perché anche risposte corrette, possono nascondere difficoltà che la semplice codifica del risultato non farebbe emergere. Di seguito vediamo anche alcuni esempi di svolgimento di alunni che hanno fatto i calcoli prima di scegliere la risposta.

Nel primo caso i calcoli hanno portato a sbagliare le risposte sia all'item a sia a quello c.



Il prezzo *p* (in euro) di una padella dipende dal suo diametro *d* (in cm) secondo la seguente formula:

$$\boxed{p = \frac{1}{15} d^2}$$

$\frac{1}{15} \cdot \frac{3}{5} = 0,2$ 1,06 1,66

Indica se ciascuna delle seguenti affermazioni è vera o falsa.

		V	F
a.	Il prezzo della padella è direttamente proporzionale al suo diametro	☒	☐
b.	Il prezzo della padella aumenta all'aumentare del suo diametro	☒	☐
c.	Il rapporto fra il diametro della padella e il suo prezzo è 15	☒	☐

Fig. 22 – Esempio di risoluzione della secondaria di I grado

Nel secondo caso la strategia risolutiva ha portato lo studente a calcolare un prezzo, ma ha comunque sbagliato a giudicare la proporzionalità esistente.

Il prezzo p (in euro) di una padella dipende dal suo diametro d (in cm) secondo la seguente formula:

$$\boxed{p = \frac{1}{15} d^2}$$

€ = $\frac{1}{15} \cdot 12^2$ 9,6€

Indica se ciascuna delle seguenti affermazioni è vera o falsa.

		V	F
a.	Il prezzo della padella è direttamente proporzionale al suo diametro	☒	☐
b.	Il prezzo della padella aumenta all'aumentare del suo diametro	☒	☐
c.	Il rapporto fra il diametro della padella e il suo prezzo è 15	☐	☒

Fig. 23 – Esempio di risoluzione di secondaria di II grado

Terzo item

Il terzo quesito è stato scelto tra quelli relativi all'ambito Dati e previsioni. Si tratta di un item uscito per il grado 8 nel 2016 (fig. 24).

In un sacchetto ci sono solo 4 palline blu. Quante palline verdi si devono inserire nel sacchetto affinché la probabilità di estrarre una pallina verde sia $\frac{2}{3}$?

A. ☐ 2

B. ☐ 12

C. ☐ 6

D. ☐ 8

Fig. 24 – Item del grado 8 del 2016

Di seguito possiamo osservare l'andamento nel campione nazionale INVALSI sulla Prova nazionale del 2010. Si può osservare sia la percentuale di risposte corrette ed errate sia le percentuali delle varie opzioni di risposta.

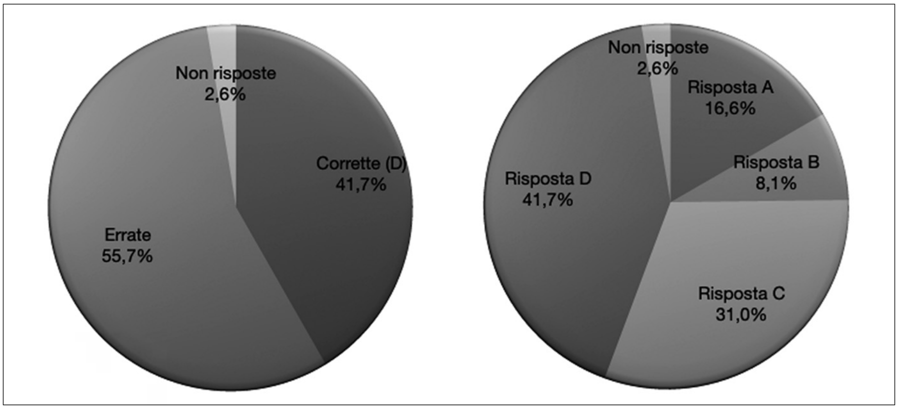


Fig. 25 – Grafico che riporta i risultati del campione nazionale

Riportiamo di seguito le percentuali del nostro campione ha invece ottenuto i seguenti risultati.

Per la scuola secondaria di I grado (fig. 26).

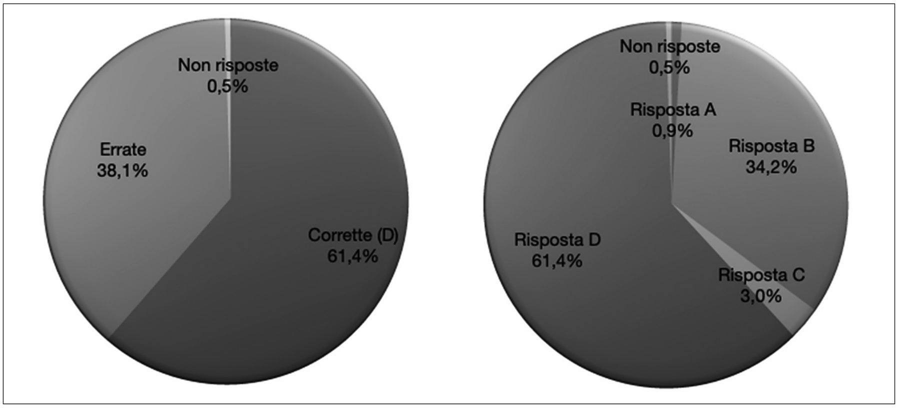


Fig. 26 – Risultati della secondaria di I grado del nostro campione

Per la scuola secondaria di II grado (fig. 27).

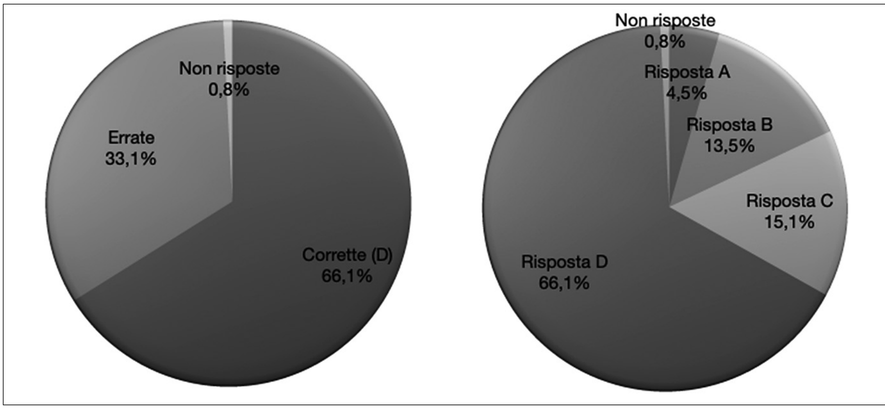
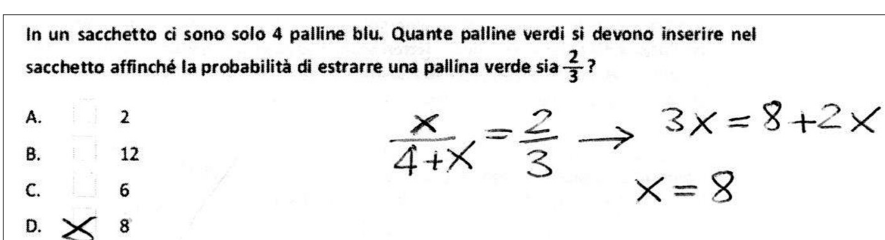


Fig. 27 – Risultati della secondaria di II grado del nostro campione

Le strategie risolutive qui si possono raggruppare sostanzialmente in 4 tipologie:

- senza calcoli, come testimoniato dai colleghi dopo la correzione in classe con gli studenti: vedere che se la parte mancante è di 2/3 le quattro palline rappresenteranno 1/3 e quindi si potrà calcolare mentalmente il doppio di 4;
- con calcoli, anche complessi (fig. 28), "scomodando" le equazioni, anche per contratto didattico (Brousseau, 1986; D'Amore, 2003), ma nel secondo caso perdersi poi nei calcoli (fig. 29);
- moltiplicazione del dato per la frazione o il suo reciproco (misconcezione per cui con le frazioni bisogna sempre moltiplicare, D'Amore e Sbaragli, 2011; Baccaglini *et al.*, 2017);
- moltiplicando per farsi venire uno dei risultati dell'elenco, senza verificare la plausibilità del risultato (Polya, 2016).

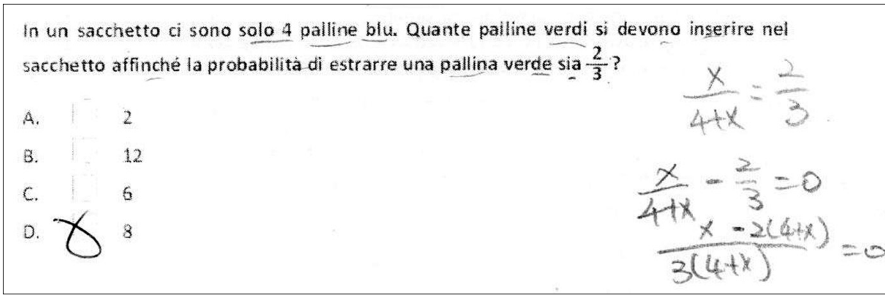

In un sacchetto ci sono solo 4 palline blu. Quante palline verdi si devono inserire nel sacchetto affinché la probabilità di estrarre una pallina verde sia $\frac{2}{3}$?

A. 2
B. 12
C. 6
D. X 8

$\frac{x}{4+x} = \frac{2}{3} \rightarrow 3x = 8 + 2x$

$x = 8$

Fig. 28 – Esempio di risposta corretta di uno studente



In un sacchetto ci sono solo 4 palline blu. Quante palline verdi si devono inserire nel sacchetto affinché la probabilità di estrarre una pallina verde sia $\frac{2}{3}$?

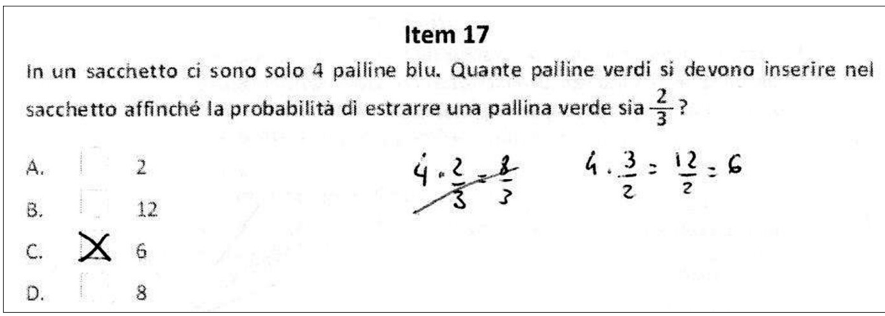
A. 2
B. 12
C. 6
D. 8

$$\frac{x}{4+x} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{x}{4+x} - \frac{2}{3} = 0$$

$$\frac{x - 2(4+x)}{3(4+x)} = 0$$

Fig. 29 – Esempio di risposta corretta, ma con errore di calcolo



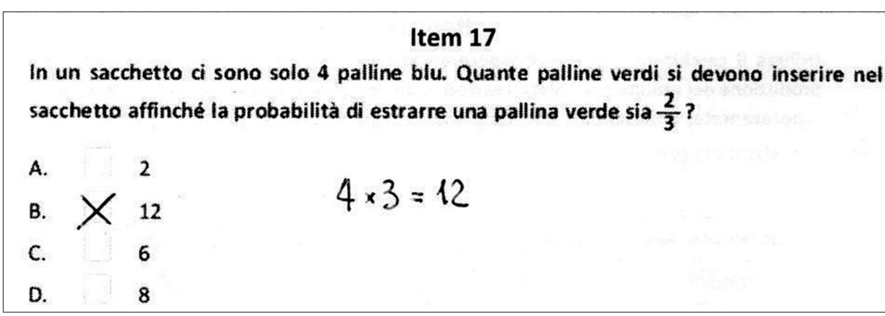
Item 17

In un sacchetto ci sono solo 4 palline blu. Quante palline verdi si devono inserire nel sacchetto affinché la probabilità di estrarre una pallina verde sia $\frac{2}{3}$?

A. 2
B. 12
C. 6
D. 8

$$\cancel{4 \cdot \frac{2}{3} = \frac{8}{3}} \qquad 4 \cdot \frac{3}{2} = \frac{12}{2} = 6$$

Fig. 30 – Primo esempio di risposta errata di uno studente



Item 17

In un sacchetto ci sono solo 4 palline blu. Quante palline verdi si devono inserire nel sacchetto affinché la probabilità di estrarre una pallina verde sia $\frac{2}{3}$?

A. 2
B. 12
C. 6
D. 8

$$4 \times 3 = 12$$

Fig. 31 – Secondo esempio di risposta errata di uno studente

Abbiamo messo a confronto le strategie utilizzate per rispondere correttamente al quesito (fig. 32), possiamo osservare che l'utilizzo dell'equazione, essendo fratta, è stata scelta maggiormente nel secondo ciclo rispetto al primo, nel quale è stata scelta di più invece l'utilizzo della frazione complementare.

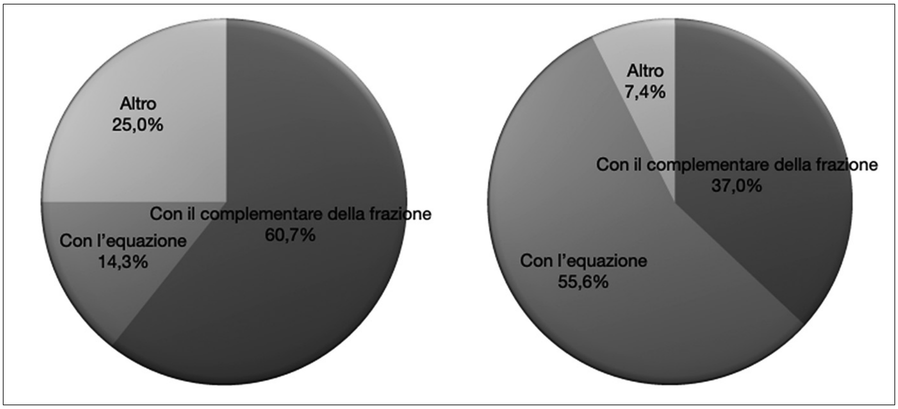


Fig. 32 – Strategie utilizzate dagli studenti sulle risposte corrette

Anche sulle risposte errate, abbiamo confrontato i gradi scolastici (fig. 33) ed emergono le stesse tipologie, anche se percentualmente diverse.

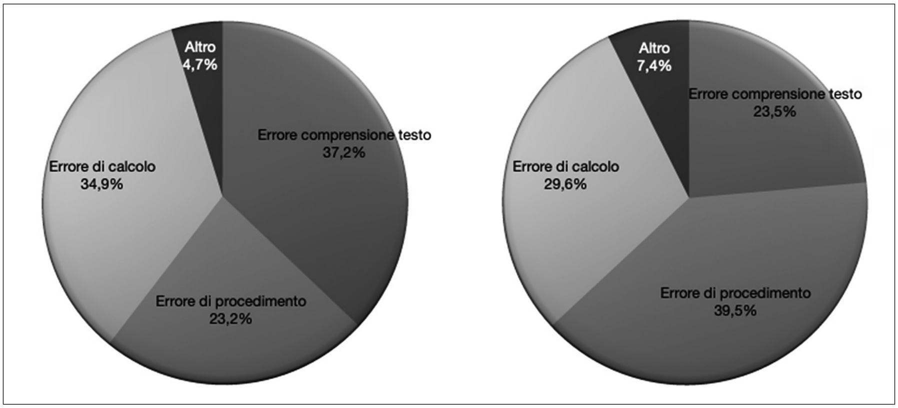


Fig. 33 – Tipologie di errori commessi dagli studenti

3. Conclusioni

Dall'analisi dei risultati e anche dai contributi degli insegnanti coinvolti, abbiamo potuto vedere che nel nostro campione non ci sono grosse differenze, tra i due ordini di scuola, nella risoluzione dei problemi presenti nei quesiti proposti e, nel bene e nel male, le strategie si equivalgono sostanzialmente.

Nel terzo quesito gli studenti della secondaria di II grado hanno utilizzato maggiormente come strategia la risoluzione di un'equazione rispetto a quelli della secondaria di I grado che hanno preferito invece ricorrere alla frazione complementare, questo anche perché solitamente le equazioni fratte non vengono svolte in quel grado scolastico.

In particolare, in base a quanto ipotizzato, abbiamo potuto constatare, per le strategie errate, che uno degli errori frequenti è legato al fatto che spesso gli studenti si accontentano di trovare un risultato, ma che poi non verificano anche la sua plausibilità.

Trovare, per esempio, che una vite misuri 360 cm non turba gli studenti, perché spesso viene considerato giusto un risultato "bello" e senza virgola.

Se poi il risultato trovato è uno tra quelli presenti in una scelta multipla è automatico che venga considerato giusto, anche se l'operazione non è dettata da formule note e nemmeno dal buon senso.

Un altro errore che avevamo ipotizzato e che abbiamo poi rilevato è stato quello relativo alla tendenza che spesso hanno gli alunni di combinare tra loro i numeri presenti nel testo cercando di ottenere un risultato tra quelli proposti, senza avere chiara la procedura da dover adottare.

Un altro aspetto interessante che abbiamo potuto osservare nel secondo item è stata l'importanza di poter discutere in classe con gli studenti sulle prove svolte. Questo ha permesso di entrare dentro anche alle motivazioni nelle risposte relative al vero/falso e vedere come, anche per i quesiti a scelta multipla, una risposta all'apparenza corretta fosse, in realtà, legata a un errore di fondo che solo così poteva emergere. Gli errori documentati dai docenti erano anche in questi casi attribuibili, come previsto, a letture frettolose del testo e anche a non verifiche delle plausibilità di quanto ottenuto.

Gli studenti devono essere maggiormente abituati a risolvere dei veri problemi, partendo da una corretta comprensione del testo e poi procedere con le formulazioni delle ipotesi e le strategie risolutive, meglio ancora se argomentate e anche in piccoli gruppi. Sarebbe importante pure che formalizzassero tutte le strategie seguite, anche quelle non corrette, per poter vedere l'intero percorso che ha portato poi alla soluzione e osservare come anche un errore può avere contribuito al buon esito finale.

A scuola purtroppo non si lavora quanto si dovrebbe sulla risoluzione di veri problemi e questo è anche uno dei fattori che, secondo noi, contribuisce maggiormente alla visione negativa e distorta della Matematica.

Riferimenti bibliografici

Arrigo G. (2009), "Problemi scolastici nell'ottica del problem solving", *Bollettino dei docenti di Matematica*, Bellinzona.

Baccaglini-Frank A., Di Martino P., Natalini R., Rosolini G. (2017), *Didattica della Matematica*, Mondadori, Milano.

Binanti L. (a cura di) (2001), *Pedagogia, epistemologia e didattica dell'errore*, Rubettino, Soveria Mannelli.

Brousseau G. (1986), *La relation didactique: le milieu, Actes de la IVème Ecole d'Eté de didactique des mathématiques*, IREM, Paris, pp. 54-68.

D'Amore B. (2003), *Le basi filosofiche, pedagogiche, epistemologiche e concettuali della Didattica della Matematica*, Pitagora, Bologna.

D'Amore B., Sbaragli S. (2011), *Principi di base di Didattica della Matematica*, Pitagora, Bologna.

INVALSI (2013), *Quadro di riferimento della prova di Italiano. La prova di Italiano nell'obbligo di istruzione*, testo disponibile al sito: https://invalsi-areaprove.cineca.it/docs/file/qdr_italiano_obbligo_istruzione.pdf, data di consultaizone 16/12/2022.

Polya G. (2016), *Come risolvere i problemi di Matematica*, UTET, Torino.

Sbaragli S. (2006), *Le misconcezioni in aula. Articolo di divulgazione*, NRD Dipartimento di Matematica, Università di Bologna.

Zan R. (2016), *I problemi di Matematica*, Carocci, Roma.

Zan R., Baccaglini-Frank A. (2017), *Avere successo in Matematica. Strategie per l'inclusione e il recupero*, UTET, Torino.

5. Una sperimentazione sulla simmetria nelle prime classi della scuola primaria

di Valentina Barucci, Antonella Marconi

Alcune domande INVALSI di grado 2 sono state utilizzate in questa sperimentazione svoltasi in una classe primaria dell'istituto comprensivo "G. Falcone" di Grottaferrata.

In una prima fase, nell'anno scolastico 2019/2020, i bambini di una prima primaria sono stati sollecitati con giochi di movimento, manipolazione e osservazione a riconoscere figure simmetriche in vari contesti.

In una seconda fase, svoltasi nell'anno scolastico successivo, sono state proposte agli stessi bambini alcune domande INVALSI relative al concetto di simmetria. L'intento di questa seconda fase è stato da un lato quello di confrontare le risposte nazionali con le risposte dei bambini oggetto della sperimentazione e dall'altro di indagare le loro argomentazioni per la scelta delle risposte.

Some INVALSI grade 2 tests were used in this experimentation held in a primary class of the Institute "G. Falcone" in Grottaferrata.

In a first phase, in the 2019/2020 school year, children of a first primary were encouraged with movement games, manipulation and observation to recognize symmetrical figures in various contexts.

In a second phase, which took place in the following school year, some INVALSI questions relating to the concept of symmetry were proposed to the same children. The intent of this second phase was on the one hand to compare the national responses with the responses of the children under observation and on the other to investigate their arguments for the choice of answers.

1. Introduzione

Il presente contributo, che si avvale anche di alcune domande INVALSI, con le relative statistiche, è frutto di una collaborazione tra una docente universitaria e un'insegnante di scuola primaria.

L'oggetto della ricerca è il concetto matematico di simmetria e il modo in cui i bambini di 6-7 anni se ne possono impadronire, applicandolo poi in vari contesti.

La simmetria è un concetto centrale in tutto il pensiero matematico (Weyl, 1952) ed è usato talvolta come potente strumento dimostrativo per esempio in combinatoria algebrica e in logica (Unquhart, 1999), inoltre è uno strumento di connessione tra Matematica e Arte (Schattschneider, 2006).

Dal momento che i bambini hanno una forte capacità di riconoscere la simmetria (Seo e Ginsburg, 2004; Schuler, 2001), sembra opportuno che questo concetto venga esplorato più approfonditamente già nei primi anni di scuola (Bryant, 2008).

Tra gli obbiettivi di apprendimento al termine della classe quinta primaria anche le Indicazioni nazionali indicano "Riconoscere figure ruotate, traslate, riflesse" (MIUR, 2012).

In questo lavoro prendiamo in considerazione soltanto la simmetria di riflessione rispetto a un asse. Se l'asse è verticale, la vita di tutti i giorni dei bambini è piena di esempi di figure simmetriche (il corpo umano, il cuore, gli alberi ecc.). Più rari sono gli esempi quotidiani di assi di simmetria orizzontali e obliqui e come vedremo il riprodurre una figura simmetrica rispetto a un asse orizzontale risulta più difficile che riprodurla rispetto a un asse verticale.

Sebbene le figure statiche simmetriche appaiano più semplici di figure simmetriche in movimento, la nostra sperimentazione parte proprio da queste ultime, rifacendoci a recenti indagini che valorizzano attività di movimento (Riley *et al.*, 2017). La visita e l'osservazione dell'abbazia nelle fasi iniziali della sperimentazione si inquadrano in una pratica di insegnamento non-formale in contesti diversi dalla classe, che può promuovere atteggiamenti positivi tra i bambini e motivazioni addizionali per lo studio della Matematica (Isabel *et al.*, 2019).

2. La sperimentazione

La prima fase della sperimentazione didattica si è svolta nell'anno scolastico 2019/2020 e ha avuto come protagonista una classe di prima primaria, articolandosi in vari momenti:

– il gioco dello specchio: i bambini si guardano a uno specchio della loro altezza portato in classe e si osserva come alla destra corrisponda nello specchio la sinistra, per esempio un bambino alza la mano destra e il bambino riflesso alza la sinistra. Successivamente si dividono in coppie i bambini e ogni coppia si dispone simmetricamente rispetto a una linea tracciata sul pavimento. Uno dei due bambini compie dei movimenti e l'altro di fronte riproduce i movimenti del compagno come se fosse la sua immagine allo specchio. Per spingere i bambini a una maggiore precisione nella riproduzione speculare dei movimenti, si disegnano due griglie simmetriche a terra e si pone attenzione ai movimenti dei piedi che possono spostarsi in modi diversi nei riquadri della griglia;
– realizzazione di figure piane simmetriche rispetto a un asse con l'utilizzo di materiale vario: tempera per macchie di colore, forbici per ritagliare, pennarelli per disegni a due mani;
– ricerca di simmetrie: nel proprio corpo, nelle foglie, nelle lettere dell'alfabeto in stampatello, in oggetti vari e illustrazioni;
– ricerca di simmetria nell'architettura e negli affreschi di un edificio religioso (Abbazia del monastero di Santa Maria di Grottaferrata, prospiciente la scuola).

La sperimentazione ha avuto una seconda fase nell'anno scolastico 2020/2021 e si è avvalsa di alcuni quesiti INVALSI proposti alla classe (ormai seconda primaria) protagonista della sperimentazione nell'anno precedente. In questa fase abbiamo chiesto ai bambini che cosa ricordassero dell'attività dell'anno precedente ed è emerso che la cosa che ricordavano meglio era la visita all'abbazia e il lavoro sulle fotografie dell'architettura, su cui erano stati fatti lavorare cercando le simmetrie; tuttavia anche gli altri momenti del lavoro fatto sono stati richiamati e molti di loro avevano portato di propria iniziativa uno specchietto (già usato l'anno precedente).

L'intento di questa seconda fase è stato da un lato quello di confrontare le risposte nazionali alle domande INVALSI con le risposte dei bambini oggetto della sperimentazione e dall'altro di indagare le loro argomentazioni per la scelta delle risposte. Sappiamo che argomentare una risposta non è cosa facile per nessuno, a maggior ragione non lo è per dei bambini di sette anni e spesso si sono limitati a scrivere o a dire che avevano letto attentamente il testo, ci avevano riflettuto bene e avevano capito quale era la risposta giusta, ripetendo le parole pronunciate dall'insegnante quando aveva distribuito le schede. In alcuni casi però abbiamo ottenuto indicazioni interessanti. Le prime due domande INVALSI proposte sono state la D8 del 2012 e la D13 del 2011 (cfr. figg. 1-2).

Come si vede, la seconda scheda (gatto) che sembrava la più semplice ha avuto molte risposte scorrette. Intervistando i bambini, abbiamo capito come alcuni di loro non abbiano posto attenzione al testo della domanda, pensando che si trattasse della stessa domanda della scheda precedente. Notiamo infatti che alcune delle risposte errate indicano "pezzo 1 e pezzo 2", scelta appropriata per ricomporre la figura intera, come nella richiesta della domanda precedente. Ci troviamo di fronte al ben noto problema della non corretta comprensione del testo (Zan, 2016).

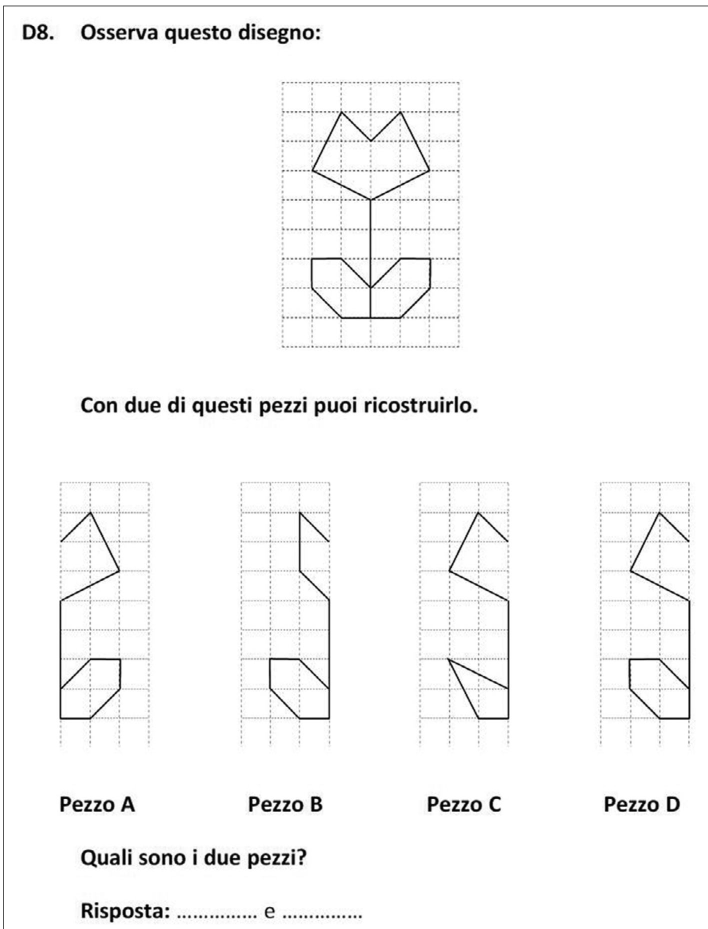


Fig. 1 – Domanda INVALSI, D8 2012

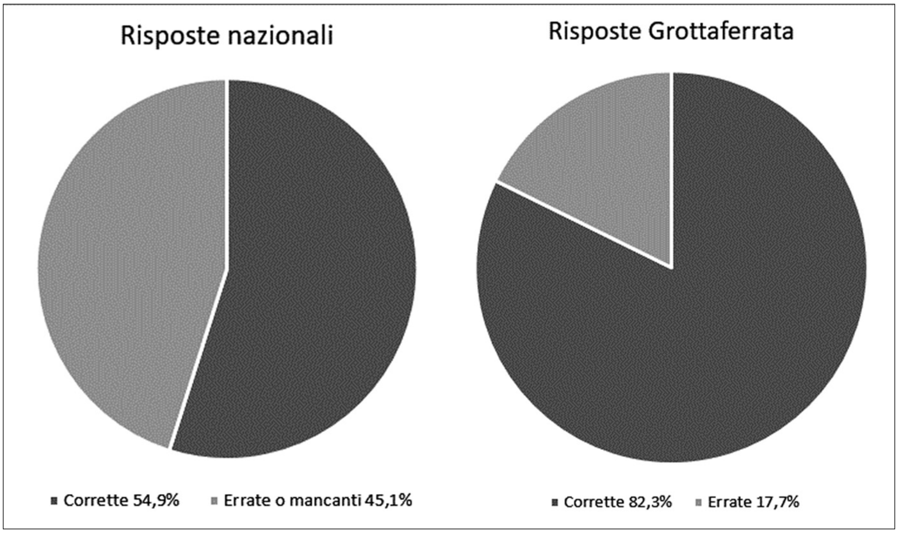
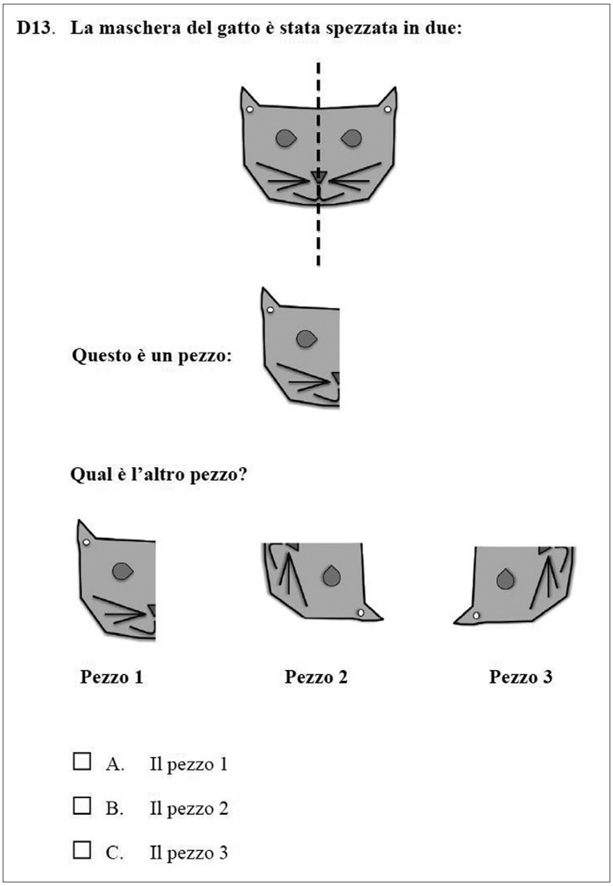


Fig. 2 – Confronto delle risposte alla domanda INVALSI, D8 2012

Altri invece non hanno compreso la domanda o l'hanno ignorata, come il bambino della scheda in fig. 5, nella quale la risposta, scorretta, è argomentata dalla frase: "Ho scelto il primo disegno perché gli altri sono all'incontrario". I disegni mostrano, però, che gli è ben chiaro come disegnare la figura simmetrica.


D13. La maschera del gatto è stata spezzata in due:

Questo è un pezzo:

Qual è l'altro pezzo?

Pezzo 1 Pezzo 2 Pezzo 3

- ☐ A. Il pezzo 1
- ☐ B. Il pezzo 2
- ☐ C. Il pezzo 3

Fig. 3 – Domanda INVALSI, D13 2011

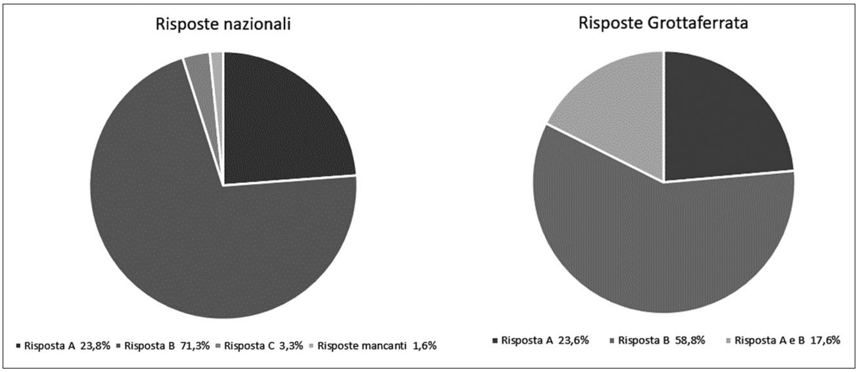


Fig. 4 – Confronto delle risposte alla domanda INVALSI, D13 2011

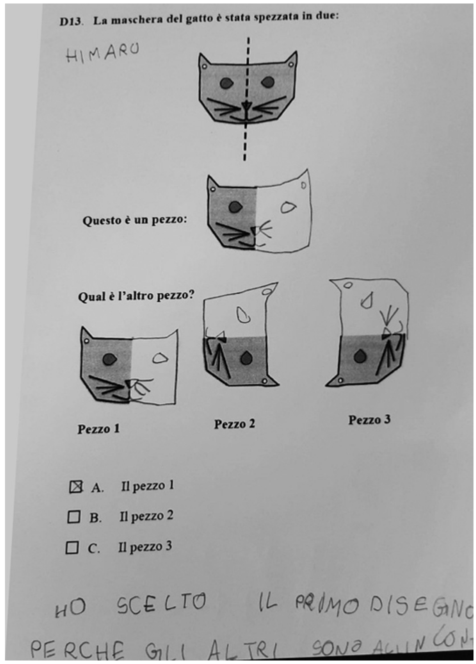
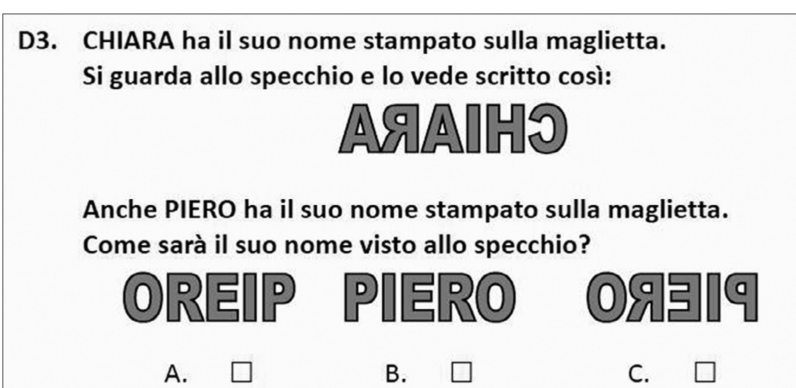


Fig. 5 – La scheda di un bambino

Abbiamo poi preso spunto dalla seguente domanda INVALSI, di cui anche riportiamo le percentuali di risposta.


D3. CHIARA ha il suo nome stampato sulla maglietta.
Si guarda allo specchio e lo vede scritto così:

Anche PIERO ha il suo nome stampato sulla maglietta.
Come sarà il suo nome visto allo specchio?

OREIP PIERO

A. ☐ B. ☐ C. ☐

Fig. 6 – Domanda INVALSI, D3 2013

 ISBN 9788835151814

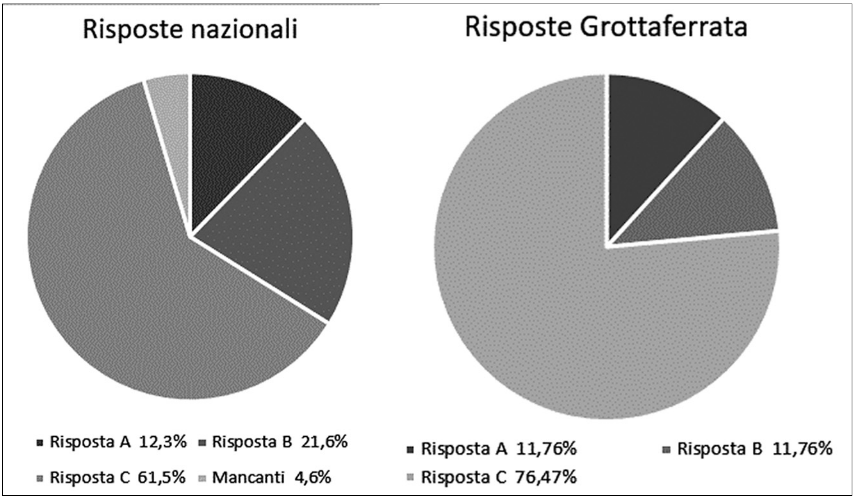


Fig. 7 – Confronto delle risposte alla domanda INVALSI, D3 2013

Le risposte corrette in questo caso sono state giustificate dai bambini per l'uso dello specchio (potevano usare liberamente i loro specchietti portati da casa) o dall'osservazione di come è scritta sopra la simmetrica di Chiara.

Approfondendo l'idea di questa scheda, negli esercizi che abbiamo fatto fare poi (scrivere come Leonardo da Vinci) abbiamo visto che la difficoltà cresceva passando dalla singola lettera, alla parola, alla frase.

Per verificare la correttezza della scrittura abbiamo proposto di mettere lo specchietto di lato alla scritta. Non abbiamo però spiegato (e nessuno si è chiesto) perché questa sia una buona verifica.

Questo è stato spiegato e verificato praticamente nell'incontro successivo: mettere lo specchio a fianco di una scritta è diverso che metterlo sopra o sotto la stessa scritta, poiché cambia l'asse di simmetria. È sempre vero però che se abbiamo disegnato bene la figura simmetrica, l'immagine allo specchio del nostro disegno, rispetto al corretto asse di simmetria, ci ridà l'originale. In termini matematici una simmetria assiale ha ordine due (ovviamente queste non sono parole che abbiamo usato con i bambini).

Sempre per evidenziare il ruolo dell'asse di simmetria, si è poi proposto di lavorare sulla scheda in fig. 8.

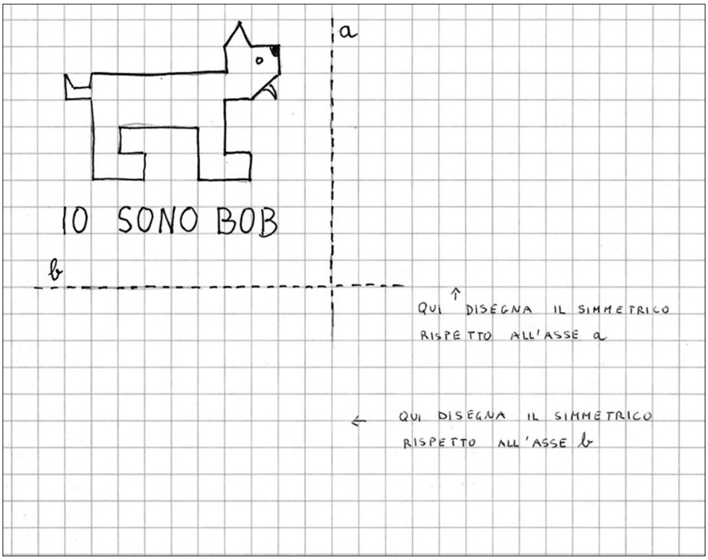


Fig. 8 – Scheda proposta

Dai lavori dei bambini (cfr. figg. 9 e 10) possiamo osservare come è risultato più facile il disegno di fronte (rispetto all'asse di simmetria a), piuttosto che il disegno di sotto (rispetto all'asse di simmetria b). Qui si conferma il fatto che il riconoscimento (o la costruzione) di una figura simmetrica rispetto a un asse verticale è un traguardo che i bambini raggiungono nel loro sviluppo prima dell'analogo problema rispetto a un asse orizzontale (Bornstein e Stiles-Davis, 1984).

Succede il contrario per la scritta: l'asse di simmetria *b* non cambia l'ordine delle lettere e delle parole e la scrittura rimane da sinistra a destra. Alcune lettere sono addirittura uguali a quelle della scritta originale avendo un asse di simmetria orizzontale (come I, O, B).

Al contrario l'asse di simmetria *a* inverte l'ordine delle parole e il loro verso di scrittura. Le lettere che rimangono uguali sono soltanto I e O che hanno un asse di simmetria verticale.

Notiamo come la S e la N abbiano lo stesso simmetrico rispetto ai due assi, però sembra più facile sbagliare la simmetrica a destra (cioè rispetto all'asse verticale). Prendiamo per esempio la seguente scheda (fig. 9).

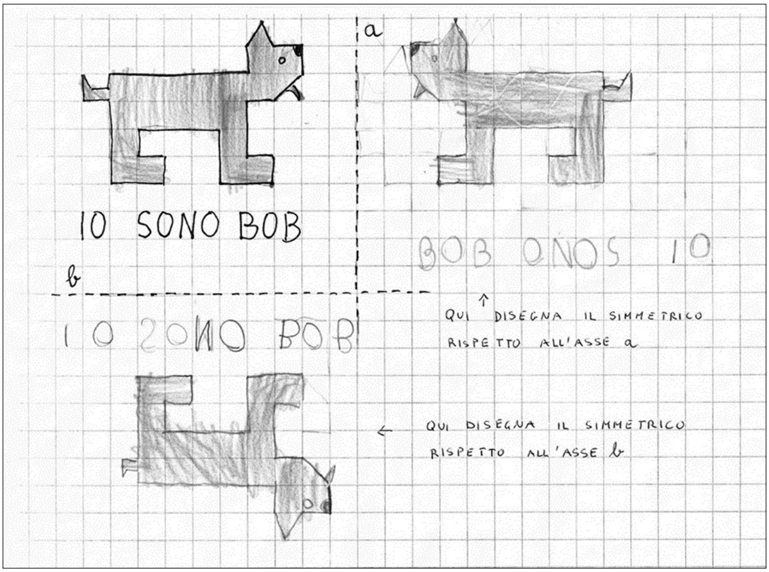


Fig. 9 – Il lavoro di un bambino

La scritta sotto va bene. In quella a destra le lettere B, N, S non sono state girate e neanche IO. Forse la concentrazione sulla successione delle parole e delle lettere nelle parole (da destra a sinistra anziché l'abituale da sinistra a destra) ha fatto dimenticare il resto. Esaminiamo ora un'altra scheda.

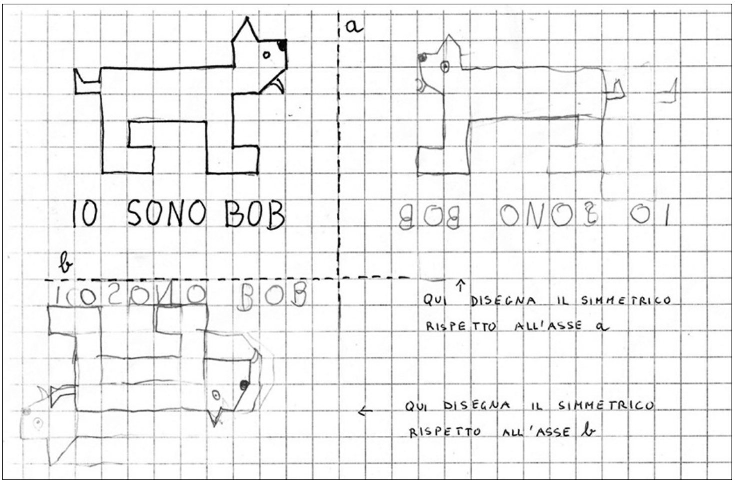


Fig. 10 – Il lavoro di un altro bambino

Qui si vede una certa difficoltà a disegnare il cane di sotto (c'è anche un altro tentativo cancellato), ma la scritta simmetrica rispetto all'asse *b* va bene. A destra, rispetto all'asse di simmetria *a*, il disegno del cane presenta qualche imprecisione, ma la scritta, tranne la lettera N non girata, è corretta.

Questo esercizio ha comunque di certo aiutato a rispondere correttamente alla domanda INVALSI D7 2017.

Fig. 11 – Domanda INVALSI, D7 2017

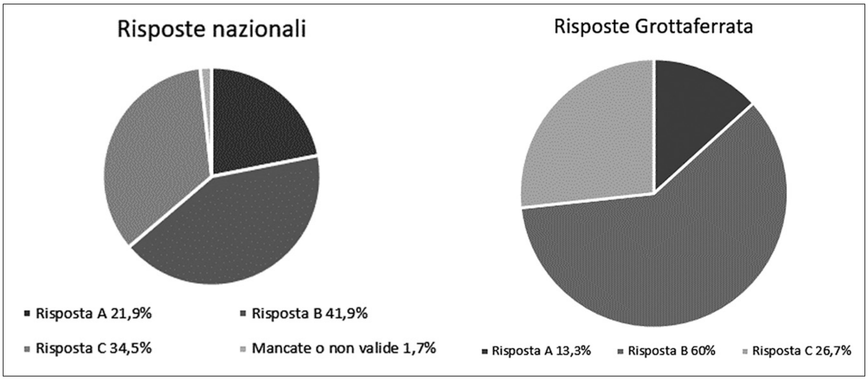
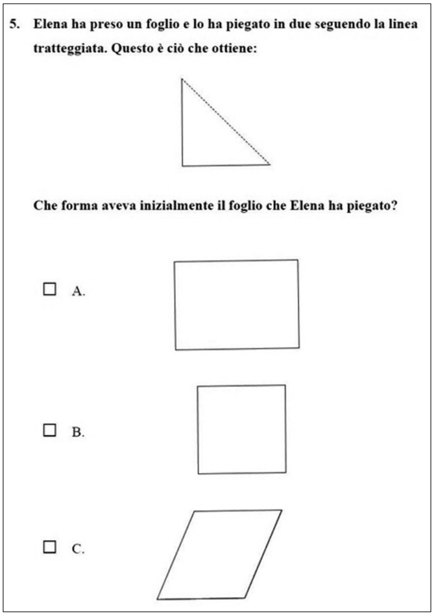


Fig. 12 – Confronto delle risposte alla domanda INVALSI, D7 2017

Per rafforzare la comprensione dell'asse di simmetria abbiamo proposto il gioco del ritaglio di fogli ripiegati. Spesso i bambini hanno creato delle figure intere che aprendo il foglio venivano raddoppiate. Poi hanno capito come era sufficiente disegnare e ritagliare metà di una figura accanto alla piegatura del foglio per ottenere, aprendo il foglio, la figura intera. Il disegno che ha avuto più successo per la sua semplicità e la sua popolarità, soprattutto tra le bambine, è stato il cuore.

A proposito di piegature e ritagli nell'ultimo incontro abbiamo proposto le seguenti domande INVALSI (fig. 13).



5. Elena ha preso un foglio e lo ha piegato in due seguendo la linea tratteggiata. Questo è ciò che ottiene:

Che forma aveva inizialmente il foglio che Elena ha piegato?

☐ A.

☐ B.

☐ C.

Fig. 13 – Domanda INVALSI, D5 2019

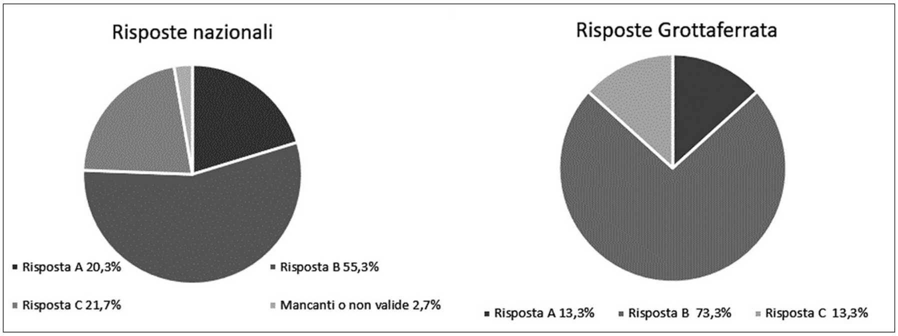


Fig. 14 – Confronto delle risposte alla domanda INVALSI, D5 2019

In questo caso le argomentazioni di molti bambini hanno fatto riferimento al quadrato, per esempio: “Ho scelto il quadrato perché se lo piego dietro diventa un triangolo”, ma quelle di altri (sbagliando risposta) hanno fatto riferimento alle dimensioni delle figure. Effettivamente un effetto ottico fa apparire il quadrato della risposta (corretta) B un po’ piccolo per essere il doppio del triangolo proposto e quindi la *dimensione* è stata valutata a scapito della *forma*.

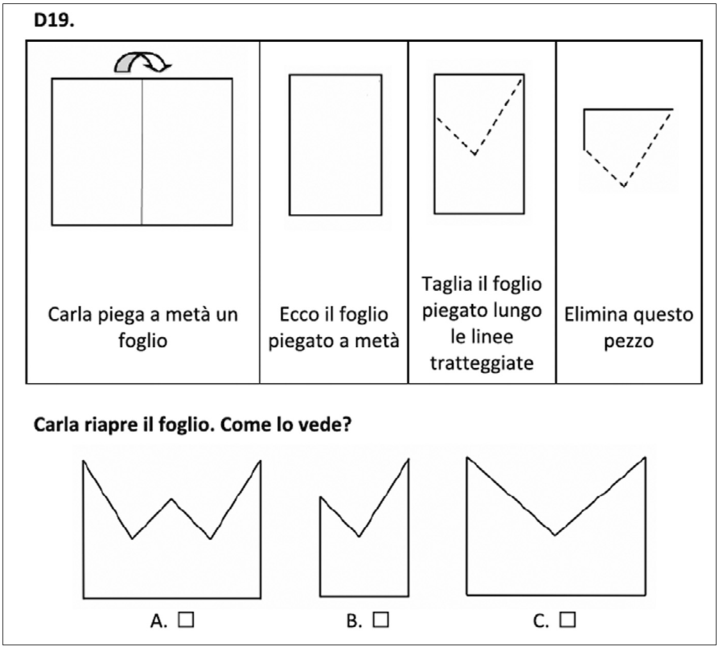


Fig. 15 – Domanda INVALSI, D19 2018

Dalle spiegazioni date dai bambini di Grottaferrata, che in maggioranza hanno scelto la risposta (errata) B, si deduce che delle quattro immagini proposte hanno considerato soltanto le ultime due, senza realizzare quindi che il rettangolo proveniva da una piegatura: di nuovo una frettolosa lettura del testo.

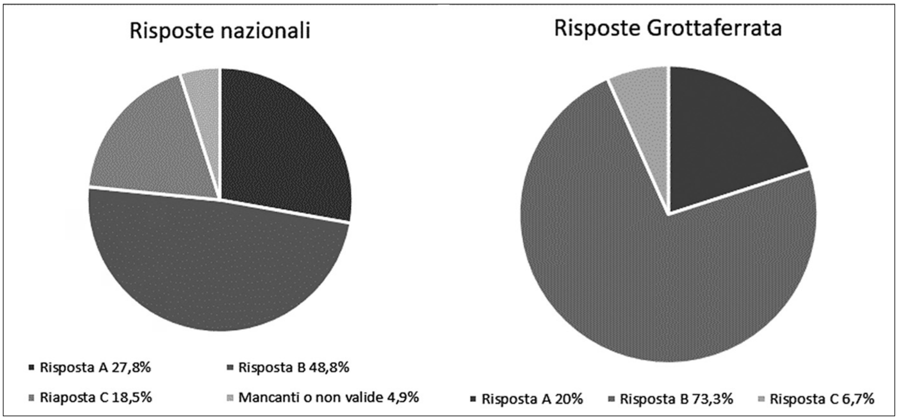


Fig. 16 – Confronto delle risposte alla domanda INVALSI, D19 2018

Un po' deluse da questi ultimi risultati, abbiamo proposto l'ultima domanda, dicendo che era difficile e preparandoci al peggio.

Fig. 17 – Domanda INVALSI, D22 2019

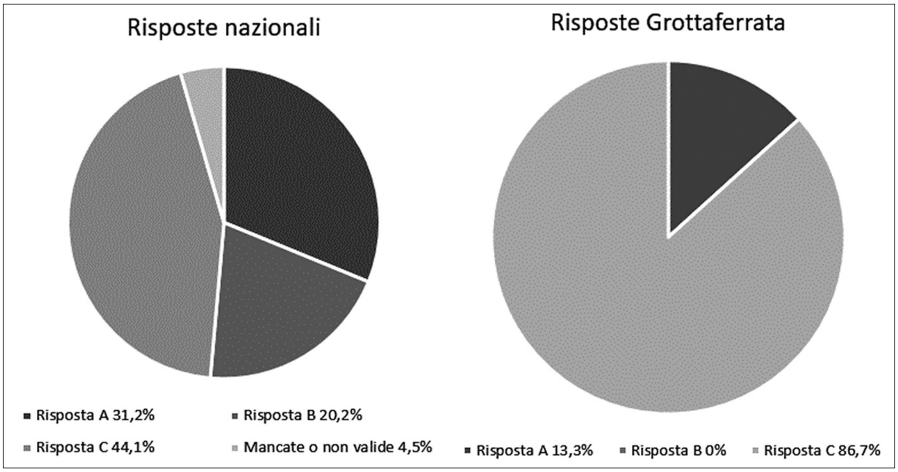


Fig. 18 – Confronto delle risposte alla domanda INVALSI, D22 2019

In questo caso i bambini ci hanno sorpreso positivamente anche per le loro argomentazioni: "Ho fatto finta di essere Marco" oppure: "Il sole a sinistra diventa a destra e la barca, che va a destra, nello specchio va a sinistra".

L'incontro si è concluso con una discussione di classe: perché lo specchio scambia la destra con la sinistra, ma non l'alto con il basso? Possiamo inventare uno specchio che scambia l'alto con il basso? Sì, ma soltanto con la fantasia, ha detto qualcuno, in un film fantastico. Se giriamo lo specchio, ha detto qualcun altro. Lo giriamo, ma come? Siamo arrivati con una certa fatica a immaginare tutti noi stessi in una classe con il pavimento fatto di specchi, dove le immagini che vediamo sono suole di scarpe rivolte verso l'alto e le teste sono giù verso il basso.

3. Conclusioni

Sarebbe forse possibile concludere che in questa sperimentazione la mancanza di una procedura standard e l'alternarsi di strumenti vari (righello, specchietto, piegature e tagli), liberamente scelti da ognuno in occasione della somministrazione delle domande INVALSI, abbia spesso portato i bambini a confondersi e a dare risposte errate. A questa si è aggiunta la frequente difficoltà dell'interpretazione del testo scritto delle domande.

Tuttavia, non era nostro intento allenare i bambini su quesiti simili per migliorarne le prestazioni, ci è sembrato invece positivo e istruttivo proporre degli esercizi incentrati sullo stesso concetto matematico, senza che questi richiedessero né l'utilizzazione sempre dello stesso strumento, né un'esecuzione ripetitiva di una tecnica appresa. In conclusione, nonostante la performance non eccezionale dei bambini coinvolti, le attività svolte sembrano aver avuto un positivo ruolo di rafforzamento del concetto di simmetria assiale.

Riferimenti bibliografici

Bornstein M.H., Stiles-Davis J. (1984), "Discrimination and memory for symmetry in young children", *Developmental Psychology*, 20, 4, pp. 637-649.

Bryant P. (2008), "Paper 5: Understanding spaces and its representation in mathematics", in T. Nunez, P. Bryant, A. Watson (*eds.*), *Key understanding in mathematics learning: a report to the Nuffield Foundation*, testo disponibile al sito http://www.nuffieldfoundation.org/sites/default/files/P5.pdf, data di consultazione 3/8/2022.

INVALSI (2020), *Archivio prove INVALSI*, gestinv.it, data di consultazione 3/8/2022.

Isabel V., Barbos, A., Cabrita I. (2019), "Mathematics outside the classroom: examples with pre-service teachers", *Quaderni di ricerca in didattica*, 2, 3, pp. 138-142.

MIUR (2012), *Indicazioni nazionali per il curricolo della scuola dell'infanzia e del primo ciclo di istruzione*, Roma, testo disponibile al sito http://www.indicazioninazionali.it/documenti_Indicazioni_nazionali/indicazioni_nazionali_infanzia_primo_ciclo.pdf, data di consultazione 3/8/2022.

Riley N., Lubans D., Holmes K., Gore J.M., Hansen V., Morgan P. (2017), "Movement-based mathematics: Enjoyment and engagement without compromising learning through the EASY Minds program", *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, 13, pp. 1653-1673.

Schattschneider D. (2006), "Coxeter and the artists: two-way inspiration", in H.S.M. Coxeter, C. Davis, E.W. Ellers (*eds.*), *The Coxeter legacy: reflections and projections*, American Mathematical Society, Providence, pp. 268-270.

Schuler J. (2001), "Symmetry and young children", *Montessori Life*, 13, 2, pp. 42-48.

Seo K-H., Ginsburg H. (2004), "What is developmentally appropriate in early childhood mathematics education?", in D.H. Clements, J. Sarama, A-M. Dibias (*eds.*), *Engaging young children in mathematics: standards for early childhood mathematics education*, Erlbaum, Mahwah, pp. 91-104.

Unquhart A. (1999), "The symmetry rule in propositional logic", *Discrete Applied Mathematics*, 96-97, pp. 177-193.

Weyl H. (1952), *Symmetry*, Princeton University Press, Princeton.

Zan R. (2016), *I problemi di Matematica. Difficoltà di comprensione e formulazione del testo*, Carocci, Roma.

Gli autori

Stefano Babini insegna Matematica e Fisica. Appassionato di problem solving, comunicazione didattica e nuove tecnologie applicate alla didattica. Si occupa di processi di apprendimento e valutazione in vari contesti formativi e di sistema. Fa parte del gruppo di ricerca in didattica della Matematica "Divertical-Math". Collabora con l'università di Parma. Collabora da diversi anni con INVALSI.

Valentina Barucci è stata professore ordinario di Algebra presso "Sapienza, Università di Roma" e ha svolto attività di ricerca in Algebra commutativa. Dal 1974 al 2020 ha tenuto ogni anno corsi di carattere matematico presso varie facoltà di Sapienza e ha svolto attività didattica anche nel corso di laurea di Scienze della formazione primaria, dove continua a insegnare in qualità di Esperto di alta qualificazione. Per questo corso ha scritto il libro *Matematica per la scuola primaria* (Libreriauniversitaria.it).

Nicola Chiriano è docente di Matematica e Fisica presso il LS "L. Siciliani" di Catanzaro. Formatore SNV e autore INVALSI grado G10. Collabora con il Centro Pristem dell'Università "L. Bocconi" di Milano (rivista Alice&Bob) e con l'Università di Perugia (Progetto Matematica&Realtà). Si occupa di ICT per la didattica e CLIL.

Emanuela Conte è docente di Matematica e Scienze presso l'IC "Alighieri-Diaz" di Lecce. Autrice INVALSI grado 2 e 5, si occupa di Qualità, valutazione e autovalutazione di istituto scuola primaria/infanzia. Collabora con il gruppo di ricerca in Didattica della Matematica, Università "Alma Mater Studiorum" di Bologna.

Ettore D'Agostino è docente di Matematica e Fisica. Come membro del team di innovazione digitale contribuisce all'informatizzazione dei processi scolastici e alla raccolta ed elaborazione di dati relativi a indagini statistiche attuate nell'istituto.

Roberta Franchi insegna Lingua e Letteratura italiana. Da due anni ricopre il ruolo di collaboratore del Dirigente. Durante gli anni dell'università ha lavorato come giornalista free-lance per *Il Messaggero*. Ha una grande esperienza nella gestione di progetti PON.

Ivan Graziani insegna Matematica e Scienze. Formatore in didattica della Matematica. Appassionato di ICT, problem solving e comunicazione didattica. Fa parte del "Gruppo di ricerca e sperimentazione in Didattica della Matematica – Pisa" (GRSDM) e del gruppo di ricerca "Divertical-Math". Collabora da anni con UNIBO, INDIRE, INVALSI e Mondadori-Rizzoli educational.

Francesco Mammarella è docente di Inglese. Attualmente ricopre la carica di collaboratore del Dirigente. Durante gli anni dell'università ha lavorato come giornalista free-lance per *Il Messaggero*. Ha una comprovata esperienza nel coordinamento di progetti scolastici internazionali.

Antonella Marconi è docente di scuola primaria presso l'istituto comprensivo "Giovanni Falcone" di Grottaferrata (Roma), si occupa di didattica delle Scienze e della Matematica di cui ha seguito numerosi corsi di formazione. È trainer e membro del gruppo di progetto del Centro IBSE-ANISN del Lazio e Formatrice ESERO. Ha pubblicato alcuni articoli sulla rivista di didattica dell'ANISN.

Marianna Nicoletti è docente di Matematica e Scienze alla scuola secondaria di I grado. Autrice INVALSI per il grado 8, è esperta delle dinamiche di apprendimento della Matematica e delle metodologie di valutazione, in particolare per alunni con difficoltà di apprendimento. Autrice del *Diario delle regole di Matematica* (Giunti).

Chiara Saletti, laureata in materie letterarie, è docente di scuola primaria e tutor coordinatore UNIFI. Autrice di testi scolastici e articoli di didattica della Matematica, collabora con Giunti come consulente sulla valutazione. Esperto formatore OM 172/20 e NEV SNV. Si occupa di valutazione con formazione acquisita presso MIUR, INDIRE, INVALSI e POLIMI.

Leonardo Tortorelli, dottorando di ricerca in Didattica della Matematica presso l'Università di Salerno, già docente a contratto per l'Università di Bari e responsabile scientifico del progetto di ricerca "Geometriko" (Centro Pristem, Università "L. Bocconi", Milano). Autore, tra l'altro, di *Geometriko* (Erickson), *Mentematiko* (Dedalo) e dei volumi per docenti *Quaderni di Geometria verticale* (Dedalo) e insignito del premio "Mestieri del matematico" nell'ultima edizione del 2017.

Ester Valloreo è docente di Matematica e Fisica. Da diversi anni è membro dello staff del Dirigente. Come referente INVALSI d'istituto è impegnata nell'analisi e interpretazione dei dati con lo scopo di migliorare i livelli di apprendimento degli studenti.

La Matematica è presente ovunque nel nostro quotidiano, l'utilizzo delle cifre e dei numeri ci accompagna dalla nostra nascita e ci aiuta a capire il mondo che ci circonda. Eppure, spesso le materie scientifiche e tecnologiche scontano due preconcetti: che abbiano un'aura poco attraente e che i maschi ottengano risultati migliori rispetto alle femmine.

In generale, la difficoltà di apprendimento può essere legata al fatto che la Matematica rappresenta un linguaggio astratto, che deve essere tradotto in un campo pratico. All'interno di questo volume sono raccolte delle ricerche, presentate in occasione del V Seminario "I dati INVALSI: uno strumento per la ricerca e la didattica" (Roma, 25-28 febbraio 2021), che sperimentano nuove tecniche per facilitare l'apprendimento della Matematica. L'augurio è che la lettura del volume possa essere un punto di partenza per nuove indagini all'interno del mondo scolastico e un riferimento per chi voglia approfondire la tematica trattata anche attraverso i dati INVALSI.

Patrizia Falzetti, Dirigente tecnologa, è Responsabile del Settore della ricerca valutativa dell'INVALSI. È inoltre responsabile dell'Ufficio Statistico per il SISTAN e del Servizio Statistico INVALSI che cura l'acquisizione, l'analisi e la restituzione dei dati riguardanti le rilevazioni nazionali e internazionali (OCSE e IEA) sugli apprendimenti. Coordina e gestisce il processo di restituzione dei dati e delle analisi statistiche alle singole istituzioni scolastiche e al Ministero dell'Istruzione e del Merito.

FrancoAngeli
La passione per le conoscenze